

O putoklizini u krivulji

Flögl, Stanko

Source / Izvornik: **Glasnik za šumske pokuse:Annales pro experimentis foresticis, 1931, 158 - 272**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:108:823806>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-01**



Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Forestry and Wood Technology](#)



PROF. ING. STANKO FLÖGL:

O PUTOKLIZINI U KRIVULJI.

Über den Riesweg in der Krümmung.

SADRŽAJ:

Uvod.

I.

1. Klizanje neteškog tijela u luku kružnice, stalnog uzdužnog nagiba
2. Klizanje teškog tijela na podlozi bez trenja, izvedenoj u luku kružnice stalnog uzdužnog nagiba
3. Klizanje teškog tijela na podlozi sa trenjem, izvedenoj u luku kružnice stalnog uzdužnog nagiba
4. Poprečan profil putoklizine u krivulji, izveden u obliku užljebine
5. Klizanje teškog tijela na podlozi uzdužnog nagiba α , poprečnog nagiba β , savitaj u luk povoljne prostorne krivulje, uz djelovanje horizontalne centripetalne sile. Koeficijent nagiba
6. O minimalnom polumjeru krivosti putoklizine
7. O putoklizini providenoj sa švarcvaldskim profilom u krivulji. Mijena brzine teškog tijela u njoj
8. O putoklizini izvedenoj u obliku užljebine u krivulji. Mijena brzine teškog tijela u njoj
9. O prelaznoj krivulji
10. Primjeri

II.

11. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je parabola
12. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je hiperbola
13. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je osovljena elipsa
14. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je ispružena elipsa
15. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čunjosječica
16. Putoklizina izvedena je u obliku užljebine, stalnog uzdužnog nagiba. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čunjosječica
17. Putoklizina, providena sa švarcvaldskim profilom, stalnog uzdužnog nagiba. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čunjosječica
18. Primjer
Tablice

UPOTREBLJENA LITERATURA:

a) iz šumarske struke:

- Ö. v. Baltz: »Das Gefälle der Rieswege«, Öst. Forst u. Jagdzeitung 1910.
C. Baltz: »Betrachtung über Theorie und Praxis der Rieswege«, Ö. F. Jagdzeitung 1914. i 1915.

- Dr. J. Glatz: »Rieswege und Drahtseilriesen«. Wien, Leipzig 1920.
- Dr. Hauska: »Eine Betrachtung über Theorie und Praxis der Rieswege«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1914, 1915.
- Kubelka: »Über Theorie u. Praxis der Rieswege«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1914, 1915.
- Kubelka: »Praktische Erfahrungen aus dem Rieswegbetriebe«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1909.
- Kubelka: »Über das Gefälle der Rieswege«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1910.
- Miklitz: »Über das Gefälle der Rieswege«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1910.
- Miklitz: »Praktische Erfahrungen aus dem Rieswegbetriebe«. Ö. F. u. Jagdzeitung 1908.
- Flögl S.: »Prilog teoriji klizina«. Spomenica Gosp. šumarskog fakulteta sveučilišta u Zagrebu 1919—1929; sa oznakom ostale literature.
- b) iz Teoretske mehanike i Matematike:
- Keck-Hotopp: Mechanik.
- Kienert-Stegemann: Differential und Integral-Rechnung.

Uvod.

Osovinu svake putoklazine treba osnovati po mogućnosti u pravcu u horizontalnoj projekciji. U vertikalnoj projekciji može biti sastavljena i od pravaca raznih nagiba, nizbrdica, horizontala, uzbrdica ili od vertikalnih konveksnih i konkavnih kružnica na lomu nagiba. No i tu se treba držati izvjesnih granica, već prema tome, da li će putoklazina raditi ljeti ili zimi, za vrijeme suše ili u vlažno doba, zatim kod iste putoklazine već prema njezinom dijelu, koji se osniva. Početni dio treba osnovati sa najvećim, a završni dio sa najmanjim nagibom. Zbog terenskih prilika nije moguće trasirati osovinu putoklazine niti u horizontalnoj projekciji uvijek u pravcu, nego treba umetati i krivulju na lomu dvaju pravaca, redovno kružnicu sa prelaznom krivuljom ili bez nje. Tu su određene opet granice, kojih se treba držati na temelju iskustva. U ovoj se raspravi radi samo o dijelu putoklazine, koji pokazuje oblik krivulje u horizontalnoj projekciji. Zbog toga se spominju ovdje podaci, utvrđeni iskustvom, koji se protežu samo na takav dio putoklazine.

Danas je općenito prihvaćen nazor, da je najzgodniji švarcevaldski profil, a tek u drugom redu profil u obliku užljebine za putoklazinu u krivulji. Drvo treba voditi, kada klizi u krivulji. Švarcevaldski profil providen je stoga sa vertikalnom stijenom na vanjskom rubu, koja je složena od oblica i tačno pritesana u oblik osnovane krivulje. Podloga je utvrđena sa pragovima u poprečnom smjeru, pod izvjesnim nagibom prema središtu krivulje. Ovako konstruiranu putoklazinu karakteriše dakle podloga od naravnog tla, utvrđena s pragovima u određenim razmacima, providena sa poprečnim nagibom prema središtu krivulje, zatim povod (vodilo, Führung) sastavljen od jednog, dva ili iznimno od više redova oblica, braniča, pritesanih i složenih tačno u oblik

osnovane krivulje. U dobrom, litičastom tlu može se izvesti putoklizina u krivulji i u obliku užljebine. To je u gornjem dijelu 1'5 do 2'0 m. široka, 0'4 do 0'6 m. duboka užljebina, sa strmim, zaobljenim stijenama, providena sa 0'5 do 1'0 m. širokim dnom. Kao povod služi vanjska stijena užljebine. Dno je provideno sa poprečnim nagibom kao i podloga švarcvaldskog profila. Za veću sigurnost gradi se mali nasip uz vanjski rub užljebine od zgodnog materijala, koji sili drvo, da ne ostavlja određeni put jednako kao i vanjska stijena užljebine. Jedan i drugi profil proširuje se u krivulji u obratnom omjeru sa veličinom polumjera krivosti. To proširenje treba izvesti tek u najnužnijim granicama. Iskustvo je pokazalo, da ne valja veća širina puta od 2'0 m. Manji oblici drveta klize na širokom putu nesigurno, jer gube povod. Proširenje izvodi se uvijek na unutarnjoj strani puta prema središtu krivulje.

Uzdužni nagib putoklizine neka je konstantan u krivulji. Treba li mijenjati nagib, neka se mijenja pred krivuljom ili iza nje, kaže Kubelka, a nipošto ne u njoj. Nagib u krivulji treba da je za 5—10% veći od nagiba u susjednom pravcu po Steineru. No i to povećanje, kaže Glatz, može se izvesti samo ako terenske prilike dopuštaju, a nije na uštrb drugom kojem dijelu ili cjelini putoklizine. Inače vrijede ovi podaci o najpovoljnijem nagibu jednako u krivulji kao u pravcu i to po Glatzu:

Za suhu ljetnu putoklizinu:	35—50%
„ vlažnu „ „ :	15—30%
„ osnježenu zimsku „ :	10—20%
„ oledenu „ „ :	4—10%

Ovi se podaci podudaraju u glavnom sa takovim podacima po Miklitzu.

Poprečan nagib zavisi o veličini centrifugalne sile, dakle o polumjeru krivosti osovine puta i o brzini, s kojom tijelo klizi. Podloga švarcvaldskog profila izvodi se po Glatzu sa poprečnim nagibom od 10 do 15%, a iznimno do 25%. Veliki poprečan nagib zadaje poteškoća kod izvedbe i uzdržavanja puta. Zbog toga se ne preporuča. Podloga užljebine izvodi se također sa nagibom od cca 10% u krivulji.

Ostali oblici poprečnog profila u krivulji, praktički se nijesu mogli udomiti. Naročito vrijedi to za profil sa kosim pragovima, bez braniča, neku kombinaciju užljebine i švarcvaldskog profila, koju je opisao Kubelka, a dotjerivao i preporučio Dr. Hauska. Pragovi se brzo troše u takovom profilu, kaže Miklitz, ne leže sigurno, mijenjaju položaj, a budu i izbačeni. Ne utvrđuju dakle put, a što je najgore, loše provode drvo, dok klizi, jer marikaju braniči. A i Dr. Glatz-u nije po-

znato, da se je igdje upotrijebio takav profil u novije doba. Ova kombinacija nije ni teoretski opravdana, kako će se vidjeti poslije.

Dosada se je upotrijebila redovno kružnica, sa prelaznom krivuljom ili bez nje, kao oblik osovine putoklazine u horizontalnoj projekciji, dakle kao krivulja trasiranja. Polumjer kružnice, vrijedilo je pravilo, a vrijedi i sada, treba da je što veći. Zavisi o brzini, dužini i o elastičnosti drveta, koje klizi. Kod transporta dugog drveta — a to je redovni slučaj — polumjer neka ne bude manji od 100—80 m., a samo u nuždi 60 m., kaže Glatz, a s njime jednako i Kubelka. Po Miklitzu mogla bi se sniziti ta granica i na 30 m. u povoljnim prilikama obzirom na elastičnost dugog drveta, koje se također savija i prilagođuje obliku krivulje ili puta, kojim klizi. Sa ovom pojavom može se računati ali malo ili ništa, ispravno kaže Glatz. Prelaznu krivulju treba osnovati to dužu, što je manji polumjer, a brzina veća. Ona može izostati posvema, ako je polumjer kružnice veći od 300 m. po Glatz-u, a veći od 200 m. po Kubelki.

Ovako glase danas u glavnom pravila, stečena iskustvom, kojih se valja držati osnivajući putoklizinu u krivulji, u horizontalnoj projekciji. No to je premalo za valjanu osnovu. S ovim su pravilima određene granice preširoko, bez uputa, kojih se valja držati unutar njih. S ovim su pravilima generalizirane možda i pojave, koje su odgovarale svrsi u konkretnom slučaju ili u konkretnim slučajevima, a nijesu od općenitog značenja. Sva su ta pravila teoretski slabo ispitana i potkrijepljena u stručnoj literaturi. U koliko jesu, spominje se na kraju ove rasprave. Naročito nije utvrđeno ovo još potrebno za valjanu osnovu:

Koliki mora biti uzdužan nagib putoklazine u krivulji, da radi besprijeckorno unutar određenih granica ili uz postavljene uvjete? Koliki mora biti taj nagib na otvorenoj pruzi, a koliki kod kočnih krivulja na kraju klizine? Kako utječe poprečan nagib na sposobnost rada putoklazine kod švarcvaldskog profila, a kako kod užlebine? Koliki je njegov iznos u konkretnom slučaju? Granice 5—25% ili 5—10% su preširoke! ne mogu vrijediti uvijek i u svakom slučaju. Nema sumnje, imadu pravo i oni, koji određuju minimalnu vrijednost polumjera krivosti sa 30 m., kao i oni, koji određuju tu vrijednost sa 200 m. No nemaju pravo svi u svim prilikama. Radius od 30 m. može biti jednako dobar kao i radius od 200 m., ali samo u izvjesnim prilikama. Za cijelo zavisi veličina polumjera i o obliku profila. Njegova vrijednost neće biti jednaka kod švarcvaldskog profila i kod užlebine, uz jednake prilike inače. Nije utvrđeno, da li je kružnica najpovoljniji oblik u svim prilikama?

Naročito o najvažnijem pitanju, o promjeni brzine tijela u krivulji empirija šuti. Jednako šuti o tome i teorija u stručnoj šumarskoj literaturi. Osnivač treba ali da uvjeri ne samo sâm sebe, nego i druge, da će putoklizina raditi u svakom dijelu, u određenim prilikama. Poznavanje zakona o promjeni brzine tijela jednako je dakle važno u krivulji kao i u pravcu. Zataji li putoklizina samo zbog jedne loše osnovane krivulje, paralizovan je sav njezin dio ispod te krivulje iako je osnovan inače potpuno ispravno. Najvažniji dio putoklizine je posljednji na stovarištu. Ondje se poništi brzina, a drvo istovaruje. U tu svrhu osnivaju se kočni pravci, horizontale i kočne krivulje. Osnivanje pak takove kočnice nije moguće bez poznavanja brzine, sa kojom ulazi tijelo u nju. Nije li uspješno osnovan taj posljednji dio, putoklizinu treba napustiti. Nije se to desilo samo jedamputa! Prosuditi ili osnovati putoklizinu kao cjelinu bez poznavanja zakona o promjeni brzine u svakom niezinom dijelu, nije dakle moguće.

Ocrtavši ovako u glavnim crtama predmet, o kojem se ovdje radi, treba da se nešto kaže i o najvažnijem faktoru kod osnivanja putoklizina o koeficijentu trenja. Nema sumnje od velike je koristi poznavanje tačne vrijednosti koeficijenta trenja pod svim prilikama na putoklizinu. No nije od prijeko potrebe. Vrijednost koeficijenta trenja mijenja se sa godišnjom dobom, atmosferskim prilikama, oblikom i vrstom drveta, koje klizi, kod iste putoklizine često i u istom danu. Drukčiji je koeficijent trenja u zoru, za vrijeme rose, a drukčiji je o podne, na sunčanom žaru. Nagli pljusak — a taj nije rijetkost u gori — stubokom mijenja način rada klizire. Putoklizinu treba dakle osnovati tako, da je njezin rad osiguran u prilično širokim granicama vrijednosti koeficijenta trenja. Te su pak granice utvrđene dovoljno već i dosadašnjim iskustvom. Zbog toga će biti od potrebe osnovati putoklizinu u krivulji prema godišnjoj dobi, u kojoj će raditi: kod zimske putoklizine prema graničnim vrijednostima, koje poprma koeficijent trenja zimi, a kod ljetne putoklizine prema graničnim vrijednostima, koje poprma koeficijent trenja ljeti. Glavno je, da je rad putoklizine osiguran za najveći dio intervala vrijednosti, koje poprma koeficijent trenja u doba, kada se drvo otprema. — U tom pogledu kaže i Glatz, nekoliko postotaka više ili manje nijesu od važnosti kod svih putoklizina uopće, a kod ljetnih napose. Neće se moći izbjeći u takovom slučaju razmišljeno velikim brzinama. Ali, i u tom pogledu uči iskustvo, da su velike brzine od sporednog značenja na valjano inače osnovanoj i izgrađenoj putoklizinu.

Tijekom rasprave bit će od potrebe iznijeti općenite mehaničke zakone, koji su u vezi sa putoklizinom u krivulji, ali ne zbog toga, što nebi bili poznati, već zbog toga, što nijesu u

skladu sa objavljenim već nekim formulama u tom predmetu. Osim toga potrebno je i za bolje razumijevanje kraja, da se počne od početka. U tu svrhu podijeljena je i rasprava u dva dijela, na više tačaka, koji čine zasebnu cjelinu, a upiru se jedna na drugu. U prvom su dijelu raspravljene pojave u vezi sa klizanjem teškog tijela na putoklizini, trasiranoj u luku kružnice, a u drugom dijelu pojave u vezi sa klizanjem teškog tijela na putoklizini, trasiranoj u luku povoljne čunjosiečice, u koliko već nijesu raspravljene u prvom dijelu.

I.

1. Klizanje neteškog tijela u luku kružnice, stalnog uzdužnog nagiba. Put ovakovog tijela je cilindrična vijčanica, t. j. put, koji opisuje tijelo na plaštu cilindra, gibajući se jednolično pod stalnim kutem nagiba α prema horizontali. Baza cilindra je horizontalna kružnica, određenog polumjera r . Plašt cilindra, razvit u ravnini, na visinu jednog hoda vijčanice V , predočuje pravokutnik podnice $2r\pi$ i visine V . Diagonala tog pravokutnika je vijčanica razvita u toj ravnini. Nerazvita vijčanica je prostorna krivulja. Zbog toga se promatra u prostornom koordinatnom sistemu X, Y, Z , (slika 1). Položaj povoljne tačke P određuju na vijčanici koordinate:

$$x = r \sin \varphi; \quad y = r \cos \varphi; \quad z = r \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Prve dvije jednadžbe predočuju kružnicu u horizontalnoj ravnini XY . Treća jednadžba predočuje pravac, diagonalu na razvitom plaštu cilindra. Horizontalna projekcija tačke P izvršuje centralno gibanje, putujući na kružnici $r^2 = x^2 + y^2$, za koje vrijedi zakon: polumjer opisuje jednako velike površine u istom vremenu. Na kružnici je to moguće samo uz jednolično gibanje. Odatle se izvode prva tri uvjeta potrebna za gibanje u obliku vijčanice:

Horizontalna projekcija brzine mora biti konstantna: $v_h = c_h$.

Horizontalna projekcija tangencijalne sile, koja giba tijelo, mora biti jednako ničiti.

Horizontalna projekcija normalne sile, koja giba tijelo, treba da je jednaka centripetalnoj sili kružnice.

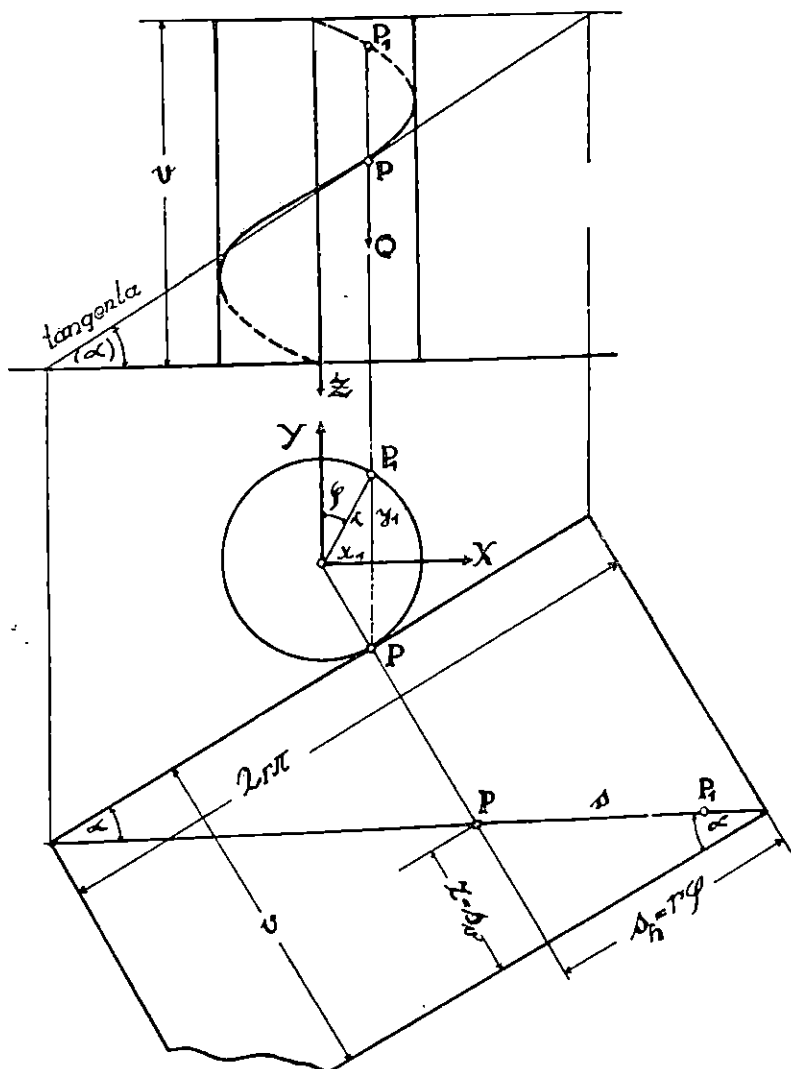
Dok se horizontalna projekcija tačke P giba jednolično na kružnici, opisuje projekcija iste te tačke na vertikali, osovini Z , put: $z = \varphi r \operatorname{tg} \alpha = s_h \operatorname{tg} \alpha = s_v$ istodobno. Odatle se izvode druga tri uvjeta potrebna za gibanje u obliku vijčanice:

Vertikalna projekcija brzine mora biti konstantna i sa horizontalnom projekcijom brzine u vezi: $v_z = c_h \operatorname{tg} \alpha$.

Vertikalna projekcija tangencijalne sile mora biti jednaka ničiti.

Prva i druga tri uvjeta zajedno daju ovaj rezultat: Gibanje u obliku cilindrične vijčanice stalnog nagiba α nastaje samo, ako je brzina, kojom se tijelo giba, konstantna:

$$v^2 = \sqrt{v_h^2 + v_z^2} = \sqrt{c_h^2 + c_h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{c_h}{\cos \alpha} = c$$



Slika 1.

i ako je pokretna sila jednaka s a m o centripetalnoj sili kružnice, baze cilindra vijčanice:

$$N = \frac{m c_h^2}{r} \quad (m \text{ označuje masu}).$$

Do istog rezultata se dolazi računskim putem na ovaj način: Obide li horizontalna projekcija tačke P cijelu kružnicu u vrijeme T , obiće će u jedinici vremena put, dio kružnice,

$\frac{2r\pi}{T}$. Horizontalna projekcija tačke giba se dakle sa jednolič-

nom brzinom $c_h = \frac{2r\pi}{T}$ Kut φ mjeran u jedinici vremena, a iz-

ražen dužinom luka polumjera r iznosi: $\frac{2\pi}{T} = \frac{c_h}{r}$, a u povolj-

nom vremenu t , $\varphi = \frac{c_h}{r} t$. Prve tri jednadžbe poprimaju onda

oblik:

$$x = r \sin \frac{c_h}{r} t, \quad y = r \cos \frac{c_h}{r} t \quad \text{i} \quad z = c_h t \operatorname{tg} \alpha.$$

Ove jednadžbe, derivirane prvi puta, daju komponente brzine:

$$v_x = \dot{x} = c_h \cos \frac{c_h}{r} t = \frac{c_h}{r} y$$

$$v_y = \dot{y} = -c_h \sin \frac{c_h}{r} t = -\frac{c_h}{r} x$$

$$v_z = \dot{z} = c_h \operatorname{tg} \alpha.$$

Horizontalna projekcija brzine mjeri:

$$v_h = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c_h,$$

a brzina na vijčanici: $v = \sqrt{v_h^2 + v_z^2} = c$

kao i prije. Iste jednadžbe derivirane po drugi puta daju komponente akceleracije:

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{c_h^2}{r} \sin \frac{c_h}{r} t = -\frac{c_h^2}{r^2} x$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{c_h^2}{r} \cos \frac{c_h}{r} t = -\frac{c_h^2}{r^2} y$$

$$a_z = \ddot{z} = 0.$$

Ukupna akceleracija mjeri:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{c_h^2}{r} = a_h. \quad (*)$$

Akceleracija vijčanice jednaka je dakle akceleraciji kružnaka je naravno ništici, $a_t = \dot{c} = 0$, dok je komponenta akceleracije, horizontalne projekcije vijčanice.

Komponenta akceleracije u smjeru tangente vijčanice je akceleracije u smjeru normalne vijčanice jednaka akceleraciji centripetalne sile:

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{c_h^2}{\varrho \cos^2 \alpha}$$

Dakle je ukupna akceleracija $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ jednaka također akceleraciji centripetalne sile a_n . Isporedi li se ova vrijednost za ukupnu akceleraciju sa prijašnjom (*), izlazi veza, koja postoji između polumjera krivosti vijčanice ϱ i polumjera kružnice r , njezine horizontalne projekcije:

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \alpha} \dots 1)$$

Komponente X, Y i Z pokretne sile N , koja će gibati neteško tijelo u obliku cilindrične vijčanice, konstantnog nagiba α , treba da zadovoljavaju jednadžbe:

$$X = ma_x = -m \frac{c_h^2}{r^2} x, \quad Y = ma_y = -m \frac{c_h^2}{r^2} y \quad \text{i} \quad Z = ma_z = 0,$$

iz kojih slijedi isti rezultat kao i prije:

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} = N_h = \frac{mc^2 \cos^2 \alpha}{r}$$

U vezi sa ovim razlaganjem mogu se upoznati još i neka geometrijska svojstva vijčanice. Tangenta leži u vertikalnoj ravni, a priklonjena je prema horizontalnoj ravni pod kutem nagiba α u svakoj tački vijčanice. Prvo zato, jer ona tangira i cilindar vijčanice, a drugo zato, jer je nagib tangente prema horizontalnoj ravni jednak nagibu vektora brzine v prema istoj ravni:

$$\frac{v_z}{v_h} = \frac{c_h \operatorname{tg} \alpha}{c_h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

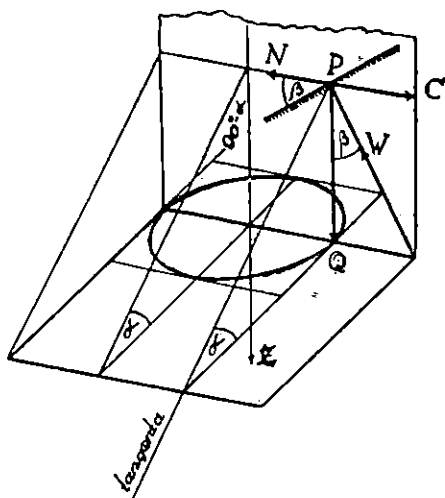
Smjer centripetalne sile je horizontalan i uperen prema vertikalnoj osovini Z cilindra, a pokriva se sa smjerom normale u svakoj tački vijčanice. Ravnina krivosti vijčanice zatvara

ISPRAVCI

- Str. 166. odozgo: 4. redak dolazi iza 6. reika.
- " 170. " 7. " „normale“ mjesto „normalne“.
- " 188. " 5. " desno: „+ zcos α cos β “ mjesto „+ cos α cos β “.
- " 189. " 16. " „a za minimalnu“ mjesto „a minimalnu“.
- " 197. " 7. " „0,80“ mjesto „0,60“.
- " 197. — u formuli 64.) drugi član u zagradi treba da glasi: $\frac{r\kappa}{\lambda}$.
- " 201. 11. redak „diferencijalne“ mjesto „definicijalne“.
- " 202. odozdo 2. " „tg $\alpha > \mu$ “ mjesto „tg $\alpha < \mu$ “.
- " 203. odozgo 7. " „77e)“ mjesto „77c)“.
- " 206. 13. " „tg $\alpha < \mu$ “ mjesto „tg $\alpha < \mu$ “.
- " 219 skrižaljka 3, stupac c, 4. redak. „38,7“ mjesto „28,7“.
- " 221. odozdo 7. redak treba da glasi: $\kappa = \frac{22,7}{24,3} = 0,934$.
- " 224. 14. " „(0,96 < κ < 0,99)“.
- " 231. Posljednja dva reika treba izmijeniti.
- " 232. odozgo 13. redak: „ $\frac{c^2}{k} = \dots$ “ mjesto „ $\frac{c}{k} = \dots$ “.
- " 236. odozdo 5. " $\frac{1}{\cos\varphi_a}$ mjesto $\frac{1}{\cos\varphi}$.
- " 236. " 1. " $\frac{1}{\cos\varphi}$ mjesto $\frac{1}{\cos\varphi_a}$.
- " 242. " 1. " $v_x = \dot{x} = \dots$ i $v_y = \dot{y} = \dots$ mjesto $\dot{v}_y = \dot{x} = \dots$ i $v_y = y = \dots$.
- " 254. odozgo 12. " cos φ_a mjesto cos φ .
- " 256. 10. " 194.) " 163.).
- " 262. Skrižaljka 11, u glavi preposljednjeg stupca: „v c “ mjesto „v a “, a u glavi posljednjeg stupca v b m/sec mjesto v b m/m.
- " 271. IV. Tablica, stupac 14, redak 29: „264“ mjesto „214“.
- " 274. odozgo 26. i 31. redak „Gl. 17.)“ mjesto „Gl. 13.)“.
- " 276. " 14. redak: „0,80 m“ mjesto „0,60 m“.

dakle isti stalni kut α sa horizontalnom ravninom, jer nju određuje smjer tangente i okomica spuštена na nju: normala. Polumjer krivosti leži u normali (Slika 2.).

2. Klizanje teškog tijela na podlozi bez trenja, izvedenoj u luku kružnice stalnog nagiba. Aktivne sile, koje djeluju na tijelo u ovom su slučaju teža $Q = mg$ sa komponentama $Q_x = 0$, $Q_y = 0$ i $Q_z = Q$ i otpor podloge, na kojoj tijelo klizi, W sa komponentama: W_x , W_y i W_z . Pokretna sila nije nego rezultanta svih aktivnih sila, koje djeluju na tijelo. Uđe li dakle tijelo u takovu klizinu sa početnom brzinom $v_a = c$, a želimo, da se giba na njoj, t. j. da opisuje cilindričnu vijčanicu stalnog



Slika 2.

nagiba α prema horizontali, komponente pokretne sile:

$$X = W_x, Y = W_y \text{ i } Z = Q + W_z$$

treba da zadovoljavaju jednadžbe, analogno kao u prvom slučaju:

$$W_x = -m \frac{c_h^2}{r^2} x = -N \frac{x}{r}, W_y = -m \frac{c_h^2}{r^2} y = -N \frac{y}{r}$$

i $Q + W_z = 0$, iz kojih slijedi:

$$W_h = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = N = \frac{m v_a^2 \cos^2 \alpha}{r}; W_z = -Q$$

$$i W = \sqrt{W_h^2 + W_z^2} = \sqrt{N^2 + Q^2}.$$

Horizontalna komponenta otpora jednaka je centripetalnoj sili, a vertikalna komponenta jednaka je težini tijela, te se razlikuje od posljednje samo po predznaku. Otpor W djeluje

dakle u vertikalnoj ravnini cilindra, koju određuje vektor Q i centralna osovina vijčanice, pod kutem nagiba prema vertikali:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{W_h}{W_z} = \frac{N}{Q} = \frac{v_a^2 \cos^2 \alpha}{r g} \dots 2.)$$

Otpor imade uvijek smjer okomice na podlogu. Mora dakle ta okomica zatvarati kut β sa centralnom osovinom cilindra vijčanice ili drugm rječma: Podloga klizine mora biti nagnuta prema centralnoj osovini vijčanice pod istim kutem β na svakom mjestu (Sl. 2.).

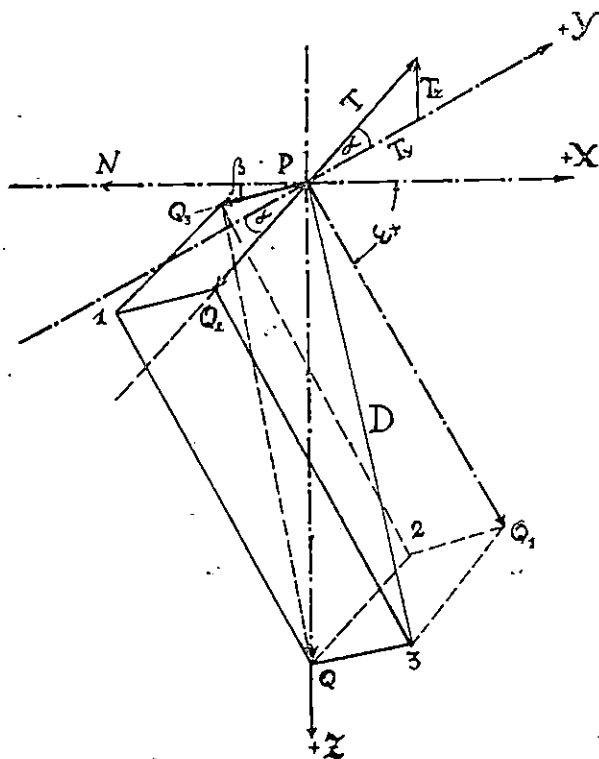
Želi li se dakle, da teško tijelo klizi u obliku cilindrične vijčanice stalnog uzdužnog nagiba, a može li se zanemariti trenje, tijelo treba da ima određenu početnu brzinu v_a u smjeru nagiba α , a podloga treba da ima osim stalnog uzdužnog nagiba α još i u radijalnom smjeru stalan poprečan nagib β , koji zavisi o početnoj brzini v_a , nagiba α , akceleraciji teže g i polumjeru kružnice r , horizontalne projekcije vijčanice. U specijalnom slučaju $\alpha = 0$, vijčanica splasne u horizontalnu kružnicu, a poprečan nagib podloge mjeri:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_a^2}{r g} \dots 3.)$$

3. Klizanje teškog tijela na podlozi sa trenjem izvedenoj u luku kružnice, stalnog nagiba. U prijašnjoj tački bilo je razloženo, da je potrebno izvesti podlogu u takovom slučaju sa poprečnim nagibom β prema horizontali. Djelovanje teže Q očituje se onda zapravo u tri smjera (slika 3). Komponenta Q_3 nastoji gibati tijelo u smjeru poprečnog nagiba β , komponenta Q_2 u smjeru uzdužnog nagiba α , dok treća komponenta Q_1 , koja djeluje u okomici na oba prva smjera, nema kinetičkog nastojanja, nego pritiskuje tijelo na podlogu. U svrhu određenja veličine ovih komponenata, uzima se koordinatni sistem XYZ sa ishodištem u povoljnoj tački P vijčanice, uzdužne osovine podloge. Vertikalna ravnina XZ ujedno je i radijalna ravnina cilindra vijčanice. Ona prolazi smjerom vektora Q i smjerom centralne osovine. Ravnina YZ je tangencijalna ravnina vijčanice. Nju određuje T tangenta vijčanice i apsolutna vertikalna u tački P . Ravnina XY je horizontalna. Ove tri ravnine stoje prema tome okomito jedna na drugoj. Odabrani koordinatni sistem je dakle pravokutan. Komponenta Q_3 , nagiba β prema horizontali, leži u ravnini XZ . Komponenta Q_2 , nagiba α prema horizontali, leži u ravnini YZ . Komponenta Q_1 djeluje u prvom oktantu, a sila Q u osovini Z . Paralelepiped, složen od tih komponenata, nije pravokutan, jer komponente Q_2 i Q_3 zatvaraju manji kut od pravoga. Stranica paralelepi-

peda Q_1 stoji ali okomito na bazama paralelepipeda, kako je bilo spomenuto već i prije. Za daljnji račun potrebno je poznavati veličine tih komponenata ili što je isto rastaviti zadanu silu Q u tri zadana smjera.

Indeksi x , y i z neka označuju projekcije na istoimenim osovinama, a ε_x , ε_y i ε_z kuteve priklona komponente Q_1 prema osovinama X , Y i Z . Onda je:



Slika 3.

$$\begin{aligned} Q_{1x} &= Q_1 \cos \varepsilon_x, & Q_{1y} &= Q_1 \cos \varepsilon_y, & Q_{1z} &= Q_1 \cos \varepsilon_z; \\ Q_{2x} &= 0, & Q_{2y} &= Q_2 \cos \alpha, & Q_{2z} &= Q_2 \sin \alpha; \\ Q_{3x} &= Q_3 \cos \beta, & Q_{3y} &= 0, & Q_{3z} &= Q_3 \sin \beta; \end{aligned}$$

pak mora biti:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_{1x} - Q_{3x} = Q_1 \cos \varepsilon_x - Q_3 \cos \beta = 0, \\ Q_y &= Q_{1y} - Q_{2y} = Q_1 \cos \varepsilon_y - Q_2 \cos \alpha = 0, \\ Q_z &= Q_{1z} + Q_{2z} + Q_{3z} = Q_1 \cos \varepsilon_z + Q_2 \sin \alpha + Q_3 \sin \beta = Q. \end{aligned}$$

Kutevi ε_x , ε_y i ε_z nijesu nego kutevi priklona ravnine PQ_2Q_3 prema osovinama XYZ . Jednadžba ravnine, koja prolazi tačkama:

$P (x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0),$

$Q_2 (x_2 = 0, y_2 = -Q_2 \cos \alpha, z_2 = Q_2 \sin \alpha) \text{ i}$

$Q_3 (x_3 = -Q_3 \cos \beta, y_3 = 0, z_3 = Q_3 \sin \beta) \text{ glasi:}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Q_2 \cos \alpha & Q_2 \sin \alpha & 1 \\ -Q_3 \cos \beta & 0 & Q_3 \sin \beta & 1 \end{vmatrix} = x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta = 0.$$

Uz daljnje oznake: $A = \cos \alpha \sin \beta$, $B = \sin \alpha \cos \beta$, $C = \cos \alpha \cos \beta$ i $A^2 + B^2 + C^2 = 1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$, kutevi priklona mjere:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_x &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{tg \beta}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}} \\ \cos \varepsilon_y &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}} \\ \cos \varepsilon_z &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}} \end{aligned} \right\} 4)$$

Uvrste li se ove vrijednosti u prijašnje jednadžbe za Q_x , Q_y i Q_z , mogu se izračunati tri nepoznanice iz njih, tražene komponente sile Q sa rezultatom:

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}}, Q_2 = \frac{Q \sqrt{1 + tg^2 \alpha} \cdot tg \alpha}{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta} \text{ i} \quad \dots 5.)$$

$$Q_3 = \frac{Q \sqrt{1 + tg^2 \beta} \cdot tg \beta}{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}.$$

Na tačku P djeluje osim teže Q još i horizontalna centripetalna sila N . I tu silu rastavljamo u tri komponente: N_3 , u smjeru poprečnog nagiba β ; N_2 , u smjeru uzdužnog nagiba α i N_1 , u smjeru okomice na prva oba smjera analogno, kao što smo rastavili silu Q (Slika 3). Sila N djeluje u ravnini XZ , a u toj ravnini leži i osovina O_3 . Može se dakle rastaviti najprije u komponente (Slika 4):

$$N_z = N \cdot tg \beta \text{ i } N'_z = \frac{N}{\cos \beta} = N \sqrt{1 + tg^2 \beta}.$$

Prva komponenta djeluje u osovini Z kao i teža Q . Može se rastaviti dakle opet u tri komponente, analogno kao i Q (isporedi jednadžbe 5):

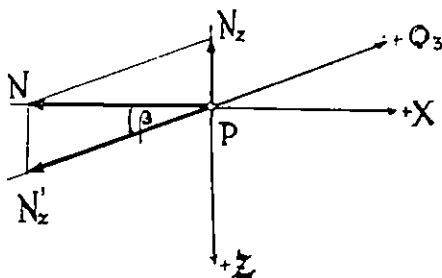
$$N_{z1} = \frac{N tg \beta}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta}}, N_{z2} = \frac{N tg \beta \sqrt{1 + tg^2 \alpha} \cdot tg \alpha}{1 + tg^2 \alpha + tg^2 \beta} \text{ i}$$

$$N_{z3} = \frac{N \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

Tražene su onda komponente:

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_{z1} &= \frac{N \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ N_2 = N_{z2} &= \frac{N \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \\ N_3 = N'_z - N_{z3} &= \frac{N \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \end{aligned} \right\} 6.)$$

U ovom slučaju priječi klizanju još i trenje. Ono je linearno proporcionalno sa silom, koja pritiskuje tijelo na pod-



Slika 4.

logu ili, što je isto, sa otporom podloge W . Označi li se koeficijent trenja sa μ , trenje iznosi μW , a djeluje u suprotnom smjeru osovine $+Q_2$ (tangente vijčanice). Otpor W djeluje pak okomito na podlogu $Q_2 Q_3$, dakle u smjeru osovine $-Q_1$. —

Na ovaj način određene su sve aktivne sile koje djeluju na tijelo u tački P i to u koordinatnom sistemu $Q_1 Q_2 Q_3$ (slika 3). Želi li se pak, da se tijelo giba u luku kružnice stalnog uzdužnog nagiba α (u luku cilindrične vijčanice), sve te sile mogu rezultirati samo horizontalnu centripetalnu silu N . U spomenutom koordinatnom sistemu moraju dakle postojati ove jednadžbe:

$$Q_1 - W + N_1 = 0; -Q_2 + \mu W - N_2 = 0; -Q_3 + N_3 = 0.$$

Obzirom na jednadžbu 5) i 6) izlazi iz treće jednadžbe:

$$N = \frac{Q \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = Q \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta, \dots \text{ i.)}$$

iz prve jednadžbe:

$$W = \frac{Q + N \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{Q \cdot \sin \alpha}{v} \quad \dots 8.]$$

ako je:

$$v = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}} \quad \dots 9.]$$

i konačno iz druge jednadžbe: $v = \mu \dots 10.)$.

Jednadžba 8.) poprima onda oblik:

$$W = Q \cdot \frac{\sin \alpha}{\mu} \quad 8a.)$$

Do istog se rezultata dolazi, ako se promatraju sile, koje djeluju na tijelo u tački P (težište tijela), u koordinatnom sistemu XYZ . U tom sistemu daju spomenute sile ove tri jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} -W_x + N &= 0, \quad -W_y + \mu W \cos \alpha = 0 \quad i \\ -W_z + Q - \mu W \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Otpor W djeluje okomito na podlogu, dakle u pravcu Q_1 . Kutovi priklona tog pravca prema osovima XYZ određeni su već jednadžbom 4.). Dakle je:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= W \cos \varepsilon_x = \frac{W \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ W_y &= W \cos \varepsilon_y = \frac{W \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ W_z &= W \cos \varepsilon_z = \frac{W}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \end{aligned} \right\} \quad \dots 11.]$$

Iz druge jednadžbe ravnoteže slijedi onda jednadžba 10.), iz treće jednadžbe ravnoteže jednadžba 8.), a iz prve, jednadžba 7.). U ovoj raspravi upotrijebit će se kod promatranja sličnog klizanja tijela, uz druga ograničenja, jedan ($Q_1 Q_2 Q_3$) ili drugi (XYZ) koordinatni sistem, već prema tome, kako koji brže vodi k cilju. Zbog toga su upotrijebljena oba sistema već u ovom slučaju i određene komponente sila, koje ulaze opetovano u račun, u jednom i u drugom koordinatnom sistemu.

Iz jednadžbi 7.), 8.), 8a.) i 9.) slijede važni podaci za dimenzioniranje putoklizine u krivulji:

I u ovom slučaju vrijedi jednadžba:

$$N = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{m v_a^2 \cos^2 \alpha}{r} \dots 12.]$$

jer nema inače gibanja u obliku cilindrične vijčanice, uz postavljena ograničenja, kako je bilo dokazano već u prijašnjim tačkama.

Iz jednadžbe 7.) i 12.) slijedi onda, uzme li se u obzir, da je $Q = mg$, ako m znači masu tijela, a g akceleraciju teže:

$$\lg \beta = \frac{v_a^2}{rg} \dots 13.]$$

Ova jednadžba određuje poprečan nagib u radijalnom smjeru putoklizine, a često je potrebna kod praktične primjene. U tu svrhu sastavljena je i priložena na kraju tablica I., u kojoj su iskazani iznosi $\frac{v^2}{g}$ za razne vrijednosti v i za vrijednost $g = 9.81$ m/sec, koja se obično uzima u račune u našim krajevima.

Isporedi li se formula 13.) i formula 3.) u prijašnjoj tački, vidi se, da su obje formule posve jednake. Teško tijelo ponaša se dakle, klizeći na vijčanici sa trenjem, kao isto takovo tijelo klizeći na horizontalnoj kružnici bez trenja. Horizontalnu kružnicu opisuje tijelo zbog početne brzine i poprečnog nagiba, bez trenja. Pojavili se trenje, od kružnice treba da nastane vijčanica, uzdužnog nagiba, velikog upravo toliko, koliko je potrebno, da se svlada trenje. Uz konstantan koeficijent trenja opisuje pak tijelo cilindričnu vijčanicu stalnog nagiba samo zbog početne brzine i zbog stalnog uzdužnog i poprečnog nagiba podloge.

Pošto je određen poprečan nagib iz formule 13. može se prijeći na izračunavanje uzdužnog nagiba α . Iz jednadžbe 9.) i 10.) slijedi naime:

$$\lg \alpha = \sqrt{(\mu \lg \beta)^2 + \left(\frac{1 + \mu^2}{2}\right)^2} - \frac{1 - \mu^2}{2} \dots 14.]$$

Tačna ova formula može se pojednostavniti za praktičnu porabu ponovnom upotrebom prvih dvaju članova binomskog stavka i svesti na oblik, izostavivši ostale članove, ako je $\lg^2 \beta$ razmjerno maleno prema jedinici:

$$\lg \alpha = \mu \left[1 + \frac{\lg^2 \beta}{2(1 + \mu^2)} \right], \quad 14a.]$$

Faktor u zagradi uvijek je veći od jedinice. Uzdužni nagib α putoklizine, izvedene u luku kružnice, treba dakle da je

uvijek veći od koeficijenta trenja μ koji vlada između tijela i podloge. Zbog toga treba udesiti uzdužni nagib prema najvećoj vrijednosti koeficijenta trenja, uz koju se još želi, da funkcioniра putoklizina. Vrijednost koeficijenta trenja zavisi o godišnjoj dobi, atmosferskim prilikama, obliku tijela, koje klizi itd. Sve se te prilike mijenjaju redovno duž cijele putoklizine istodobno. Kada je koeficijent trenja velik u krivulji, velik je i u dijelu putoklizine pred krivuljom. Čim je pak koeficijent trenja veći, s tim manja je brzina tijela, koje klizi. Zbog toga treba odrediti uzdužni nagib α putoklizine u krivulji po formuli 14.) ili 14a.), za najmanju vrijednost početne brzine v_a , uz koju se još želi da putoklizina radi.

Teoretski može biti poprečan nagib β jednak ničtici samo u pravcu, ako je početna brzina $v_a > 0$ (slijedi iz jednadžbe 13 za $r = \infty$). Onda je $\operatorname{tg} \alpha = \mu$. Praktički može nastupiti takav slučaj i u krivulji, ako je polumjer krivosti razmjerno velik prema brzini s-kojom tijelo klizi. U takovom slučaju računska vrijednost kuta β -te tako je malena, da se jedva može iskolčiti u nravi. Kriterij, za taj slučaj, izvodi se iz formula 9.) i 10.), koje su svedene u tu svrhu na oblik, s upotrebom jednadžbe 13.) i 1.):

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{v^2}{g\rho}\right)^2}{1 - \left(\mu \frac{v^2}{g\rho}\right)^2}} \quad 16.)$$

Dok je faktor sa korijenom ≥ 1 , a $\leq 1,001$ t.j. dok je $\rho \geq \frac{v^2}{\xi}$, može se staviti praktički jednak jedinici, dakle izjednačiti $\operatorname{tg} \alpha$ sa μ . Vrijednosti faktora:

$$\xi = g \sqrt{\frac{0,002}{1 + 1,002 \mu^2}} \quad 16.)$$

za $g = 9,81$ m/sec. i za obične vrijednosti koeficijenta trenja μ su ove:

μ	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30
ξ	0.437	0.436	0.434	0.433	0.432	0.430	0.428	0.427	0.425	0.423	0.420

μ	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	0.42	0.44	0.46	0.48	0.50
ξ	0.418	0.415	0.413	0.410	0.407	0.404	0.401	0.399	0.396	0.392

za vrijednosti polumjera krivosti ρ , uz koje se može već staviti $\operatorname{tg} \alpha = \mu$, sakupljene su u skrižaljci 1., za praktične vrijednosti v i μ , iskazane u istoj skrižaljci.

Skrižaljka 1.

v m/sec	μ					v m/sec	μ				
	0·10	0·20	0·30	0·40	0·50		0·10	0·20	0·30	0·40	0·50
	q^m						q^m				
2	9	9	10	10	10	22	1109	1125	1152	1188	1233
3	21	21	21	22	23	23	1212	1230	1259	1299	1348
4	37	37	38	39	41	24	1320	1339	1371	1414	1468
5	58	58	59	61	64	25	1432	1453	1487	1534	1593
6	82	84	86	88	92	26	1549	1572	1609	1660	1723
7	112	114	117	120	125	27	1670	1695	1735	1790	1858
8	147	149	152	157	163	28	1796	1823	1866	1925	1998
9	186	188	193	199	206	29	1927	1955	2001	2065	2143
10	229	232	238	245	255	30	2062	2092	2142	2209	2294
11	277	281	288	297	308	31	2202	2234	2287	2359	2449
12	330	335	343	354	367	32	2346	2381	2437	2514	2610
13	387	393	402	415	431	33	2495	2532	2592	2674	2775
14	449	456	466	481	499	34	2648	2688	2751	2838	2946
15	515	523	535	552	573	35	2806	2848	2915	3008	3122
16	586	595	609	629	652	36	2969	3013	3084	3182	3303
17	662	672	688	710	736	37	3136	3183	3258	3361	3489
18	742	753	771	795	826	38	3308	3357	3436	3545	3680
19	827	839	859	886	920	39	3485	3536	3620	3734	3876
20	916	930	952	982	1019	40	3666	3720	3786	3928	4077
21	1010	1025	1049	1083	1124						

Kod upotrebe skrižaljke 1. treba imati na umu, da između polumjera krivosti vijčanice q i polumjera trasiranja r (polumjera kružnice, horizontalne projekcije vijčanice) postoji veza označena jednačžbom 1. —

Svede li se jednačžba 9.) i 10.) na oblik:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2}}{\mu \cos \alpha} \quad \dots 17.]$$

izlazi interesantna veza između poprečnog nagiba β i koeficijenta trenja μ . Uzdužni nagib α određen je minimalnom početnom brzinom $v_{\min.}$, uz koju se želi, da radi još putoklizina. Taj je nagib u konkretnom slučaju zadan, konstantan, kao i odgovarajući najveći koeficijent trenja $\mu_{\max.}$ Biva li koeficijent trenja sve manji, s tokom vremena bilo s kojeg raz-

loga, mijenja se i nagib β . Želi li se dakle, da putoklizina fuunkcionira u obliku luka kružnice, konstantnog nagiba α , i za manje vrijednosti koeficijenta trenja od vrijednosti $\mu_{\max}$. — veća vrijednost je isključena, jer ne odgovara više uzdužni nagib α — putoklizina treba da imade u poprečnom (radijalnom) smjeru promjenljiv nagib. Izjednači li se još dalje jednadžba 13.) i 17.) izlazi:

$$v_a^2 = rg \operatorname{tg} \beta = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1}, \quad \dots 18.]$$

gdje je
$$k = \frac{rg}{\cos \alpha} \quad 19.]$$

kod jedne te iste putoklazine konstanta. Zbog toga se i pridaje faktoru k naziv: konstanta putoklazine. Iz jednadžbe 18.) izlazi daljnje interesantno pravilo: Mijenja li se koeficijent trenja na gotovoj putoklizinu, izvedenoj u luku kružnice stalnog uzdužnog nagiba α , a promjenljivog poprečnog nagiba β , svakoj promjeni vrijednosti koeficijenta trenja μ odgovara samo jedna, posve određena vrijednost početne brzine v_a . — Ako je

$$k = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1} \text{ t. j., ako je } \mu_k = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{r^2 g^2 + \cos^2 \alpha}} \quad 20.]$$

ili, jer se može zanemariti drugi član prema prvome u nazivniku, ako je dakle: $\mu_k = \frac{\sin \alpha}{rg}$, ... 21.] onda je konstanta putoklazine k jednaka početnoj brzini v_{ah} . Ta konstanta označuje dakle početnu brzinu tijela, koje klizi uz vrijednost koeficijenta trenja μ_k prema gornjoj jednadžbi. Poprečan nagib mjeri u tom slučaju:

$$\operatorname{tg} \beta_k = \frac{k}{\cos \alpha} = \frac{rg}{\cos^2 \alpha} \quad 22.]$$

Prvom uvjetu: putoklizina treba da ima promjenljiv nagib u poprečnom smjeru, može se udovoljiti na taj način, da se profil podloge zaobli poput užljebine. Drugom uvjetu: da početna brzina v_a zadovoljuje jednadžbu 18.) za svaku vrijednost koeficijenta trenja μ u određenom intervalu, praktički nemože se udovoljiti. Brzina v_a na početku krivulje ujedno je i brzina tijela na kraju pravca pred krivuljom. Koeficijent trenja μ mijenja se u pravcu i u krivulji, redovno zbog istih utjecaja istodobno. Udesi li se pravac i krivulja tako, da brzina v_a zadovoljava jednadžbu 18.) na početku krivulje i jednadžbu brzine na kraju pravca za određenu vrijednost koefi-

cijenta trenja $\mu = \mu'$, neće zadovoljavati ta brzina iste te jednadžbe za svaku drugu vrijednost $\mu \leq \mu'$, jer tijelo klizi u pravcu po jednom zakonu, a u krivulji po drugom zakonu. Zado- voljava li početna brzina jednadžbu 18.) tijelo opisuje luk kružnice stalnog uzdužnog nagiba i giba se jednolično zbog poprečnog nagiba podloge i te početne brzine. Ne zado- voljava li početna brzina tu jednadžbu, tijelo će opisat luk kružnice stalnog nagiba samo u slučaju, ako bude prisi- ljeno na to. Kako se to postizava, a kako se mijenja brzina tijela pri tom, o tome se raspravlja u tački 8. —

4. Poprečan profil putoklizine u krivulji izveden u obliku užljebine. U prijašnjoj tački bilo je obrazloženo, putoklizina stalnog uzdužnog nagiba, savita u luk kružnice, treba da ima promjenljiv poprečan nagib t. j. podlogu zaobljenog profila, ako se želi da funkcijonira za razne vrijednosti koeficijenta trenja u određenom intervalu. Zbog toga izvodi se putokli- zina i u obliku užljebine u krivulji uopće, napose pak u slu- čaju, ako je horizontalna projekcija te krivulje kružnica, kako se pretpostavlja u ovoj tački. Uz takav profil opisuje tijelo kruž- nicu u horizontalnoj projekciji, već prema vrijednosti koefi- cijenta trenja, različitog polumjera u razno doba. Širina užlje- bine malena je redovno prema polumjeru krivosti. Zbog toga može se uzeti, da su polumjeri svih kružnica jednako veliki unutar užljebine. Može se dakle izjednačiti njihova veličina sa veličinom polumjera krivosti osovine putoklizine, bez uštrba na tačnost računa. Smatra li se nadalje μ kao neovisna promjenljivica, preostaje za određivanje oblika poprečnog profila putoklizine samo jednadžba 17.). Ova pak potsjeća na jednadžbu trigonometrijske tangente geometrijske tangente evolute elipse. Između elipse (evolvente):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots 23.) \text{ i njezine evolute:}$$

$$\left(\frac{a\xi}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \dots 24.)$$

postoji naime snošaj: $y' \cdot \eta' = -1$, t. j. normala evolvente ujedno je i tangenta evolute. Ako je dakle:

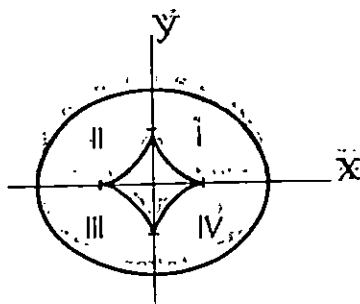
$$y' = - \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{onda je}$$

$$\eta' = - \frac{1}{y'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

a stavi li se u posljednjoj jednadžbi $a = tg\alpha$, $x = \mu \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$,
 $b = a \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$ i $e^2 = a^2 - b^2 = tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$, izlazi:

$$\eta' = \frac{\sqrt{tg^2\alpha - \mu^2}}{\mu \cos\alpha} = tg\beta. \quad 25.]$$

T. j. poprečan profil putoklizine stalnog uzdužnog nagiba: savite u luk kružnice, a promjenljivog poprečnog nagiba, imade doista oblik evolute elipse (slika 5).



Slika 5.

Derivirajući jednadžbu 24.) daje jednadžbu:

$$\eta' = -\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/3} \quad 26.]$$

Evoluta elipse imade četiri grane. U ovom slučaju dolazi u obzir samo grana evolute u drugom kvadrantu, jer je kod putoklizine $\eta' = tg\beta$ uvijek pozitivno. Odustane li se dakle od negativnog predznaka, posljednja i jednadžba 25.) daju jednadžbu:

$$\eta = \frac{\xi}{\cos\alpha} \left[\left(\frac{tg\alpha}{\mu}\right)^2 - 1 \right]^{3/2} \quad 27.]$$

Uvrsti li se ova u jednadžbu 24.) izlazi nakon sredenja:

$$\xi = \mu^3 \cos^2\alpha \dots 28.) \text{ i konačno iz jednadžbe 27.)}$$

$$\eta = (tg^2\alpha - \mu^2)^{3/2} \cos\alpha \dots 29.)$$

Posljednje dvije jednadžbe utvrđuju samo oblik poprečnog profila. Mjerilo, u kojem treba izvesti taj profil, određuje horizontalna projekcija širine puta d , zatim granične vrijednosti puta β -te, ili, što je isto, granične vrijednosti koeficijenta trenja μ određenog intervala (slika 6).

Ako je:

μ_1 koeficijent trenja, koji vlada u vrijeme, kada tijelo klizi uz gornji žljeb užljebine, a

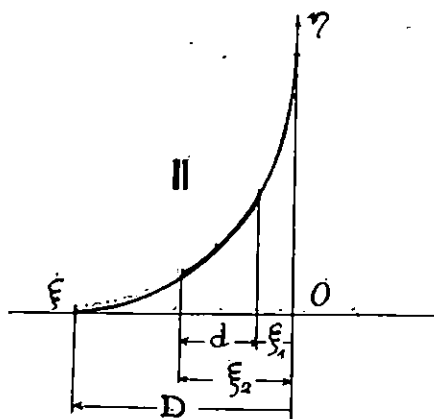
μ_2 koeficijent trenja u vrijeme, kada tijelo opisuje put uz donji rub užljebine, onda treba da je diferencija:

$$\xi_2 - \xi_1 = (\mu_2^3 - \mu_1^3) \cos^2 \alpha$$

jednaka horizontalnoj projekciji stvarne širine puta d . Slo-mak:

$$\frac{d}{(\mu_2^3 - \mu_1^3) \cos^2 \alpha}$$

je pak broj, kojim valja umnožiti apscise i ordinate evolute predočene jednadžbama 28.) i 29.), da se pronađu opscise i ordi-



Slika 6.

nate stvarnog poprečnog profila putoklizine. Putu najveće brzine, na gornjem rubu užljebine, pripada najmanja vrijednost koeficijenta trenja u određenom intervalu. Dakle je $\mu_1 = \mu_{\min}$. Putu najmanje brzine, na donjem rubu užljebine, pripada najveća takova vrijednost. Dakle je $\mu_2 = \mu_{\max}$.

Uistinu mjere koordinate poprečnog profila:

$$\xi = \frac{\mu^2}{\mu_{\max}^3 - \mu_{\min}^3} \cdot d; \quad \eta = \frac{(l\bar{g}^a - \mu^2)^{3/2}}{(\mu_{\max}^3 - \mu_{\min}^3)} \cdot \frac{d}{\cos \alpha} \quad 30.]$$

S pomoću ovih jednadžbi može se konstruirati poprečan profil sa povoljnom tačnošću, t. j. odrediti koordinate povoljnobrojnih tačaka profila. Praktički će dostajati odrediti tačke rubova i sredine profila i ucrtati krivulju poprečnog profila uz tangente u tim tačkama zgodnom šablonom.

S ovim razlaganjem ne misli se reći, da je evoluta elipse, izražena jednadžbama 28.) i 29.) jedini oblik užljebine, poprečnog profila putoklizine. Pretpostavilo se, da je μ ne-

ovisna promjenljivica. Napusti li se ova pretpostavka i učini μ ovisnim na pr. o položaju prema osovini putoklazine, t. j. odredi li se, da μ poprima određenu vrijednost u određenoj udaljenosti od te osovine, oblik poprečnog profila bit će neka deformirana evoluta; jer svaka i na taj način definirana vrijednost μ mora zadovoljiti jednadžbu 17.) Nagib tangente profila užljebine treba da poprima sve vrijednosti poprečnog nagiba β u određenom intervalu od $\mu_{\min.}$ do $\mu_{\max.}$ Vrijednost $tg\beta$ lako se odredi iz jednadžbe 17). No koordinate odgovarajuće tačke krivulje nijesu određene ni u čemu inače pobliže. Upravo ta neodređenost bila je povod, da se je pošlo najlagodnijim putem t. j. smatralo μ nezavisnom promjenljivicom i odredila krivulja oblika, koja zadovoljava jednadžbu 17) na najjednostavniji način.

U općenitom slučaju klizanja u užljebini, vidiet će se poslije, poprečan nagib $tg\beta$ ne zadovoljuje jednadžbu 17.) nego jednadžbu: $tg\beta = \frac{\sqrt{tg^2\alpha - v^2}}{v \cos\alpha}$ koja slijedi iz formule 9. Kod putoklazine stalnog uzdužnog nagiba, savite u luk kružnice, naročito ne onda, kada početna brzina ne zadovoljuje jednadžbu 18.). Nema nikakvog razloga, zbog kojeg se nebi izveo poprečan profil užljebine u obliku evolute elipse i u takovom slučaju. Naprotiv. Na taj način postići će se jednodušnost računa i oblika, a užljebina, konstruirana prema tome, valjat će i u slučaju, kada početna brzina zadovoljuje jednadžbu 18.). Općenito slijedi onda iz jednadžbe 25.) i 26.)

$$tg\beta = \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/3} \quad 31.$$

ili nakon supstitucije vrijednosti za a i b :

$$\eta = \xi \cdot \cos^2\alpha \cdot tg^3\beta \quad 32.)$$

Uvrste li se u jednadžbu 24.) vrijednosti za a , b e isto tako, ona poprima oblik:

$$\left[\frac{\xi}{tg\alpha \cdot \sin^2\alpha} \right]^{2/3} + \left[\frac{\eta}{tg^2\alpha \cdot \sin\alpha} \right]^{2/3} = 1 \quad 33.$$

a predočuje evolutu elipse. Nadalje slijedi iz jednadžbi 9.), 32.) i 33.):

$$\xi = v^3 \cos^2\alpha \quad 34.)$$

a ova vrijednost uvrštena u jednadžbu 32.), daje jednadžbu-

$$\eta = (tg^2\alpha - v^2)^{3/2} \cos\alpha \quad 35.)$$

U specijalnom slučaju $v = \mu$ posljednje su dvije jednadžbe identična sa jednažbami 28.) i 29.).

Označuje li d horizontalnu širinu puta kao i prije, $v_{\min}$ putu najveće brzine odgovarajući najmanji koeficijent nagiba, a $v_{\max}$ putu najmanje brzine odgovarajući najveći koeficijent nagiba, koordinate poprečnog profila analognog su kao i prije:

$$\eta = \frac{v^3}{v_{\max}^3 - v_{\min}^3} \cdot d ; \eta = \frac{(tg\alpha^2 - v^2)^{3/2}}{v_{\max}^3 - v_{\min}^3} \cdot \frac{d}{\cos\alpha} \dots \quad 36.]$$

5. Klizanje teškog tijela na podlozi uzdužnog nagiba α , poprečnog nagiba β , savitaj u luk povoljne prostorne krivulje uz djelovanje horizontalne centripetalne sile. Koeficijent nagiba. U prijašnjim tačkama bilo je raspravljeno klizanje teškog tijela na putu konstantnog uzdužnog nagiba α , koji pokazuje kružnicu u horizontalnoj projekciji. U ovoj tački ne čini se nikakovo ograničenje obzirom na oblik horizontalne projekcije puta, (a isto tako niti obzirom na zakon, po kojemu se ravna uzdužni nagib α . Oblik je dakle putanje tijela u prostoru povoljan). Ograničuje se samo smjer centripetalne sile. Taj neka bude stalno horizontalan. Kod praktične provedbe isključuje se uvijek horizontalna projekcija osovine putoklizine. Ako je osovina na pr. cilindrična vijčanica, isključuje se kružnica, horizontalna njezina projekcija. I u ovoj se tački misli uvijek na oblik krivulje, koga poprma horizontalna projekcija osovine putoklizine ili putanje tijela. Kao što se izvodi vijčanica iz horizontalne projekcije kružnice, koja služi kao baza plaštu vertikalnog cilindra, na kojemu klizi teško tijelo pod određenim nagibom α , tako se i ovoj tački misli, govoreći o krivulji, na horizontalnu projekciju puta, koja služi kao baza vertikalnom plaštu, na kojemu klizi teško tijelo pod povoljnim nagibom α prema horizontali. Smjer centripetalne sile je onda horizontalan u drugom slučaju analognog kao i u prvom. Uz ovu pretpostavku djeluju na teško tijelo, u povoljnoj tački P putanje, aktivne sile: vlastita težina Q , otpor podloge W i trenje μW . K ovim stvarnim silama dodaju se još pomoćne sile tromosti, protivnog smjera: tangencijalna sila T i centrifugalna sila N po D'Alambertu tako, da tijelo bude uravnoteženo. Na taj način dobiju se tri jednačbe u koordinatnom sistemu $Q_1Q_2Q_3$ (isporedi sliku 3):

$$\begin{aligned} Q_1 - W + N_1 &= 0, & -Q_2 + \mu W - N_2 + T &= 0 & i \\ & & -Q_3 + N_3 &= 0 \end{aligned}$$

iz kojih su pronađene tri nepoznanice: W , N i T s upotrebom jednačbi 5.) i 6) na slijedeći način:

Iz treće jednačbe:

$$N = \frac{Q \, tg \, \beta}{1 + tg^2 \alpha} = Q \cos^2 \alpha \, tg \, \beta \quad 37.]$$

Iz prve jednadžbe:

$$W = \frac{Q + N \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} = Q \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{Q \sin \alpha}{v} \dots 38.]$$

Koeficijent nagiba v određen je jednadžbom 9.)

Konačno iz druge jednadžbe:

$$T = Q \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin \alpha \quad 39.]$$

U koordinatnom sistemu XYZ glase te jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} -W_x + N &= 0, & -W_y + \mu W \cos \alpha + T \cos \alpha &= 0 \quad \text{i} \\ -W_z + Q - \mu W \sin \alpha - T \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

S upotrebom jednadžbi 11.) dovode do istoga rješenja za N , W i T kao i one prve tri.

Iskorišćujući ove rezultate izlazi najprije iz jednadžbe 37.), ako se uzme u obzir, da je $N = \frac{mv^2}{r}$, potreban poprečan nagib klizine:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v^2}{g r \cos^2 \alpha} = \frac{v^2}{gr} \quad 40.]$$

gdje r označuje polumjer krivosti horizontalne projekcije putanje tijela (isporedi jednadžbe 1). Nadalje slijedi iz jednadžbe 39.), da je tangencijalna sila T jednaka ničici u onoj tački krivulje u kojoj je $v = \mu$. Treba li dakle da imade krivulja konstantan uzdužan nagib α , može se odrediti, ako je poznata bar jedna tačka krivulje, u kojoj je tangencijalna sila jednaka ničici iz jednadžbe $v = \mu$. Za tu tačku vrijede formule 14.) ili 14a.) izvedene u tački 3.).

Akceleracija u povoljnoj tački P putanje tijela najzgodnije se promatra u koordinatnom sistemu XYZ. Komponente centripetalne sile N u tom su koordinatnom sistemu:

$$N_x = N, \quad N_y = 0, \quad N_z = 0$$

a komponente akceleracije zbog te sile (iz jednadžbe 37.):

$$a_{nx} = g \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad a_{ny} = 0 \quad \text{i} \quad a_{nz} = 0.$$

Komponente tangencijalne sile T su:

$$T_x = 0, \quad T_y = T \cdot \cos \alpha \quad \text{i} \quad T_z = T \cdot \sin \alpha$$

a komponente akceleracije zbog te sile (iz jednadžbe 39.):

$$a_{tx} = 0, \quad a_{ty} = g \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{i} \quad a_{tz} = g \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin^2 \alpha$$

Komponente ukupne akceleracije su dakle:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{nx} = g \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \\ a_y &= a_{ty} = g \left(1 - \frac{\mu}{\nu} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ a_z &= a_{tz} = g \left(1 - \frac{\mu}{\nu} \right) \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} 41.]$$

Akceleracija u smjeru centripetalne sile N mjeri:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = g \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad 42.]$$

a u smjeru tangente T :

$$a_t = g \left(1 - \frac{\mu}{\nu} \right) \sin \alpha. \quad 43.]$$

Kod specijalne primjene ovih općenitih formula može se odabrati povoljna krivulja u prostoru kao putanja tijela. Ipak će se moći upotrebiti krivulje tek jednostavnijih oblika, koje ne zadaju poteškoća skopčanih sa iskolčenjem u naravi i sa građevno-konstruktivnim uređajem podloge, a pogoduju inače pravilnom klizanju tijela. Takove se krivulje čunjo-sječice u prvome redu. Glede uzdužnog nagiba α primjećuje se, da se uzima u račun uvijek kao konstanta u ovoj raspravi. Njegova promjenljivost komplicira račun bez koristi, koja bi se mogla izbiti i obzirom na lagodno klizanje tijela i obzirom na građevno-konstruktivni uređaj putoklizine. Putoklizina, sa promjenljivim uzdužnim nagibom nije se u ostalom nikada ni gradila u krivulji. U ovoj se tački promatraju samo dva već poznata specijalna slučaja putanje tijela, dok su ostali specijalni slučajevi obrađeni u drugom dijelu ove rasprave.

1. Neka je centripetalna sila jednaka niti. Onda je akceleracija te sile $a_n = 0$, a jer je $g \cos^2 \alpha \leq 0$, slijedi iz jednadžbe 42.) $\operatorname{tg} \beta = 0$, iz jednadžbe 9.) $\nu = \operatorname{tg} \alpha$, a iz jednadžbe 43.):

$$a_t = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \dots \quad 43a.)$$

Horizontalna projekcija puta je dakle pravac. Ako je naime još i uzdužni nagib α konstantan, gornja jednadžba predoduje poznatu jednadžbu okceleracije tijela na kosini, koja se upotrebljava i kod putoklizine, izvedene u pravce. Sada se može još tačnije odrediti na koje se prostorne krivulje protežu formule izvedene u ovoj tački. Pretpostavka: smjer centripetalne sile neka je horizontalan ($N_x = N$, $N_y = 0$, $N_z = 0$; isporodi jednadžbe ravnoteže u koordinatnom sistemu XYZ) uključuje naime u sebi i pretpostavku, da je uzdužan nagib α konstantan. Kad bi bio promjenljiv, horizontalna projekcija

putanje tijela bila bi doduše pravac u ovom specijalnom slučaju, no ne bi bila pravac u vertikalnoj projekciji, nego krivulja oblika, zavisnog o promjenljivom nagibu α . U tom slučaju bila bi doduše komponenta centripetalne sile $N_x = 0$, no komponente N_y i N_z razlikovale bi se od ničice, a to bi se protivilo pretpostavci. Nasuprot komponente N_y i N_z u svakom su slučaju jednake, ničici, u skladu sa pretpostavkom, ako je uzdužni nagib α konstantan. U ovoj tački izvedene formule protežu se dakle na prostornu krivulju povoljnog oblika, ali konstantnog uzdužnog nagiba α .

Ovdje je zgodna da se povuče paralela između klizanja na putoklizini u pravcu i između klizanja na putoklizini u krivulji.

Pokazuje li putoklizina u horizontalnoj projekciji pravac, mjeri sila, koja pokreće tijelo:

$$T = Q \sin \alpha - \mu W, \quad 44.)$$

gdje $W = Q \cos \alpha$ znači otpor podloge. U krivulji formula tangencijalne sile, koja pokreće tijelo, imade isti oblik, razlikuje se samo po otporu podloge, koji mjeri u krivulji: $W = Q \frac{\sin \alpha}{v}$

(isporedi formulu 39.). Koeficijent trenja definiran je poznatom jednadžbom $\mu = \frac{0}{W}$; W označuje normalan pritisak tijela

na podlogu, a 0 otpor trenja, silu, koja koči tijelo u klizanju. Taj isti koeficijent trenja može se definirati i sa nagibom kosine α_0 , uz koji klizi tijelo jednolično. U tom je slučaju akceleracija $a_1 = 0$, a iz jednadžbe 43a.) slijedi onda poznata jednadžba $\mu = \tan \alpha_0$, koja određuje koeficijent trenja na kosini u pravcu.

Definira li se koeficijent trenja u krivulji na jednaki način izlazi iz jednadžbe 43.), za $a_1 = 0$:

$$\mu = \mu_0 = \tan \alpha_1 \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha_1}{1 + \tan^2 \alpha_1 + \tan^2 \beta_1}} \quad 45.) \quad [\text{usporedi formulu 9},$$

jer tijelo se giba jednolično na putoklizini i u krivulji, ako je tangencijalna akceleracija jednaka ničici. Taj pak slučaj nastupa u času, kada funkcija v poprima vrijednost koeficijenta trenja μ . Koeficijent trenja može se dakle definirati jednako u krivulji kao i u pravcu kao funkcija nagiba podloge, uz koji klizi tijelo jednolično. Dok je trenje funkcija samo jednog nagiba α_0 na kosini u pravcu, na kosini u krivulji ono je funkcija dva nagiba: uzdužnog α_1 i poprečnog β_1 .

Jednadžba 9.) je dakle matematski oblik, kojim je izražen nagib kosine općenitije. Ona vrijedi jednako za putoklizinu izvedenu u obliku krivulje, kao i za putoklizinu u pravcu.

U pravcu je zbog pomanjkanja centripetalne sile $tg\beta = 0$. Uz ovu vrijednost izlazi iz jednadžbe 9.) $v = tga$, matematska formula, s kojom je izražen nagib kosine samo u pravcu. Zbog toga može se s pravom nazvati v : »koeficijent nagiba putoklizine« ili u kratko: »nagib putoklizine«.

Oba nagiba α i β , ili barem jedan od njih, mijenjaju se od tačke do tačke na putoklizini u krivulji u općenitom slučaju gibanja. Redovno će se naći barem jedna tačka u kojoj će ti nagibi zadovoljiti jednadžbu 45.). Na putoklizini u pravcu mijenja se eventualno samo nagib α . I tu će se naći tačka, u kojoj će biti $tga_0 = \mu$. Može se dakle reći općenito:

U tački putoklizine u kojoj je koeficijent nagiba v jednak koeficijentu trenja μ , akceleracija u smjeru gibanja (tangente) jednaka je ničiti. I dalje: na putoklizini konstantnog nagiba $v = \mu$ tijelo klizi jednolično.

Ako se je reklo: koeficijent trenja μ isti je u pravcu i u krivulji, a može se definirati sa nagibom jednako u krivulji kao i u pravcu, nije se mislilo reći s time, da je sila trenja u krivulji jednako velika. Kočna sila označena je jednako sa produktom $\mu \cdot W$ u pravcu i u krivulji. Dok je W funkcija samo težine tijela Q i nagiba kosine α u pravcu, u krivulji je W , a onda i sila trenja osim toga još i funkcija nagiba β , dakle i funkcija brzine tijela i polumjera krivosti, o kojim zavisi taj nagib.

Koeficijent trenja gibanja određuje se redovno nezavisno od radiusa krivosti i brzine, kojom tijelo klizi, empiričkim putem. Tako pronađene vrijednosti, strogo uzevši, nijesu tačne, napose ne za malene vrijednosti polumjera krivosti, za vrlo velike, ili za vrlo malene brzine i u pravcu. Vrijede za srednje prilike. Postoji li dakle razlika između koeficijenta trenja u pravcu i u krivulji, ta se može odrediti samo empiričkim putem na pr. iz ovdje izvedene formule 45.), a nipošto ne računskim putem, kako je bilo već pokušano u stručnoj šumarskoj literaturi. O toj razlici ne vodi se međutim račun u ovoj raspravi. I to zbog toga ne, što se ispituje sposobnost rada putoklizine u većem intervalu vrijednosti koeficijenta trenja, kako je već bilo obrazloženo. Male diferencije ne mogu biti dakle od značenja.

2. Putoklizina udešena je u krivulji tako, da se tijelo giba jednolično. Koeficijent nagiba mora biti dakle stalno jednak koeficijentu trenja: $v = \mu$, a tangencijalna sila jednaka ničiti. Brzina treba da je konstantna prema pretpostavci i jednaka početnoj brzini: $v = v_a$. Iz jednadžbe 40.) izlazi onda:

$$v_a^2 = g_0 \cos^2 \alpha \cdot tg\beta.$$

Uvrstili se još iz jednadžbe 9.) za $\nu = \mu$ vrijednost:

$$\cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta = \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1},$$

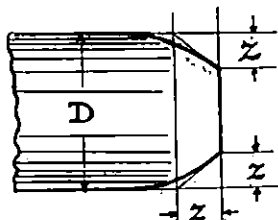
i uzme li se u obzir, da je polumjer krivosti horizontalne projekcije puta $r = \rho \cos^2 \alpha$, izlazi:

$$\nu a^2 = \frac{gr}{\cos \alpha} \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1} = f(r, \alpha).$$

Mijenja li se uzdužni nagib α bilo po kojem zakonu, mora se mijenjati i polumjer krivosti r od tačke do tačke tako, da bude desna strana jednadžbe, funkcija obih promjenljivica α i r , stalno jednaka konstanti νa^2 .

Naprotiv, jer je uzdužni nagib konstantan, polumjer krivosti r mora biti također konstanta. Posljednja jednadžba poprima onda oblik jednadžbe 18.), t.j. tijelo klizi u obliku cilindrične vijčaničice, gibanje, koje je već bilo raspravljeno u tački 3.)

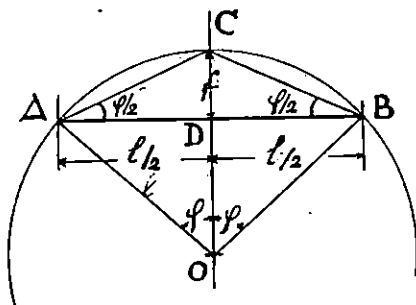
6. O minimalnom polumjeru krivosti putoklizine. Drvo se otpušta okrenuto sa debljim krajem niz kosinu. Deblji kraj izrađen je u tu svrhu na poseban način, da drvo lakše svlada manje zapreke i klizeći ne ozlijedi podlogu. Po Miklitzu može se postignuti to na tri načina: da se deblji kraj zarubi, da se izradi u obliku šiljka, čunjatog ili paraboloidnog oblika. Zarub oduzima najmanje od dužine drveta, iznosi nekoliko centimetara. Za šiljak jednog ili drugog oblika potrebna je dužina od nekoliko decimetara. Miklitz kaže, da zarub ne dostaje, a preporuča šiljak i to onaj paraboloidnog oblika, ako se želi,



Slika 7.

da drvo klizi glatko. Dr. Glatz govori samo o zarubu, koji treba da je širok $z = \frac{1}{3} \approx \frac{1}{4} D$, a isto toliko i dug, ako D označuje promjer debljeg kraja drveta (slika 7.). U svakom dakle slučaju odstranjeni su oštri bridovi na debljem kraju drveta, određenog za otpremu. U jednom slučaju više, u drugom manje. Što više to bolje, kako će se vidjeti iz daljnjeg razlaganja. Po Dr. Glatzu opisani zarub manji je od parabolo-

idnog šiljka, preporučenog po Miklitzu. Za podlogu računa upotrebljeni su zbog toga podaci po prvome, a izvedeni rezultati na temelju tih podataka vrijede naravno s tim više za drvo provideno šiljkom paraboloidnog ili čunjatog oblika po Miklitzu. Drvo je dakle, po Dr. Glatzu, redovno zarubljeno na kraju pod kutem od 45° . Osim toga potrebno je na taj način



Slika 8.

ublaženi brid još i zaobliti, da se postigne blagi i postojani prelaz od suženog do punog promjera debla (sl. 7.). Uzme li se u račun srednja vrijednost (jedna sedmina promjera) širina zaruba z mjeri za razne vrijednosti promjera D , kako slijedi:

D	7	14	21	28	35	42	49	56	cm
z	1	2	3	4	5	6	7	8	cm

Drvo treba da klizi dirajući podlogu na što većoj površini. Putoklizina providena je redovno poprečnim nagibom u krivulji. Zbog toga ne leže tačke A , B i C u istoj relativnoj visini sa tačkom D (slika 8). Želi li se dakle, da drvo leži sa što većom dužinom na podlozi, mora se ograničiti ova diferencija u visini što više. Na oba kraja zarubljeno drvo priljubiti će se dovoljno uz podlogu užljebine, ako ta visinska razlika nije velika ili prisloniti se na braniče švarcvaldskog profila, ako širina zaruba nije premalena. U posljednjem slučaju providena je putoklizina osim braniča još i sa pragovima. Drvo klizi redovno na njima i prelazi sa jednog na drugi u tačkama, koje ne leže u istoj relativnoj visini. Taj je prelaz moguć jedino s pomoću zaruba visokog barem toliko, koliko iznosi relativna visinska razlika tačaka, u kojima prelazi drvo sa jednog praga na drugi. Razmak pragova je različit. Zavisi o polumjeru krivosti, nagibu i karakteru podloge. Svakako spomenuta visinska razlika tačaka, u kojima prelazi drvo sa jednog praga na drugi, ne može biti veća od relativne visinske razlike tačaka D i B (sl. 8), jer se na toj dužini nalazi redovno više od dva praga. Sigurno se dakle postupa jednako kod užljebine kao i kod švarzwaldskog profila, ako se kaže, relativna vi-

sinjska razlika tačke D i B ne može biti veća od visine zaruba z . Na temelju ovdje iskazanih vrijednosti za z , a uzevši u obzir, da se rijetko otprema drvo slabijega promjera od 20 cm, ograničuje se ta visinska razlika sa $z=3$ cm. Ako je drvo zarubljeno jače, a to je u većini slučajeva, to bolje. Drvo zarubljeno sa manje od 3 cm nevalja otpremati putoklizinom.

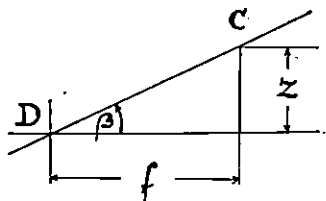
Visina strijelice f luka ACB dovoljno je tačno izražena poznatom formulom strijelice luka parabole, parametra r :

$$f = \frac{l^2}{8r} \quad 46.)$$

ako l označuje dužinu drveta, koje se otprema.

Kod putoklazine malenog ili nikakvog poprečnog nagiba, naročito kod švarcvaldskog profila, dostajat će ova formula za određenje minimalnog polumjera trasiranja. U tom naime nerijetkom slučaju leže tačke A , B i D u istoj relativnoj visini, a minimalnu vrijednost polumjera trasiranja mjerodavna je samo širina putoklazine, dakle visina strijelice f . Za praktičnu porabu sastavljena je zbog toga i priložena na kraju tablica II, iz koje se može prosuditi minimalna vrijednost polumjera, trasiranja ako je određena visina strijelice f , a poznata dužina drveta l , koji će se otpremati.

Ne može li se zanemariti poprečan nagib, naročito kod užljebine, mora se uzeti u obzir utjecaj tog nagiba na minimalnu vrijednost polumjera trasiranja i to na ovaj način:



Slika 8a.

U malenom razmaku CD neka je β prosječna vrijednost poprečnog nagiba (sl 8 i 8a). Onda je:

$$f = \frac{z}{\operatorname{tg} \beta} \quad 47.)$$

a obje posljednje jednadžbe izjednačene, daju jednadžbu:

$$r \geq \frac{l^2}{8z} \operatorname{tg} \beta$$

Uzme li se još u obzir jednađba 40.) izlazi minimalna vrijednost za polumjer trasiranja:

$$r \geq \frac{vl}{\sqrt{8zg}} \quad 48.]$$

a za visinu strijelice (iz jednađbe 46 i 48):

$$f \leq \frac{l}{v} \sqrt{\frac{zg}{8}} \quad 49.]$$

Iz posljednjih dviju jednađbi može se odrediti minimalna vrijednost polumjera trasiranja u konkretnom slučaju neposredno. Obje formule dolaze u obzir zbog toga, što je visina strijelice ograničena širinom putoklizine. Minimalnu vrijednost r treba odrediti tako, da zadovoljava ne samo jednađbu 48.) nego treba da odgovara i visina strijelice širini putoklizine, uz tako određenu vrijednost r . Na pr. za $v=5$ mpec, $l=20$ m, $z=3$ cm izlazi iz jednađbe 48.) $r=65$ m, a iz jednađbe 49.) $f=0'77$ m. Može li iznositi f samo $0'38$ m obzirom na unaprijed određenu širinu puta, potreban je veći polumjer trasiranja, od cca 130 m (iz jedn. 46.). Potrebno je dakle ispitati obje vrijednosti u konkretnom slučaju.

Taj se račun može prištediti porabom tablice III i IV, koje su priložene na kraju rasprave. Kod praktične primjene dovoljno se tačno postupa, ako se uzme u račun z sa $0'03$ m, a g sa $9'81$ mpec, kako je bilo obrazloženo prije. Posljednje dvije formule poprimaju onda oblik:

$$r \geq 0'65 lv \dots \quad 48a.) \quad f \leq 0'192 \frac{l}{v} \dots \quad 49a.)$$

Po ovim formulama izračunate su i iskazane vrijednosti f i r u tablici III i IV za običajne vrijednosti v i l , u metrima. U tablicama ucrtane stepenične linije imaju ovo značenje. Uzme li se u obzir, da sredina drveta klizi još u osovini putoklizine, zatim da prostor koga zaprema polovica debljine drveta mjeri cca $0'20$ m., onda može iznositi f kod:

0'80 m. široke putoklizine najviše	0'20 m., kod
1,20	0'40 .. a kod
2,00	0'60 ..

Prema tomu mogu se upotrijebiti vrijednosti polumjera krivosti, iskazane u tablici IV ispod prve stepenične linije, računajući odozgo prema dolje, na putoklizinu $2'0$ m širokoj, ispod druge stepenične linije na putoklizinu $1,20$ m širokoj, a ispod treće stepenične linije na putoklizinu $0'80$ m širokoj. Krupno štampani iznosi, ispod prve stepenične linije, jesu mi-

nimalne vrijednosti radiusa trasiranja za putoklizinu 2,0 m. široku, ispod druge stepenične linije za putoklizinu 1,20 m. široku, a ispod treće za putoklizinu 0,80 m. široku, ako je brzina, kojom tijelo klizi, jednaka ili manja od brzine, koja pripada tim krupno štampanim vrijednostima. Kod većih brzina od ovih treba upotrijebiti veću vrijednost polumjera krivosti od krupno štampane, već prema iznosu brzine, u odgovarajućem stupcu l .

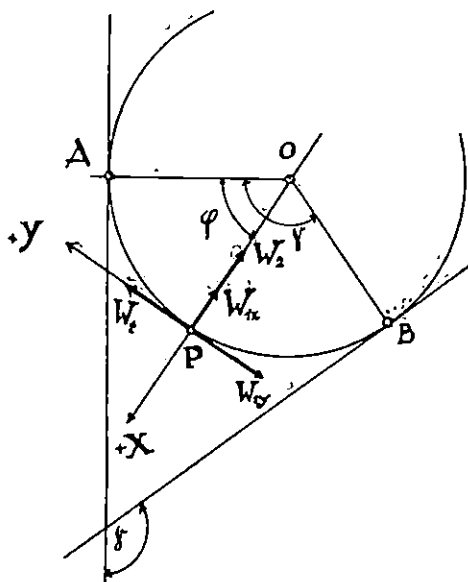
Za određenje minimalne vrijednosti polumjera trasiranja mjerodavna je maksimalna brzina kod užljebine (Rinnenprofil), a minimalna brzina kod švarzwaldskog profila. Ta vrijednost zavisi o nagibu β , kako je bilo obrazloženo. Taj je nagib u užljebini raznolik, udešen za svaku, dakle i za najveću brzinu. Putoklizina treba da radi i uz najveću brzinu dakle i uz najveći nagib β . Dosljedno treba predviditi polumjer trasiranja i za taj nagib t.j. za najveću brzinu. Kod švarzwaldskog profila nagib β je konstantan i udešen prema najmanjoj brzini, što će se obrazložiti bolje još poslije. Na izbor polumjera trasiranja može utjecati samo taj nagib t.j. najmanja brzina i širiša putoklizina. Zbog toga se prilagođuje terenskim prilikama putoklizina providena sa švarzwaldskim profilom u krivulji bolje od putoklazine providene sa užljebinoim.

Ovdje je zgoda, da se kaže još nešto o razlici između koeficijenta trenja u pravcu i koeficijenta trenja u krivulji.

Promatrajući sliku 8, vidi se, da je položaj drveta drukčiji u krivulji, a drukčiji u pravcu. Još bolje se to vidi, ako se ima u vidu švarzwaldski profil. Vlakanca drveta paralelna su sa vlakancima braniča, kada drvo klizi u pravcu. U krivulji prislanja se drvo na braniče samo sa prednjim krajem, a eventualno i sa stražnjim krajem. No vlakanca drveta nijesu više paralelna sa vlakancima braniča nego zatvaraju šiljati kut međusobno, koji je stim veći, čim je krivost krivulje veća. Drukčiji je osim toga dodir tih vlakanci na prednjem kraju, a drukčiji na stražnjem kraju. Na prednjem kraju zadire zadrž u stijenu braniča sa šiljcima potsjedećih vlakanci to jače, što je krivost krivulje veća. Na stražnjem kraju toga zadržanja nema. Koeficijent trenja veći je zbog toga na prednjem kraju drveta, a mnogo manji na stražnjem kraju. Ovo je ustvrdio već i Baltz, nije ali obrazložio na ovaj način. Slične su te pojave i u slučaju, kada tijelo klizi samo na podlozi u užljebini. Vrijednost koeficijenta trenja u krivulji i u pravcu različita je za cijelo u svakom slučaju. Na prednjem kraju drveta biti će koeficijent trenja u krivulji veći od koeficijenta trenja u pravcu. Razlika biti će to veća, što je krivost krivulje veća. Na stražnjem kraju drveta biti će koeficijent trenja možda

manji od koeficijenta trenja u pravcu. Njihove vrijednosti mogu se odrediti samo empiričkim putem. Dok to učinjeno nije, nema druge; nego računati sa poznatom vrijednošću koeficijenta trenja jednako u pravcu kao i u krivulji. Može se pak tako učiniti zbog razloga spomenutih u uvodu.

7. O putoklazini provedenoj sa švarcvaldskim profilom i krivulji. Mijena brzine teškog tijela u njoj. Teško tijelo može opisati cilindričnu vijčanicu i u slučaju, ako se giba na podlozi izvedenoj u obliku švarcvaldskog profila. Horizontalna projekcija puta je onda kružnica ili luk kružnice (slika 9) Početak luka je tačka A ; završetak tačka B . Pripadajući centrični kut je γ . Tačka P označuje položaj težišta tijela na



Slika 9.

povoljnom mjestu luka. Polumjer trasiranja u tački P zatvara kut φ sa polumjerom u tački A . Otpor podloge označuje se sa W_1 , a otpor braniča sa W_2 . Stijena braniča, uz koju klizi teško tijelo je vertikalna i savita u luk kružnice. W_2 je dakle horizontalna sila, uperena prema središtu kružnice. Tijelo klizi na podlozi i prislanja se na stijenu braniča istodobno. Obje su podloge različite građe u općenitom slučaju, dakle i različitog koeficijenta trenja. Nazovē li se μ_1 koeficijent trenja podloge, a sa μ_2 koeficijent trenja stijene braniča, onda mjeri trenje na podlozi $\mu_1 W_1$, a trenje na braničima $\mu_2 W_2$. Na tijelo djeluju dakle: Q vlastita težina, otpori W_1 , W_2 i trenje $\mu_1 W_1$ i $\mu_2 W_2$. Dodaju li se k ovim aktivnim silama još i sile trnčnosti T i N , tri jednađžbe ravnoteže u kordinatnom sistemu XYZ (isporēdi-tačku 5) glase:

$$-W_{1x} - W_2 + N = 0,$$

$$-W_{1y} + \mu_1 W_1 \cos \alpha + \mu_2 W_2 \cos \alpha + T \cos \alpha = 0,$$

$$-W_{1z} + Q - \mu_1 W_1 \sin \alpha - \mu_2 W_2 \sin \alpha - T \sin \alpha = 0,$$

iz kojih izlazi, primijenivši za W_{1x} , W_{1y} i W_{1z} vrijednosti vrijednosti označene u jednadžbama 11.):

$$W_1 = Q \frac{\sin \alpha}{\nu}, \quad 50.)$$

$$N = Q \cos^2 \alpha \tan \beta + W_2, \quad 51.)$$

$$T = Q \left(1 - \frac{\mu_1}{\nu}\right) \sin \alpha - \mu_2 W_2, \quad 52.)$$

gdje je ν jednadžbom 9.) već prije definirani koeficijent nagiba kosine.

Eliminira li se iz posljednjih dviju jednadžbi otpor W_2 i uzme u obzir, da je:

$$\frac{N}{Q} = \frac{\nu^2}{g^2} = \frac{v_h^2}{gr},$$

gdje je $v_h = v \cos \alpha$ označuje horizontalnu komponentu brzine tijela, a r polumjer krivosti horizontalne projekcije puta, izlazi za tangencijalnu silu:

$$T = Q \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\nu}\right) \sin \alpha - \mu_2 \left(\frac{v_h^2}{gr} - \cos^2 \alpha \tan \beta\right) \right],$$

a za akceleraciju u istom smjeru:

$$a_t = g \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\nu}\right) \sin \alpha - \mu_2 \left(\frac{v_h^2}{gr} - \cos^2 \alpha \tan \beta\right) \right] \dots 53.)$$

Ako je tangencijalna akceleracija jednaka ničtici, tijelo se giba jednolično, sa brzinom, koja se može izračunati iz posljednje jednadžbe, za $a_t = 0$, sa rezultatom:

$$v^2 = v_h^2 = k \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\nu}\right) \frac{g \alpha}{\mu_2} + \cos \alpha \tan \beta \right] = c^2 \dots 54.)$$

U ovoj jednadžbi označuje k opet konstantu putoklizine određenu jednadžbom 19.).

Vrijednost koeficijenta trenja μ_1 i μ_2 redovno su koordinirane. Svakom paru koordiniranih vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 i μ_2 pripada dakle samo jedna i to jednadžbom 54.) posve određena vrijednost početne brzine v_a , sa kojom se tijelo giba jednolično, opisujući cilindričnu vijčanicu. Na putoklizi, providenoj sa švarcvaldskim profilom, opisuje tijelo dokle određeni put, cilindričnu vijčanicu, na neki način do-

brovoljno, samo ako njegova početna brzina zadovoljava jednadžbu 54). U tom slučaju giba se jednolično. Uđe li tijelo u takovu putoklizinu sa povoljnom početnom brzinom i onda će opisati određeni put, jer je braničima i podlogom prisiljeno na to, no neće se gibati jednolično. Kako se u tom slučaju mijenja brzina, o tome se govori poslije.

Ako je poznata početna brzina v_a i poprečan nagib $tg\beta$, može se izračunati potreban uzdužan nagib $tg\alpha$, za određene koordinirane vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 i μ_2 iz jednad. 54.) sa rezultatom:

$$tg\alpha = \mu_1 \sqrt{1 + \cos^2 \alpha tg^2 \beta} + \mu_2 \cos \alpha \left(\frac{v_a^2}{gr} - tg\beta \right) \quad \dots 55.]$$

Poprečan nagib $tg\beta$ redovno je maleni pravi slomak tako, da se može izostaviti drugi član ispod korijena stići više, jer je i $\cos \alpha$ pravi slomak. Nadalje se ne griješi mnogo, ako se stavi

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

jer se $tg\alpha$ i μ_1 ne razlikuju znatno. Za brži, a dovoljno tačan račun može se upotrijebiti dakle, namjesto gornje tačne jednadžbe, formula:

$$tg\alpha = \mu_1 + \frac{\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \left(\frac{v_a^2}{gr} - tg\beta \right) \quad 55a.)$$

Na jednaki način može se odrediti i poprečan nagib $tg\beta$ iz jednadžbe 54.), ako je sve ostalo poznato, sa rezultatom:

$$tg\beta = \frac{\mu_2 a + \mu_1 \sqrt{a^2 - (\mu_1^2 - \mu_2^2)}}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) \cos \alpha}; a = tg\alpha - \frac{v_a^2}{gr} \mu_2 \cos \alpha \quad . 56.]$$

Za $\mu_2 = 0$ prelazi ova jednadžba u oblik jednadžbe 17.).

I u ovom slučaju vrijedi pravilo: Uzdužan i poprečan nagib treba odrediti prema najmanjoj početnoj brzini, uz koju se još želi da radi putoklizina. Oba nagiba mogu se odrediti pri tom i bez obzira na braniče, s upotrebom formula 13.) i 14.) ili 14a.). Tijelo se neće doticati stijene braniča u tom slučaju, jer je uzdužan i poprečan nagib udešen upravo toliko velik, tako računajući, koliko je potrebno za centripetalnu silu, t. j. koliko je potrebno, da tijelo opiše cilindričnu vijčanicu, uz najmanju početnu brzinu v_a , bez pomoći braniča. Odredi li se pak poprečan nagib $tg\beta$ po formuli 13.), ispada njegova vrijednost vrlo malena za najmanju brzinu. Ali i onda, kada se uzmu u obzir braniči, vrijednost poprečnog nagiba, ispada za najmanju početnu brzinu toliko malena, da se može

zanemariti računski i praktički. Zbog toga neće se praktički upotrijebiti jednadžbe 54.) i 55.) u svom tačnom obliku, ni u kojem slučaju, nego redovno u obliku, koji poprimaju za $tg\beta=0$ (isporedi i jednadžbu 9.):

$$v_a^2 = c^2 = k \frac{tg\alpha - \mu_1}{\mu_2}, \quad 57.]$$

$$tg\alpha = \mu_1 + (\mu_2 \cos\alpha) \frac{v_a^2}{gr} \propto \mu_1 + \frac{\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \frac{v_a^2}{gr}. \quad 58.]$$

Posljednje dvije jednadžbe vrijede za teško tijelo, koje se prislanja na braniče, klizeći putoklizinom u krivulji i e d n o.

Ude li tijelo u takovu putoklizinu sa povoljnom brzinom, t. j. sa brzinom $v_a \geq c$, koja ne zadovoljava jednadžbu 54.) ili 57.), potrebno je ispitati najprije, uz koje će uvjete kliziti tijelo putoklizinom u takovom slučaju uopće, a napose, da klizeći ne izlazi iz nje, ili da ne sustane u njoj?

Ako je tangencijalna akceleracija $a_t > 0$, izlazi iz jednadžbe 53.) da je $v < c$. Ako je $a_t = 0$, slijedi iz iste jednadžbe $v = c$. Ako je pak $a_t < 0$, onda je $v > c$. Treća pak jednadžba, ravnoteže, može se pisati i na ovaj način:

$$T \sin\alpha = Q - W_z$$

$$\text{gdje je:} \quad W_z = W_{1z} + (\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2) \sin\alpha,$$

a predočuje vertikalnu komponentu ukupnog otpora W , koji sastoji od otpora podloge, otpora braniča i otpora trenja. Tako dugo, dok je $T > 0$, ili što je isto, tako dugo, dok je $v < c$, dotle je i $W_z < Q$, t. j. tijelo se neće izdizati sa podloge, jer je vertikalna komponenta ukupnog otpora manja od težine tijela. Nasuprot, ako je $T < 0$, ili, što je isto, ako je $v > c$, onda je $W_z > Q$, t. j. vertikalna komponenta ukupnog otpora veća je od težine tijela, dakle će se tijelo izdizati sa podloge, ako se nađe povod zato. Slučajna kakova zapreka može biti razlogom, da tangencijalna sila promjeni doista košnji smjer, određen uzdužnim nagibom putoklazine. Nema li toga povoda, zadrži tangencijalna sila T svoj smjer, a tijelo se ne izdiže sa podloge, zbog zakona ustrajnosti i u slučaju: $v > c$. Ta činjenica potkrepljuje ujedno i iskustvom stečeno saznanje, da ne valja graditi putoklizinu sa promjenljivim nagibom α u krivulji. Ako je $T = 0$, a to je, kada je $v = c$, bit će $W_z = Q$, t. j. tijelo se ponaša kao neteško, ono opisuje vijčanicu sa trenjem, kao teško tijelo horizontalnu kružnicu bez trenja uz iste inače prilike (isporedi tačku 3).

Iz ovoga razlaganja slijedi nauk: putoklizinu pred krivuljom treba osnovati po mogućnosti tako, da brzina tijela na početku krivulje ne nadmaši brzinu c i uz najmanju vrijed-

nost koeficijenta trenja, koji još dolazi u obzir, ako se želi spriječiti, da drvo ne iskače sa putoklazine u krivulji. Početna brzina treba dakle da leži u granicama: $v_{\min} \leq v_a \leq c$, gdje $v_{\min}$ označuje najmanju brzinu, uz koju želimo, da još putoklazina radi. Po toj brzini udešen je uzdužan i poprečan nagib putoklazine, kako je već spomenuto bilo. I to zbog toga, što najmanja brzina nastaje, kada vlada najveći koeficijent trenja na putoklazini. Uzdužni pak nagib treba da je veći i od najvećeg koeficijenta trenja, koji još dolazi u obzir. Kod najmanje brzine potreban je dakle najveći uzdužan, a najmanji poprečan nagib. Po toj brzini određen je radius trasiranja, jer postoji samo jedna i to najmanja vrijednost poprečnog nagiba, o kojoj taj polumjer zavisi, u koliko nije određen već širom putoklazine. Uz tu najmanju brzinu ne prislanja se tijelo na rubne braniče, nego klizi jednolično u osovini putoklazine, kako je već obrazloženo bilo. Za svaku brzinu $v > v_{\min}$ uzdužni je nagib prevelik, a poprečan premalen. Jer brzina može porasti jedino, ako se smanji koeficijent trenja. Za manji pak koeficijent trenja bio bi potreban manji uzdužni a veći poprečan nagib od stvarnoga, da se tijelo giba jednolično. Zbog prevelikog stvarnog nagiba tijelo će se gibati sa pospješanjem, ako je $v < c$, a zbog premalenog stvarnog poprečnog nagiba, nastojati će kliziti u krivulji većeg polumjera krivosti od stvarnog polumjera putoklazine, t. j. klizeći prisloniti se uz braniče. Dosegne li brzina tijela brzinu c , tijelo klizi jednolično i konačno, nadmašilo ju, a to može samo na početku, tijelo se giba sa retardacijom, lako iskoči iz putoklazine, ako se nađe povod zato, a braniči nijesu dosta visoki.

Brzini c , definiranoj jednadžbom 54.) ili 57.) pridaje se zbog toga naziv: kritična (stacionarna) brzina. Ona zavisi o samoj putoklazini u prvom redu: njezinom polumjeru krivosti, uzdužnom i poprečnom nagibu, te je konstantna veličina, za iste koordinirane vrijednosti koeficijenta trenja, podloge μ_1 i braniča μ_2 . Mijenja li se koeficijent trenja samo jedan ili oba, mijenja se i kritična brzina na istoj putoklazini. Svakoј vrijednosti koeficijenta trenja pripada ali samo jedna i to posve određena vrijednost kritične brzine. Na putoklazini konstantnog uzdužnog i poprečnog nagiba, providenoj sa švarcvaldskim profilom, kliziteško tijelo sigurno u krivulji samo u slučaju, ako mu je početna brzina jednaka ili veća od najmanje brzine, uz koju je putoklazina osnovana, a jednaka ili manja od kritične brzine. Ili drugim riječima: Na putoklazini konstantnog uzdužnog i poprečnog nagiba, providenoj sa švarcvaldskim profilom, kliziteško tijelo sigurno u krivulji, i ne izdiže se tako lako sa putoklazine samo u slučaju, ako

je akceleracija, kojom se giba pozitivna ili jednaka ničtici.

Ne misli se time reći, da neće tijelo proći krivulju i u slučaju, ako je $a_t < 0$, osobito ne, ako je akceleracija tek nešto manja od ničtice. Ako su braniči dosta visoki, tijelo neće saći sa putoklizine ni u tom slučaju bez povoda, nego će se gibati sa retardacijom. Ipak može biti razlogom kakova malenkost ili najmanja nesavršenost u izvedbi podloge i braniča, da tijelo iskoči iz putoklizine. U takovom slučaju valja se pobrinuti za dovoljno visoku stijenu braniča i solidnu izradbu čitavog konstruktivnog uređaja, a napose paziti, da putoklizina bude čista, u besprijekornom stanju, za vrijeme prometa.

Nadalje treba ispitati, kako se mijenja brzina tijela tokom klizanja u takvoj krivulji, ako je $a_t \geq 0$, dakle, ako se tijelo ne giba jednolično?

Horizontalna komponenta akceleracije tijela mjeri u tom slučaju (iz jednadžbe 53.):

$$a_{th} = a_t \cdot \cos \alpha = K - v_h^2 \frac{\lambda}{r}, \quad 59.)$$

ako je:

$$K = g \cdot \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\gamma} \right) \sin \alpha + \mu_2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \right] \cos \alpha, \quad 60.)$$

$$\lambda = \mu_2 \cos \alpha. \quad 61.)$$

Nadalje je: $a_{th} = \frac{v_h \cdot dv_h}{ds_h}$, a prevaljeni put AP (slika

9), dužina luka kružnice: $s_h = r\varphi$.

Dakle je $ds_h = r d\varphi$, a onda:

$$a_{th} = \frac{v_h}{r} \cdot \frac{dv_h}{d\varphi}. \quad 62.)$$

Jednadžba 59.) poprima pak oblik nakon sređenja:

$$\frac{dv_h}{d\varphi} + \lambda v_h = \frac{rK}{v_h}. \quad 59a.)$$

Općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$v_h^2 = \frac{rK}{\lambda} + 2Ce^{-2\lambda\varphi}. \quad 63.)$$

e označuje bazu naravnog logaritma, a C integracionu konstantu, koja se određuje na ovaj način: Na početku krivulje u tački A je $\varphi = 0$, a početna brzina tijela, s kojom ono ulazi u krivulju neka je v_{ah} . U toj zajedničkoj tački pravca i kružnice

mora vrijediti jednadžba 63.) također. Mora dakle biti vrijednost integracione konstante:

$$2C = v_{ah}^2 - \frac{r_K}{\lambda},$$

a jednadžba horizontalne komponente brzine glasi onda:

$$v_h^2 = \frac{r_K}{\lambda} + \left(v_{ah}^2 - \frac{r_K}{\lambda} \right) e^{-2\lambda\varphi} \quad 64.]$$

Izmjene li se opet supstituirane vrijednosti za k i λ iz jednadžbi 60.) i 61.) izlazi:

$$\frac{r_K}{\lambda} = k \cdot \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{v} \right) \frac{tg\alpha}{\mu_2} + \cos\alpha tg\beta \right] \cos^2\alpha$$

Prisposodi li se desna strana ove jednadžbe sa jednadžbom 54.) izlazi, da je:

$$\frac{r_K}{\lambda} = c^2 \cdot \cos^2\alpha$$

a onda iz 64.), uzevši u obzir, da je $v_h = v \cos\alpha$

$$v^2 = c^2 + \frac{v_a^2 - c^2}{2\mu_2\varphi\cos\alpha} e \quad 65.]$$

Ova jednadžba daje brzinu tijela u povoljnoj tački putoklizine, izvedene u luku kružnice, konstantnog uzdužnog i poprečnog nagiba, providene sa švarcvaldskim profilom. Pretpostavlja se pritom, da se tijelo klizeći prislania na braniče.

Ako je početna brzina v_a jednaka kritičnoj brzini c , slijedi iz posljednje jednadžbe: $v = c$. T. j. tijelo klizi jednolično. Rezultat do kojeg smo došli već i prije na drugi način. Ako je početna brzina v_a veća od kritične brzine c , najveća je vrijednost brzine $v = v_a$, za $\varphi = 0$. Sa porastom kuta φ biva brzina v sve manja, a bit će $v \rightarrow c$, za $\varphi \rightarrow \infty$. Konačno, ako je početna brzina v_a manja od kritične brzine c , najmanja je vrijednost brzine $v = v_a$, za $\varphi = 0$. Sa porastom kuta φ brzina raste i postizava vrijednost $v \rightarrow c$, za $\varphi \rightarrow \infty$. Imade li tijelo ma kakovu početnu brzinu, konačno postigne posvema određenju istu kritičnu brzinu, kojom klizi jednolično dalje. Teoretski doduše u beskonačnosti, uistinu mnogo prije, na konačnom putu, kako se slično dešava na pr. teškom tijelu, kada pada u zrakom ispunjenom prostoru.

Bilo je već obrazloženo prije, ograničena je početna brzina sa granicama: $v_{\min} \leq v_a \leq c$, ako se želi spriječiti izdi-

zanje tijela. Zbog tih granica zgodniji će biti oblik jednadžbe 65.), za praktičnu porabu:

$$v^2 = c^2 - \frac{c^2 - v_a^2}{2\mu_2 \varphi \cos \alpha} \quad 65a.]$$

Svede li se jednadžba kritične brzine (54) na oblik:

$$c^2 = k \frac{tg \alpha + \mu_2 \cos \alpha tg \beta - \mu_1 \frac{tg \alpha}{v}}{\mu_2} \quad 66.]$$

vidi se, da ta brzina može spasti i na vrijednost $c = 0$, ako je koeficijent nagiba putoklizine:

$$v = \frac{\mu_1 tg \alpha}{tg \alpha + \mu_2 \cos \alpha tg \beta} \quad 67.]$$

Želi li se spriječiti kočno djelovanje putoklizine u krivulji, takav slučaj ne smije nastupiti na otvorenoj pruzi. To se još bolje vidi, zanemari li se neznatan utjecaj poprečnog nagiba. Jednadžba 67.) glasi u tom slučaju $tg \alpha = \mu_1$. Uzdužni nagib putoklizine treba dakle da je jednak ili da se približuje kutu trenja podloge, ako se želi, da je kritična brzina jednaka ničici. Na otvorenoj pruzi treba osnovati putoklizinu upravo na obrnutom principu, kako je već bilo obrazloženo prije. T. j. uzdužni nagib treba da je veći i od najvećeg koeficijenta trenja μ_1 , uz koji se još želi, da putoklizinu radi.

Nasuprot slijedi odatle nauk, kako valja postupati osnivajući krivulju na završetku putoklizine, gdje se poništjuje brzina tijela. Izostavi li se na ovakovoj kočnoj krivulji poprečan nagib uopće, ili osnuje tako malenim, da ne ulazi u račun, kritična brzina jednaka je ničici, ako je uzdužni nagib jednak koeficijentu trenja podloge. Iz pojma kritične brzine slijedi onda, da u krivulji takovog nagiba brzina tijela pada sve više i primiče segranicu $v \rightarrow 0$, za $\varphi \rightarrow \infty$. Leži li vrijednost uzdužnog nagiba $tg \alpha$ ispod vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 , izlazi iz jednadžbe 57.) da je c imaginaran broj, t. j. u obliku »kritične brzine« definirana brzina ne postoji. Za $tg \alpha = 0$ izlazi napose iz jednadžbe 57.)

$$c^2 = -k \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad 68.]$$

Ako je pak $tg \alpha$ negativan broj, t. j. osnuje li se putoklizinu u krivulji sa uzbrdicom, bit će:

$$c^2 = -k \cdot \frac{\mu_1 + tg\alpha}{\mu_2} \quad 69.]$$

t. j. kritična brzina ne postoji opet.

U svrhu određenja brzine na tako nastalim »kočnim krivuljama«, promatra se najprije kočna krivulja u horizontali. U tom je slučaju $tg\alpha = 0$, a može li se zanemariti i poprečan nagib ($tg\beta = 0$), bit će i $v = 0$. Iz jednadžbi 68.) i 65.) slijedi onda:

$$v^2 = \frac{v_a^2 - k \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{2\mu_2\varphi} - 1)}{2\mu_2\varphi} \quad 70.]$$

Konstanta putoklizine u ovom je slučaju $k = rg$, jer je $\cos\alpha = \cos 0 = 1$ (isporedi 19.). Sa porastom kuta φ , dakle sa porastom dužine luka, očito je, da se vrijednost brzine v primiče ničtici, te ju i dostigne, kada kut φ poprimi vrijednost:

$$\varphi = \frac{\ln(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} tg\beta_a)}{2\mu_2} \quad 71.]$$

gdje je $tg\beta_a = \frac{v_a^2}{rg} \quad 72.]$

Osnuje li se ovakova kočna krivulja u protunagibu, sa uzbrdicom, kut α je negativan, a iz jednadžbi 69.) i 65.) slijedi:

$$v^2 = \frac{v_a^2 - k \cdot \frac{\mu_1 + tg\alpha}{\mu_2} (e^{2\mu_2\varphi\cos\alpha} - 1)}{2\mu_2\varphi\cos\alpha} \quad 73.]$$

U ovom se slučaju brzina v primiče ničtici brže, nego u prvom, te ju dostigne, kada je:

$$\varphi = \frac{\ln[1 + \frac{\mu_2\cos\alpha}{\mu_1 + tg\alpha} tg\beta_a]}{2\mu_2\cos\alpha} \quad 74.]$$

U ovoj formuli imade $tg\beta_a$ opet značenje određeno jednadžbom 72.)

Konačno u slučaju $tg\alpha = \mu_1$, izlazi iz jednadžbe 57.) i 65.)

$$v = \frac{v_a}{\frac{\mu_2\varphi\cos\alpha}{e}} \quad 75.]$$

$$\text{gdje je} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \quad 76.]$$

8. O putoklizini izvedenoj u obliku užljebine u krivulji. Mijena brzine teškog tijela u njoj. U tački 3.) bilo je obrazloženo, da tijelo opisuje cilindričnu vijčanicu, ako klizi na podlozi stalnog uzdužnog nagiba, a promjenljivog poprečnog nagiba i ako njegova početna brzina zadovoljava jednadžbu 18). Horizontalna projekcija osovine podloge mora biti savita naravno u luk kružnice, a početna brzina mora imati smjer tangente vijčanice. U tom slučaju giba se tijelo jednolično. Putoklizina, trasirana u luku kružnice, stalnog uzdužnog nagiba, a izvedena u obliku užljebine, imade dakle sve uvjete, koji se traže od podloge za takvo gibanje. Još i više! Ude li teško tijelo u takovu užljebinu sa brzinom, koja zadovoljava jednadžbu 18.), proći će ju, klizeći jednolično. Ne zadovoljava li početna brzina jednadžbu 18.) i onda je tijelo prinuđeno, da klizeći opisuje određeni put, cilindričnu vijčanicu, i to zbog dovoljno visokih i zaobljenih stijena užljebine, no gibanje neće biti više jednolično, analogno kao što nije bilo ni kod švarcvaldskog profila u takovom slučaju. Ne giba li se pak tijelo jednolično, nemože biti niti poprečan nagib $\tan\beta$ konstantan, slijedi iz jednadžbe 40.). T. j. sa brzinom mijenja tijelo i položaj u užljebini na način, kako određuje ta jednadžba. Mijenjajući pak položaj unutar užljebine i tražeći brzini odgovarajući poprečan nagib, strogo uzevši, ne putuje tijelo onda niti u uzdužnom nagibu, koji se tačno pokriva sa uzdužnim nagibom osovine užljebine. Putoklizine se grade sa razmjerno velikim nagibom. Malena dubina užljebine prema velikoj visinskoj razlici početne i završne tačke putoklizine zbog toga je i relativno malena. Diferencija brzine tijela na početku i na kraju krivulje također nije velika, kako će se vidjeti poslije. Neće biti dakle znatnije visinske razlike u položaju tijela prema osovini i unutar samoga žljeba, u tim tačkama. Promjena uzdužnog nagiba može se zbog toga zanemariti, a $\tan\alpha$ smatrati konstantom. Na valjano osnovanoj putoklizini putanja tijela gotovo je paralelna sa uzdužnom osovinom užljebine i u krivulji, bez obzira klizi li tijelo jednolično ili nejednolično u njoj. Poprečan profil užljebine izvodi se u obliku postojane krivulje. Klizeći tijelo dira takav profil tangencijalno u jednoj tački. Postoji samo jedan otpor podloge, vrijede dakle formule izvedene u tački 5.), u kojima je sada ali poprečan nagib $\tan\beta$, a onda i nagib putoklizine ν , promjenljivica.

U svrhu određenja brzine na povoljnom mjestu putanje tijela, promatra se gibanje u horizontalnoj projekciji. Tangencijalna akceleracija u toj projekciji: $a_{th} = a_t \cos\alpha$ općenito je različita od ničice uz povoljnu početnu brzinu v_a i mjeri obzirom jednadžbu 43.) i 62.):

$$a_{th} = \frac{v_h dv_h}{r d\varphi} = g \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin\alpha \cos\alpha \quad 77.]$$

ili obzirom na jednadžbu 9.) i 40.)

$$\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\mu} - \sqrt{\cos^4\alpha + \left(\frac{v_h^2}{k}\right)^2} = \mu g r d\varphi. \quad 77a.)$$

k označuje konstantu putoklazine, definiranu jednadžbom 19.).

Stavili se: $a = \cos^2\alpha$, $b = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\mu}$ i $y = \frac{v_h^2}{k}$, 77b.)
gornja jednadžba prelazi u oblik:

$$\frac{k \cdot dy}{b - \sqrt{y^2 + a^2}} = 2\mu g r d\varphi, \quad 77c.)$$

a uz daljnju supstituciju: $t = y + \sqrt{y^2 + a^2}$ 77d.)
u oblik:

$$\frac{k(t^2 + a^2) dt}{t(t^2 - 2bt + a^2)} = -2\mu g r d\varphi. \quad 77e.)$$

Općenito rješenje ove definicijske jednadžbe glasi:

$$t \left[\frac{t-b-\sqrt{b^2-a^2}}{t-b+\sqrt{b^2-a^2}} \right]^{\frac{tga}{\sqrt{tg^2a-\mu^2}}} = C \cdot e^{-2\mu\varphi\cos\alpha} \quad 78.]$$

Za $\varphi=0$ neka je $t=t_a$. Integracijska konstanta određena je onda sa jednadžbom:

$$C = t_a \left[\frac{t_a-b-\sqrt{b^2-a^2}}{t_a-b+\sqrt{b^2-a^2}} \right]^{\frac{tga}{\sqrt{tg^2a-\mu^2}}} \quad 79.]$$

Jednadžba 78.) prelazi pak u oblik:

$$\begin{aligned} & t \left[\frac{t-b-\sqrt{b^2-a^2}}{t-b+\sqrt{b^2-a^2}} \right]^{\frac{tga}{\sqrt{tg^2a-\mu^2}}} = \\ & = t_a \left[\frac{t_a-b-\sqrt{b^2-a^2}}{t_a-b+\sqrt{b^2-a^2}} \right]^{\frac{tga}{\sqrt{tg^2a-\mu^2}}} \cdot e^{-2\mu\varphi\cos\alpha} \end{aligned} \quad 80.]$$

Zamijene li se opet supstituirane vrijednosti, a uzme u obzir, da je $v_h = v \cdot \cos\alpha$, u gornjoj formuli označuje:

$$t = \tau \cdot \cos^2 \alpha, \text{ ako je } \tau = \frac{v^2}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{k}\right)^2} \quad 81.]$$

$$b + \sqrt{b^2 - a^2} = \left[\frac{tga}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{tga}{\mu}\right)^2 - 1} \right] \cos^2 \alpha \quad 82.]$$

$$b - \sqrt{b^2 - a^2} = \left[\frac{tga}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{tga}{\mu}\right)^2 - 1} \right] \cos^2 \alpha \quad 83.]$$

Za svaku reelnu vrijednost centričnog kuta φ obje strane jednadžbe 80.) jednake su ničtici, ako je:

$$t = t_a = b + \sqrt{b^2 - a^2} \quad 84.)$$

ili ako je, obzirom na jednadžbe 81.), 82.) i 84.)

$$v^2 = v_a^2 = k \sqrt{\left(\frac{tga}{\mu}\right)^2 - 1} = c^2 \quad 85.]$$

Ako je pak $t_a \leq b + \sqrt{b^2 - a^2}$, ili, što je isto, ako je $v_a \geq c$, $a \varphi \rightarrow \infty$, desna strana jednadžbe 80.) jednaka je ničtici, dakle je i lijeva strana te jednadžbe jednaka ničtici, što je jedino moguće, ako je opet $t = b + \sqrt{b^2 - a^2}$ ili $v^2 = c^2$. T. j. uz povoljnu početnu bbrzinu v_a giba se tijelo sve brže ili sve polaganije, već prema tome, da li je $v_a \leq c$, dok mu brzina ne naraste ili ne spane na iznos brzine c , određen jednadžbom 85.). Teoretski u beskonačnosti, a praktički u konačnosti. I u ovom slučaju postoji dakle »kritična brzina« kao i kod švarcvaldskog profila. Isporedi li se još formula 85.) i formula 18.) vidi se, da ta kritična brzina c nije nego početna brzina, uz koju tijelo klizi jednolično u užljebini, trasiranoj u luku kružnice.

Uz upotrebu jednadžbi 81.), 82.), 83.) i 85.) konačno sređena jednadžba 80.) glasi onda:

$$\tau \cdot \left[\frac{\tau - \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k}}{\tau - \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k}} \right] = \tau_a \cdot \left[\frac{\tau_a - \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k}}{\tau_a - \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k}} \right] \cdot e^{-2\mu\varphi \cos \alpha} \quad 86.]$$

Vrijednost τ_a određena je jednadžbom 81) za $v = v_a$. Vrijednost konstante putoklizine k određena je jednadžbom 19.), a vrijednost kritične brzine c jednadžbom 18.) ili 85.). Po formuli 86.) može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklizine, trasirane u luku kružnice, konstantnog uzdužnog nagiba, a građene u obliku užljebine, u slučaju $tga < \mu$, t. j. dok je kritična brzina $c > 0$.

U slučaju, kada je koeficijent trenja veći od uzdužnog nagiba ($\operatorname{tga} < \mu$), bit će vrijednost eksponenta $\frac{\operatorname{tga}}{\sqrt{\operatorname{tga}^2 - \mu^2}}$ u jednadžbi 80.), a onda i vrijednost kritične brzine, i manja. Kritična brzina ne postoji, a brzina u povoljnoj tački putoklizine ne može se računati po formuli 86.). Da se pak može izračunati i u ovom slučaju, potrebno je obnoviti račun, počevši sa jednadžbom 77c.). — Uz supstituciju $a^2 = b^2 + h^2$ ova jednadžba poprima oblik:

$$\frac{k(t^2 + b^2 + h^2) dt}{t[(t-b)^2 + h^2]} = -2\mu g r d\varphi,$$

a uz daljnju supstituciju: $t = x + b$, oblik:

$$k \cdot \frac{x^2 + 2b(x+b) + h^2}{(x+b)(x^2 + h^2)} dx = -2\mu g r d\varphi.$$

Općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$(x+b) \cdot e^{\frac{2b}{h} \operatorname{arctg} \frac{x}{h}} = C \cdot e^{-2\mu\varphi \cos\alpha}$$

ili, ako se izmijenjene supstituirane vrijednosti:

$$t \cdot e^{\frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{t-b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} = C \cdot e^{-2\mu\varphi \cos\alpha} \quad 87.]$$

Vrijednost integracione konstante izlazi, za $\varphi = 0$ i $t = t_a$:

$$C = t_a \cdot e^{\frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{t_a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}}},$$

a jednadžba 87.) prelazi u oblik:

$$\begin{aligned} t \cdot \left[e^{\operatorname{arctg} \frac{t-b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} \right]^{\frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} &= \\ &= t_a \cdot \left[e^{\operatorname{arctg} \frac{t_a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} \right]^{\frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} \cdot e^{-2\mu\varphi \cos\alpha} \end{aligned} \quad 88.]$$

Obzirom na jednadžbe 77b.) i 81.) konačno sredena ova jednadžba glasi:

$$\tau \left[e^{\operatorname{arctg} \frac{\tau - \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} =$$

$$= \tau_a \left[e^{\operatorname{arctg} \frac{\tau_a - \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} - 2\mu\varphi \cos\alpha \quad 89.)$$

Po ovoj formuli može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklizine, trasirane u luku kružnice, konstantnog uzdužnog nagiba, građene u obliku uzljetbine, ako je $tga < \mu$, dakle kod kočne krivulje. Jer kod kočnih krivulja je uzdužan nagib manji od koeficijenta trenja.

U kočnoj krivulji može tijelo i sustati. Brzina tijela spane na ništicu u tom slučaju. Za $v=0$ bit će $\tau=1$, slijedi iz jednadžbe 81.). Jednadžba 89.) poprima u tom slučaju oblik:

$$\left[e^{\operatorname{arctg} \frac{1 - \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} =$$

$$= \tau_a \left[e^{\operatorname{arctg} \frac{\tau_a - \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} - 2\mu\varphi_0 \cos\alpha \quad 90.)$$

Iz ove jednadžbe može se dakle izračunati centrični kut φ_0 , uz koji će tijelo sustati u uzljetbini, stalnog uzdužnog nagiba $tga < \mu$, trasiranoj u luku kružnice.

Treći slučaj može nastupiti, kada je $\mu = tga$, a kritična brzina $c = 0$. U tom je slučaju (isporedi 77b. i 85.):

$$b^2 - a^2 = \left(\frac{tg^2\alpha}{\mu^2} - 1 \right) \cos^2\alpha = 0,$$

dakle je $a^2 = b^2$, a jednadžba 77e.) poprima oblik:

$$\frac{(t^2 + b^2) dt}{t(t-b)^2} = - \frac{2\mu gr}{k} d\varphi = - 2\mu \cos\alpha d\varphi.$$

Općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$t = C \cdot e^{\frac{2b}{t-b} - 2\mu\varphi\cos\alpha} \quad 91.)$$

Izmijene li se supstituirane vrijednosti opet (iz jednadžbi 77b. i 81.), posljednja jednadžba poprima oblik:

$$t = C \cdot e^{\frac{2}{\tau-1} - 2\mu\varphi\cos\alpha} \quad 92.)$$

Vrijednost integracione konstante izlazi za $\varphi = 0$, $\tau = \tau_a$ i $t = t_a$:

$$C = t_a \cdot e^{-\frac{2}{\tau_a-1}}$$

a jednadžba 92.) poprima konačan oblik, nakon sređenja i s. upotrebom jednadžbe 81.):

$$\tau \cdot e^{-\frac{2}{\tau-1}} = \tau_a \cdot e^{-\frac{2}{\tau_a-1}} \cdot e^{-2\mu\varphi\cos\alpha} \quad 93.)$$

Za praktičnu porabu može se ova formula pojednostavniti na slijedeći način:

Iz jednadžbe 93.) slijedi najprije:

$$\ln \frac{\tau_a}{\tau} = 2 \left[\mu\varphi\cos\alpha - \frac{\tau_a - \tau}{(\tau_a - 1)(\tau - 1)} \right] \quad 94.)$$

Stavi li se nadalje: $\tau = \tau_a - x = \tau_a \left(1 - \frac{x}{\tau_a}\right)$, 95.)

ta formula poprima oblik:

$$\ln \frac{\tau_a}{\tau_a \left(1 - \frac{x}{\tau_a}\right)} = 2 \left[\mu\varphi\cos\alpha - \frac{x}{(\tau_a - 1)(\tau_a - x - 1)} \right]$$

$\frac{x}{\tau_a}$ u pravilu je pravi slomak malen toliko, da se može redovno zanemariti prema jedinici. Ta tvrdnja nalazi potkrepu u tački 10, u kojoj su izrađeni praktički primjeri. Lijeva strana posljednje jednadžbe razlikuje se zbog toga malo od ničice. Stavi li se dakle praktički dovoljno tačno, da je lijeva strana jednaka ničici, izlazi iz te jednadžbe i iz jednadžbe 95.):

$$\tau = \tau_a - \frac{(\tau_a - 1)^2 \mu\varphi\cos\alpha}{1 + (\tau_a - 1) \mu\varphi\cos\alpha} \quad 96.)$$

Po ovoj formuli može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklazine, trasirane u luku kružnice, konstantnog uzdužnog nagiba, građene u obliku užljebine, ako je uzdužan nagib jednak koeficijentu trenja ($tga = \mu$). I ova krivulja koči tijelo u klizanju. No kočno njezino djelovanje nije snažno. Iako je u ovom slučaju kritična brzina $c = 0$ (isporedi jedn. 85.), ipak brzina tijela spane na tu vrijednost tek u beskonačnosti. Iz jednadžbe 94.) slijedi naime, riješi li se na φ , da se vrijednost toga kuta primiće beskonačnosti, ako se v primiće ništici ili, što je isto, τ jedinici.

Kočnu krivulju karakteriše općenito uzdužni nagib $tga \leq \mu$. I to po redu, prema sraznosti kočnog djelovanja:

$$tga = \mu, \quad tg < \mu, \quad tga = 0, \quad tg < 0.$$

Prva dva slučaja već su raspravljena. Preostaju druga dva slučaja kočne krivulje, koje treba još raspraviti.

U slučaju $tga = 0$, osovina putoklazine pokazuje luk kružnice u horizontalnoj ravni. Jednadžba 77e.) poprima pak oblik, za $a = \cos^2 \alpha = \cos^2 0 = 1$:

$$b = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\mu} = \frac{\sin 0 \cos 0}{\mu} = 0 \quad i \quad k = \frac{rg}{\cos \alpha} = \frac{rg}{\cos 0} = rg:$$

$$\frac{dt}{t} = -2\mu d\varphi, \quad 97.]$$

odakle slijedi:

$$t = e^{-2\mu\varphi} \cdot C.$$

Za $\varphi = 0$, bit će $t = t_a = e^C$. Jednadžba 97.) poprima zbog toga oblik, uzevši u obzir i jednadžbu 81.):

$$\tau = \tau_a \cdot e^{-2\mu\varphi}. \quad 98.]$$

Iz ove jednadžbe može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklazine, trasirane u horizontalnom luku kružnice, građene u obliku užljebine. Računajući τ po formuli 81.) treba uzeti u obzir, da je konstanta putoklazine u ovom slučaju $k = rg$.

Tijelo će sustati u ovakvoj užljebini, kada centrični kut φ postigne vrijednost (iz 98. za $\tau = 1$):

$$\varphi_0 = \frac{\ln \tau_a}{2\mu}. \quad 99.]$$

Do posljednjih dviju formula može se doći neposredno i iz jednadžbi 86.) ili 89.) i 90.), ako se uvrsti u njima $tga = 0$.

Postupajući analogno u slučaju $tga < 0$, t. j. uvrstivši u formulu 89.) mjesto tga negativni takav iznos $-tga$, izlazi:

$$\tau \left[e^{\arctg \frac{\tau_a + \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} = 100.)$$

$$= \tau_a \left[e^{\arctg \frac{\tau + \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} \right]^{\frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}}} - 2\mu\varphi\cos\alpha$$

Po ovoj formuli može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklizine, trasirane u lukú kružnice, konstantnog uzdužnog u s p o n a, građena u obliku užljebine, ako je $|tga| < \mu$.

Na jednaki način izlazi iz jednadžbe 90.):

$$2\mu\varphi_0\cos\alpha = \ln\tau_a - \frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\arctg \frac{\tau_a + \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}} - \arctg \frac{1 + \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - (\frac{tga}{\mu})^2}} \right] : 101.)$$

Iz ove jednadžbe može se izračunati centrični kut φ_0 , uz koji će tijelo sustati u užljebini, stalnog uzdužnog u s p o n a, trasiranoj u lukú kružnice, ako je $|tga| < \mu$.

Ako je na uzbrdici $|tga| = \mu$, izlazi iz jednadžbe 77b.) i 81.):

$$\frac{2b}{t-b} = -\frac{2}{\tau+1}$$

Jednadžba 91.) pak poprima oblik:

$$t = C \cdot e^{-\frac{2}{\tau+1}} \cdot e^{-2\mu\varphi\cos\alpha} 102.)$$

Vrijednost integracione konstante izlazi, za $\varphi = 0$, $\tau = \tau_a$ i $t = t_a$:

$$C = t_a \cdot e^{-\frac{2}{\tau_a+1}}$$

Jednadžba 102.) prelazi onda u oblik, uzevši u obzir i jednadžbu 81.)

$$\frac{2}{\tau + 1} \cdot e^{\frac{2}{\tau_a + 1}} = \tau_a \cdot e^{\frac{2}{\tau_a + 1}} - 2\mu\varphi\cos\alpha \quad 103.]$$

Po ovoj se formuli može izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklizine, trasirane u luku kružnice, konstantnog uzdužnog uspona $/tga/ = \mu$, građene u obliku užljebine.

Za $v = 0$ ili $\tau = 1$ izlazi iz posljednje jednadžbe:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\mu\cos\alpha} \left[\frac{\tau_a - 1}{\tau_a + 1} - \ln\tau_a \right] \quad 104.]$$

Ova jednadžba određuje centrični kut φ_0 , uz koji će tijelo sustati u užljebini, konstantnog uzdužnog uspona $/tga/ = \mu$, trasiranoj u luku kružnice. U takovoj užljebini klizi tijelo uopće samo u slučaju, ako njegova početna brzina v_a zadovoljava nejednadžbu:

$$\frac{\tau_a - 1}{\tau_a + 1} > \ln\tau_a \quad 105.]$$

Konačno, ako je na uzbrdici $/tga/ > \mu$, izlazi iz jednadžbe 86.) za negativnu vrijednost tga :

$$\tau \left[\frac{\tau + \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k}}{\tau + \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k}} \right]^{\frac{tga}{\mu} \cdot \frac{k}{c^2}} = \tau_a \cdot \left[\frac{\tau_a + \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k}}{\tau_a + \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k}} \right]^{\frac{tga}{\mu} \cdot \frac{k}{c^2}} - 2\mu\varphi\cos\alpha \quad 106.]$$

Iz ove jednadžbe može se izračunati brzina tijela u povoljnoj tački putoklizine, trasirane u luku kružnice, konstantnog uzdužnog uspona $/tga/ > \mu$, građene u obliku užljebine.

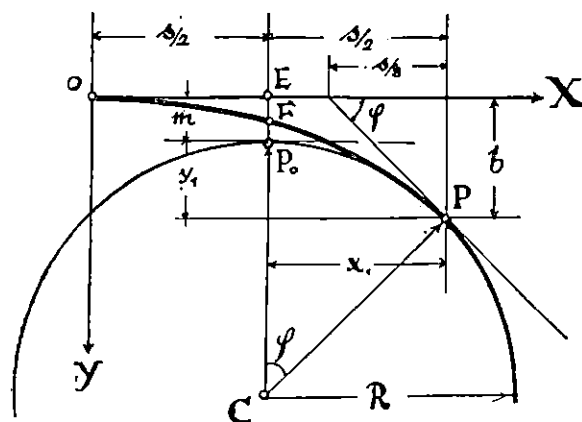
Za $v = 0$ ili $\tau = 1$, bit će:

$$2\mu\varphi_0\cos\alpha = \ln\tau_a + \frac{tga}{\mu} \cdot \frac{k}{c^2} \ln \frac{(\tau_a + \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k})(1 + \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k})}{(\tau_a + \frac{tga}{\mu} - \frac{c^2}{k})(1 + \frac{tga}{\mu} + \frac{c^2}{k})} \quad 107.]$$

Posljednja jednadžba određuje centrični kut φ_0 , uz koji će tijelo sustati u ovakovoj putoklizini.

9. O prelaznoj krivulji. Neposredni prijelaz iz pravca u kružnicu nemože se općenito upotrijebiti kod putoklizine, nego

je potrebno ublažiti ga s pomoću prelazne krivulje. I to zbog dva razloga. Jedan je razlog podloga, koja ima drugačiji oblik u pravcu, a drugačiji u krivulji. U prelaznoj krivulji pruža se zgoda, da se podloga postepeno preobrazi iz jednog oblika u drugi. Prelazna krivulja potrebna je dakle zbog građevno-konstruktivnih razloga. Drugi je razlog drvo, koje se otprema putoklizinom. U pravcu klizi teško tijelo redovno u osovini putoklazine, a u krivulji izvan osovine, uz vanjski rub putoklazine. Na početku kružnice zauzima tijelo posvema određeno mjesto: sa poprečnim nagibom, koji odgovara njegovoj brzini, u užljebini, a uz braniče na švarcvaldskom profilu. U prelaznoj krivulji pruža se zgoda, da tijelo postojano promijeni položaj. Prelazna krivulja je potrebna dakle i za pravilno klizanje tijela.



Slika 10.

Njezina jednačba izvodi se obično iz uvjeta:

$$r = \frac{R \cdot s}{x} \quad 108.]$$

r označuje polumjer krivosti prelazne krivulje u horizontalnoj projekciji, a R priključene kružnice. Dužina čitave prelazne krivulje je $s = OP$, a x je apscisa povoljne tačke na njoj (slika 10). To je krivulja vrlo blage krivosti tako, da se redovno izjednačuje dužina apscise sa dužinom luka. Na taj način pada polumjer krivosti linearno od $r = \infty$ za $x = 0$, do $r = R$, za $x = s$. Iz snošaja:

$$y'' = \frac{1}{r} = \frac{x}{Rs}$$

izvodi se dalje integracijom vrijednost kuta φ u povoljnoj tački prelazne krivulje:

$$tg\varphi = y' = \frac{x^2}{2Rs}, \quad 109.]$$

i konačno jednadžba prelazne krivulje:

$$y = \frac{x^3}{6Rs} = \frac{x^3}{6C}, \text{ ako je } C = Rs. \quad 110.]$$

Integracione konstante otpadaju, jer je $tg\varphi$ i y jednak ničtici, za $x = 0$.

Ordinata b završne tačke prelazne krivulje, a početne tačke kružnice mjeri (iz 110, za $x = b$)

$$b = \frac{s^2}{6R}, \quad 111.]$$

a kut priklona tangente prema osovini X u istoj tački (iz 109.):

$$tg\varphi = \frac{s}{2R} = b : \frac{s}{3}. \quad 112.]$$

Tangenta siječe dakle apscisu te tačke u najbližoj trećini. Nadalje se razabire iz slike (i iz 112), da je:

$$x_1 = R \sin\varphi \approx R tg\varphi = \frac{s}{2}.$$

Početak luka kružnice P_0 , iskolčene bez prelazne krivulje, raspolavlja dakle dužinu prelazne krivulje. Ako je još:

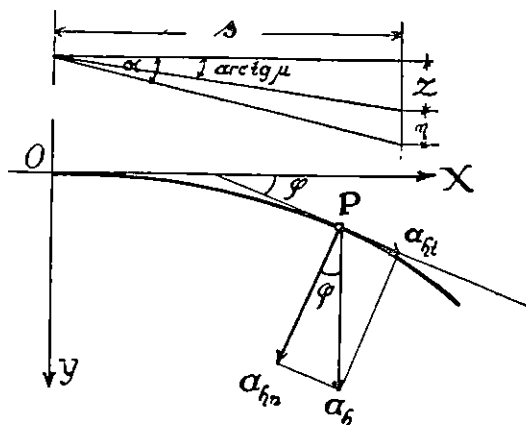
$$y_1 = R(1 - \cos\varphi) \approx R \frac{1}{2} \sin^2\varphi \approx R \frac{1}{2} tg^2\varphi = \frac{s^2}{8R},$$

onda je:

$$m = b - y_1 = \frac{b}{4}; \quad EF = \frac{b}{8} = \frac{m}{2} \quad 113.]$$

Prigodom iskolčenja prelazne krivulje treba primaknuti kružnicu od tangente prema središtu za iznos m , ili odmaknuti tangentu od središta kruga za isti iznos. Prvo je jednostavnije zato i običnije.

Ovaj običajan analitički izvod upopunjuje se ovdje još i mehaničkim izvodom na slijedeći način (slika 11.):



Slika 11.

Promatra li se tijelo, koje imade na početku krivulje (O) brzinu v_{oh} u smjeru osovine X, a djeluje na nj istodobno stalno sila $S = mc^2x$, paralelna sa pozitivnim smjerom osovine y, za cijelo vrijeme gibanja, komponente su akceleracije, brzine i puta u smjeru osovine X:

$$\ddot{x} = 0, \dot{x} = v_{xh} = v_{oh} \text{ i } x = v_{oh} \cdot t,$$

a u smjeru osovine Y:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= c^2x = c^2v_{oh}t \\ \dot{y} &= v_{yh} = c^2v_{oh} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{c^2x^2}{2v_{oh}} \\ y &= c^2v_{oh} \frac{t^3}{6} = \frac{x^3}{6 \left(\frac{v_{oh}}{c}\right)^2} = \frac{x^3}{6C}. \end{aligned}$$

Posljednja jednadžba predočuje prelaznu krivulju istog oblika kao i jednadžba 110.) ako se konstanti C daje značenje:

$$C = R_S = \left(\frac{v_{oh}}{c}\right)^2$$

dakle konstanti c značenje:

$$c^2 = \frac{v_{oh}^2}{R_S} = \frac{v_{oh}^2}{C} \quad \dots 114.]$$

Nadalje je obzirom na jednadžbe 109.) i 110.):

$$v_{yh} = \frac{c^2 x^2}{2v_{oh}} = v_{oh} \cdot \frac{x^2}{2C} = v_{oh} \cdot tg\varphi,$$

a brzina u povoljnoj tački prelazne krivulje:

$$v_h = \sqrt{v_{xh}^2 + v_{yh}^2} = v_{oh} \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{v_{oh}}{\cos\varphi}.$$

Na kraju prelazne krivulje je (za $x=s$):

$$tg\varphi = \frac{s}{2R}; \quad v_{ah} = v_{oh} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{2R}\right)^2}.$$

Primijenivši ovo na putoklizinu, konstantnog uzdužnog nagiba α , izlazi iz snošaja $v = v_h \cos\alpha$ jednadžba brzine na povoljnom mjestu prelazne krivulje:

$$v = v_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4R^2}}. \quad 115.]$$

a na kraju s dugačke prelazne krivulje:

$$v_a = v_0 \sqrt{1 + \frac{s^2}{4R^2}} \quad 115a.]$$

Drugi član ispod korijena toliko je malen prema jedinici, da se može staviti:

$$v_a = v_0 \left(1 + \frac{s^2}{8R^2}\right), \quad 115b.]$$

ili, izostavivši ga u najviše slučaje, izjednačiti v_a brzinom na kraju prelazne krivulje, sa v_0 , brzinom na njezinom početku.

Poprečan nagib treba da mjeri na povoljnom mjestu putoklazine u prelaznoj krivulji, uzevši u obzir jednadžbe 40.), 108.) i 115.):

$$tg\beta = \frac{v_0^2}{gR} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4R^2}}. \quad 116.]$$

a na kraju te krivulje, dovoljno tačno:

$$tg\beta_a = \frac{v_0^2}{gR} \left(1 + \frac{s^2}{8R^2}\right). \quad 116a.]$$

U najviše slučajeva može se izostaviti drugi član ispod korijena u jednadžbi 116.) i drugi član u zagradi jednadžbe 116a.)

Akceleracija a_h stalno je paralelna sa osovinom Y (slika 11.). Stoji dakle stalno snošaj između tangencijalne i normalne komponente te akceleracije: $a_{ht} = a_{hn} \cdot \operatorname{tg} \varphi$, ili obzirom na jednadžbu 43.)

$$g \left(1 - \frac{\mu}{\nu} \right) \sin \alpha \cos \alpha = a_{hn} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

te mora vrijediti za svaku tačku prelazne krivulje, dakle i za tačku $x=0$. $\operatorname{tg} \varphi = 0$. To je pak jedino moguće, ako je $1 - \mu/\nu = 0$, ili (iz jednadžbe 9):

$$\mu = \nu = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

U istoj je ali tački $\operatorname{tg} \beta = 0$ (iz jednadžbe 116 za $r = \infty$), dakle je $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Odatle slijedi:

Teško tijelo opisuje prelaznu krivulju, ako mu brzina imade smjer tangente na početku te krivulje, a klizi na podlozi stalnog uzdužnog nagiba $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ i promjenljivog poprečnog nagiba $\operatorname{tg} \beta$ prema formuli 116.

Uistinu je ali nagib putoklazine redovno različit od koeficijenta trenja u prelaznoj krivulji zbog drugih razloga. Ako je dakle putoklazina osnovana sa nagibom $\operatorname{tg} \alpha$, a treba da imade nagib μ , u prelaznoj krivulji postoje onda ovi snošaji (slika 11):

$$z + \eta = s \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad z = \mu s$$

$$\eta = s (\operatorname{tg} \alpha - \mu) \quad \text{ili} \quad s = \frac{\eta}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \quad 117.]$$

U ovoj formuli označuje η visinu tijela nad osovinom putoklazine na kraju prelazne krivulje ili na početku kružnice. Konstruirala li se poprečan profil putoklazine na način opisan u tački 4.), ta visina može se odrediti iz formula 30.) ili 36.), a onda i dužina prelazne krivulje s iz posljednje formule.

Praktički će se ipak odrediti dužina prelazne krivulje na način, koji se predlaže poslije, a, računajući promjenu brzine tijela, priključiti prvu polovicu dužine prelazne krivulje OF pravcu, drugu polovicu FP kružnici. I to zbog ovih razloga. Putoklazina treba da radi u određenom intervalu vrijednosti koeficijenta trenja. Udesi li se dužina prelazne krivulje prema jednoj vrijednosti u tom intervalu, tako određena dužina ne odgovara drugoj kojoj vrijednosti koeficijenta trenja u istom intervalu. Promjena brzine tijela nije velika, ako se nagib prelazne krivulje ne razlikuje mnogo od koeficijenta trenja. Razlikuje li se pak mnogo, oblik prelazne krivulje ot-

stupa malo od pravca u prvoj polovici, a ne mnogo od kružnice u drugoj polovici. U koliko je krivost prevelika prema pravcu u prvoj polovici, u toliko je premalena prema kružnici u drugoj polovici. Učinjene računske griješke paralizuju se na taj način, ako je prelazna krivulja relativno kratka. Dugačku prelaznu krivulju, a kratku kružnicu treba napustiti uopće. Mnogo bolje poslužiti će u tom slučaju druga koja čunjosječica, sličnog oblika, praktički i računski. No o tome poslije. Poprečan profil, izrađen u obliku užljebine, ne razlikuje se mnogo u pravcu i u krivulji. Njegove su dimenzije nešto povećane u krivulji. Dno je prošireno i provideno sa nagibom, a povišene stijene zaobljene su nešto strmije. Prijelaz iz jednog oblika u drugi izvodi se jednolično i postepeno. Teško tijelo nalazi brzini odgovarajući nagib na svakom mjestu, klizeći u užljebini ovakovog oblika, te opisuje postojanu krivulju, koja odgoara početnoj brzini i koeficijentu trenja najbolje, a razlikuje se od prelazne krivulje osovine putoklizine najmanje.

Kod švarcvaldskog profila stoji ta stvar drugačije. Na putoklizinu takovog oblika, klizi tijelo u jednom dijelu prelazne krivulje samo na podlozi, a u drugom dijelu prislanja se i na braniče. U prvom slučaju djeluje trenje samo između podloge i tijela, a u drugom slučaju još i trenje između stijene braniča i tijela. Granica gdje je, ne zna se tačno. Zavisí o brzini i o obliku tijela. Zbog toga je tačan račun iluzoran, a postupiti će se najsigurnije i u ovom slučaju, da se jedna polovica prelazne krivulje priključi tangenti, a druga kružnici, kao i kod užljebine, računajući promjenu brzine tijela, ako prelazna krivulja nije dugačka. U protivnom slučaju treba upotrijebiti drugu koju čunjosječicu.

U uvodu bilo je već spomenuto, da prelazna krivulja može izostati, ako je polumjer kružnice veći od 300 m. u nuždi veći od 200 m. Ako se još kaže, da je minimalna vrijednost polumjera cca 30 m., koja se još može upotrijebiti uz vanredno povoljne prilike (kratko drvo, malena brzina, povoljno tlo itd.), onda prelazna krivulja dolazi u obzir kod kružnica polumjera od 30 do 300 m. Najzgodnija dužina polumjera krivosti iznosi 80 do 100 m, ispod koje ne treba ići, želi li se otpremati dugo drvo. Dužina pak prelazne krivulje neka ne budu manje od 20 do 30 m. Na temelju ovih empiričkih podataka može se odrediti konstanta prelazne krivulje C približno na ovaj način: Njezina veličina zavisí o dužini krivulje i o polumjeru kružnice, dakle o brzini i dužini drveta koje klizi. Posljednje dvoje može se izlučiti, jer je brzina i dužina drveta uzeta već u obzir kod izbora polumjera krivosti, ako se određuje njegova veličina prema tački 6.). Preostaje samo dužina prelazne krivulje, s kojom stoji polumjer kružnice u

obratnom omjeru. Uz kružnicu malog polumjera potrebna je duga prelazna krivulja i obrnuto. Stavi li se dakle

$$C = R_s = 3000.$$

dužina prelazne krivulje iznosi za rečene vrijednosti polumjera u metrima:

Skrižaljka 1.

R^m	s^m	R^m	s^m	R^m	s^m	R^m	s^m
30	100	90	33	150	20	210	14
40	75	100	30	160	19	230	13
50	60	110	27	170	18	250	12
60	50	120	25	180	17	270	11
70	43	130	23	190	16	280	10
80	38	140	21	200	15	300	10

Najprije se vidi iz ove skrižaljke, da se izračunata dužina prelazne krivulje s pokriva sa empiričkom takovom dužinom za srednje i veće vrijednosti polumjera R . Zatim se vidi, da ta dužina raste iz početka polako, zatim brzo i sve brže, dok polumjer pada jednolično. Konačno izlazi dužina prelazne krivulje predugačka, za najmanje vrijednosti polumjera. Ne izlazi to samo iz ove skrižaljke, nego to leži i u naravi prelazne krivulje, jer je blage krivosti. Krivulja, složena od kružnice malog polumjera i prelazne krivulje, ispada glomazna, a skopčana je i ne samo sa računskim poteškoćama, nego i sa građevno-konstruktivnim neprilikama. Namjesto ovako složene glomazne krivulje, bolje će poslužiti druga koja kraća čunjosječica, o kojima se govori u drugom dijelu, a imaju prednost pred kružnicom, jer se može prilagoditi terenskim prilikama prema potrebi i jer joj je polumjer krivosti promjenljiv, slično kao kod prelazne krivulje, a minimalnu vrijednost poprima samo u jednoj tački. Računski je pak jednostavna krivulja preglednija od složene.

S ovom tačkom završena je obradba suvislog jednog dijela preduzete grade, pa neće biti na odmet razjasniti i popuniti dosada rečeno sa konkretnim primjerima, na prelazu u drugi dio.

10. Primjeri. 1. primjer. Putoklizina izvedena je u obliku užljebine. Pred krivuljom trasirana je putoklizina u

pravcu d m. dugačkom u horizontalnoj projekciji, nagiba $\text{tga} = 0'20$. Koeficijent trenja kreće se u granicama: $0'10 \leq \mu \leq 0'20$. Na kraju pravca mjeri brzina tijela, ako s označuje dužinu pravca uistinu, po poznatoj formuli:

$$v_a^2 = v_0^2 + 2gs(\sin a - \mu \cos a).$$

Zanemarili se početna brzina tijela v_0 na gornjem kraju, brzina na donjem kraju pravca može se izraziti i sa formulom koja slijedi iz posljednje:

$$\frac{v_a^2}{g} = 2d(\text{tga} - \mu), \quad 118.]$$

a daje ujedno i brzinu tijela na početku krivulje. Ova je izvedena u obliku kružnice polumjera $r = 200$ m i istog uzdužnog nagiba $\text{tga} = 0'20$. Konstanta putoklazine iznosi (vidi jednažbu 19.):

$$k = rg \sqrt{1 + \text{tg}^2 a} = 200 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{1 + 0'2^2} \approx 2000.$$

Kritična brzina računa se po formuli 85), koja poprima oblik u ovom specijalnom slučaju:

$$\frac{c^2}{k} = \sqrt{\left(\frac{0'20}{\mu}\right)^2 - 1}.$$

Centrični kut luka kružnice neka iznosi $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Dužina osovine putoklazine u krivulji mjeri $\frac{1}{2} \cdot r\pi = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot \pi = 314.16$ m. Treba odrediti brzinu tijela na kraju krivulje v_b , ako iznosi dužina pravca jedanputa $d = 100$ m., a drugi puta $d = 400$ m. i ako se kreće koeficijent trenja μ u već označenim granicama za vrijeme rada putoklazine.

Vrijednosti početne i kritične brzine sabrane su u skrižaljci 2, za zadani interval koeficijenta trenja, a iskazani su u njoj i ostali podaci, potrebni za daljnji račun.

Diferencija između kritične brzine c i početne brzine v_a prilično je velika u ovom slučaju. Kritična brzina raste sa polumjerom. U pravcu ($r = \infty$) je beskonačno velika. Uz velik polumjer ponaša se tijelo u krivulji gotovo kao u pravcu. Uz isti polumjer kritična brzina je to veća, što je veća diferencija između nagiba i koeficijenta trenja. Za $\mu \rightarrow 0$, vrijednost kritične brzine primiče se beskonačnosti opet. I to stim brže, čim je veći polumjer. Ako je dakle diferencija između nagiba i koeficijenta trenja vrlo velika, tijelo se ponaša u krivulji gotovo kao u pravcu. T. j. uz veliki polumjer, a maleni koeficijent trenja prema nagibu, brzina tijela mijenja se u krivulji slično kao u pravcu.

Skrižaljka 2.

μ	$\operatorname{tg} \alpha - \mu$	d = 100 m		d = 400 m		$\frac{\operatorname{tga}}{\mu}$	$\left(\frac{\operatorname{tga}}{\mu}\right)^2$	$\frac{c^2}{k}$	c^2	c
		$\frac{v_a^2}{g}$	v_a m/sec	$\frac{v_a^2}{g}$	v_a m/sec					
0,20	—	—	—	—	—	1,0	1,0	—	—	—
0,19	0,01	2,0	4,4	8	8,9	1,0526	1,108	0,329	658	25,7
0,18	0,02	4,0	6,3	16	12,5	1,1111	1,235	0,484	968	31,1
0,17	0,03	6,0	7,7	24	15,3	1,1765	1,384	0,620	1240	35,2
0,16	0,04	8,0	8,9	32	17,7	1,2500	1,563	0,750	1500	38,7
0,15	0,05	10,0	9,9	40	19,8	1,3333	1,778	0,882	1764	42,0
0,14	0,06	12,0	10,8	48	21,7	1,4286	2,041	1,020	2040	45,2
0,13	0,07	14,0	11,7	56	23,4	1,5385	2,367	1,169	2338	48,4
0,12	0,08	16,0	12,5	64	25,1	1,6667	2,778	1,333	2666	51,6
0,11	0,09	18,0	13,3	72	26,6	1,8182	3,306	1,518	3036	55,1
0,10	0,10	20,0	14,0	80	28,0	2,0	4,0	1,732	3464	58,9

Prelazi se na račun brzine v_b na kraju luka.

Za $\mu = 0,19$, $v_a = 4,4$ m/sec izlazi:

$$\frac{v_a^2}{k} = 0,01; \quad \tau_a = 0,01 + \sqrt{1 + 0,01^2} = 1,01 \text{ (iz jedn. 81);}$$

$$\frac{\operatorname{tga}}{\mu} \cdot \frac{k}{c^2} = \frac{1,053}{0,329} = 3,2; \quad 2\mu\varphi\cos\alpha = 2 \cdot 0,19 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0,2^2}} = 0,585.$$

Jednadžba 86.) poprima oblik:

$$\tau \left[\frac{\tau - 1,053 - 0,329}{\tau - 1,053 + 0,329} \right]^{3,2} = \tau_a \cdot \left[\frac{1,010 - 1,053 - 0,329}{1,010 - 1,053 + 0,329} \right]^{3,2} e^{-0,585}$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_a} \right)^{3,2} \cdot \frac{1,382 - \tau}{\tau - 0,724} = 1,038$$

U nastavku stavlja se: $\tau = \tau_a + x = \tau_a \left(1 + \frac{x}{\tau_a} \right)$, zbog olakšanja računa. Uz ovu supstituciju, a uvrstivši vrijednost za τ_a , posljednja jednadžba poprima oblik:

$$\left(1 + \frac{x}{1,01}\right)^{\frac{1}{3,2}} \cdot \frac{0,372 - x}{0,286 + x} = 1,083.$$

x/τ_a redovno je pravi slomak, toliko malen prema jedinici, da se mogu upotrijebiti samo prva dva člana binomskog stavka, računajući vrijednost prvog faktora lijeve strane ove jednačbe; i to u pravilu uvijek, upotrebljavajući formulu 86.), bez uštrba na praktičnu tačnost računa. Bit će dakle:

$$\left(1 + \frac{1}{3,2} \cdot \frac{x}{1,01}\right) \cdot \frac{0,372 - x}{0,286 + x} = 1,038.$$

Iz ove jednačbe izlazi $x = 0,031$. Nadalje je $\tau = 1,041$, a brzina v_b na kraju luka:

$$\frac{v_b^2}{k} = \frac{\tau^2 - 1}{2\tau} = \frac{1,041^2 - 1}{2 \cdot 1,041} = 0,040; \quad v_b^2 = 80; \quad v_b = 8,9 \text{ m/sec.}$$

Posljednja jednačba izvedena je iz jednačbe 81.). Omjer između završne i početne brzine iznosi:

$$\kappa = \frac{v_b}{v_a} = \frac{8,9}{4,4} = 2,02.$$

Ponovi li se račun na posve jednaki način za $\mu = 0,10$, $v_a = 14,0$ m/sec, izlazi brzina na kraju luka za taj slučaj $v_b = 28,0$ m/sec, a omjer između brzine na kraju i na početku luka:

$$\kappa = \frac{v_b}{v_a} = \frac{28,0}{14,0} = 2,0.$$

Za granične vrijednosti zadanog intervala koeficijenta trenja brzina se je gotovo tačno podvostručila na kraju luka. Pokuša li se računati brzina na kraju luka još za koju vrijednost koeficijenta trenja, unutar zadanog intervala, utvrdit će se, da je opet dva puta veća od početne brzine. Nalazi li se dakle pred krivuljom $d = 100$ m dugačak pravac, brzina na kraju luka dvaputa je veća od brzine na početku luka za sve vrijednosti koeficijenta trenja u zadanom intervalu. Omjer između jedne i druge brzine praktički je konstantan i iznosi $\kappa = 2$.

Mjeri li dužina pravca pred krivuljom $d = 400$ m, iznosi brzina na kraju luka 11,8 m/sec i 36,4 m/sec za granične vrijednosti koeficijenta trenja 0,19 i 0,10. Omjer između završne i početne brzine mjeri $\kappa = 1,33$ za $\mu = 0,19$, a $\kappa = 1,30$ za $\mu = 0,10$. Obnovi li se račun još za koju vrijednost koeficijenta trenja, unutar zadanog intervala, na pr. za $\mu = 0,18$ izlazi, računajući posve jednako kao prije, $v_b = 16,5$ m/sec, $\kappa = 1,32$. I u ovom slučaju mijenja se omjer κ sa koeficijentom trenja

neznatno, no ipak više nego u prvom slučaju. Na temelju ovog računa sastavljena je skrižaljka 3.

Skrižaljka 3.

μ	$d = 100 \text{ m}$				$d = 400 \text{ m}$				c
	v_a	v_b	κ	l	v_a	v_b	κ	l	
0,19	4,4	8,9	2,02	31	8,9	11,8	1,33	26	25,7
0,18	6,3	12,7	2,02	25	12,5	16,5	1,32	19	31,1
0,17	7,7	15,5	2,01	20	15,3	20,2	1,32	15	35,2
0,16	8,9	17,9	2,01	17	17,7	23,2	1,31	13	28,7
0,15	9,9	19,9	2,01	15	19,8	25,9	1,31	12	42,0
0,14	10,8	21,6	2,00	14	21,7	28,4	1,31	11	45,2
0,13	11,7	23,4	2,00	13	23,4	30,4	1,30	10	48,4
0,12	12,5	25,0	2,00	12	25,1	32,6	1,30	9	51,6
0,11	13,3	26,6	2,00	11	26,6	34,6	1,30	9	55,1
0,10	14,0	28,0	2,00	11	28,0	36,4	1,30	8	58,9

U skrižaljku su unešene najprije početne brzine v_a u zadanom intervalu koeficijenta trenja za $d = 100 \text{ m}$ i za $d = 400 \text{ m}$ zasebno. Zatim su unešene izračunate konačne brzine v_b i pripadajući omjer κ za granične vrijednosti koeficijenta trenja. Ostale vrijednosti omjera κ interpolirane su potom gotovo linearno u zadanom intervalu. Konačno su izračunate završne brzine iz snošaja $v_b = \kappa \cdot v_a$ za sve ostale vrijednosti koeficijenta trenja. U posljednjem stupcu iskazana je kritična brzina. Već se ovdje upozoruje, da je omjer κ stim manje promjenljiv kod iste putoklizine, čim je razmak između početne i kritične brzine veći. Kod putoklizine većeg takovog razmaka dovoljno je zbog toga izračunati κ samo za jednu vrijednost koeficijenta trenja μ . Tako pronađeni omjer κ može se smatrati praktički konstantan i s pomoću njega izračunati konačnu brzinu za sve ostale vrijednosti koeficijenta trenja. U ovom primjeru bila bi dakle konstanta brzine putoklizine $\kappa = 2$, za $d = 100 \text{ m}$, a $\kappa = 1,3$, za $d = 400 \text{ m}$. Ta činjenica mnogo olakoćuje račun, jer je praktički dovoljno upotrijebiti jednadžbu 86.) samo jedanputa kod takove putoklizine.

Dužina drveta l , koji će se otpremati putoklizinom zavisi o polumjeru i o brzini. Na putoklizinu, izvedenoj u obliku užljebine, najveća je brzina na kraju luka, ako je kritična brzina veća od početne, kao u ovom slučaju. Računajući dakle du-

žinu drveta treba uvrstiti vrijednost v_b za v u formuli 48a. Na ovaj način izračunate su također vrijednosti iskazane u stupcima 1 skrižaljke 3. Iz te tablice se pak razabire, da treba udesiti otpremu drveta razne dužine u razno doba, već prema vrijednosti koeficijenta trenja. Želi li se otpremati drvo izkazane najveće dužine $l=31$ m, širina putoklizine treba da iznosi 2,0 m (usporedi tačku 6).

Obzirom na dužinu drveta, sposobnost rada putoklizine, izvedene u obliku užljebine, malena je u krivulji. U ovom primjeru odabrani polumjer od 200 m prilično je velik. A ipak se može otpremati preko 20 m dugačko drvo samo za $\mu=0,17-0,19$, ako je $d=100$ m, a samo za $\mu=0,18-0,19$, ako je $d=400$ m. U najvećem dijelu intervala vrijednosti koeficijenta trenja može se otpremati razmjerno tek kratko drvo. Putoklizina se pak gradi za otpremu dugog drveta u prvome redu. Može se to postići doduše i onda, kada se izvodi u obliku užljebine u krivulji, ali samo uz vrlo povoljne prilike i malu početnu brzinu a veliki polumjer. U protivnom slučaju bolje je upotrijebiti švarcvaldski profil na putoklizini u krivulji i onda, kada je u svom ostalom dijelu izgrađena u obliku užljebine.

2. primjer. Kočno djelovanje užljebine u krivulji je veliko. Neka iznosi centrični kut luka kružnice opet $\varphi = \frac{\pi}{2}$, polumjer neka je sada $r=100$ m, a uzdužni nagib $tg\alpha=0,15$. Konstanta putoklizine mjeri onda (jednadžba 19.):

$$k = 100,9,81 \sqrt{1 + 0,15^2} = 992.$$

Za daljnji račun potrebni podaci sabrani su u skrižaljci 4, u kojoj su iskazane i vrijednosti početne brzine u zadanom intervalu koeficijenta trenja $0,10 \leq \mu \leq 0,19$.

Kritična brzina c postoji samo za vrijednosti koeficijenta trenja $\mu < tg\alpha = 0,15$, a izračunata je po formuli 85.). Za vrijednosti koeficijenta trenja $\mu \geq tg\alpha = 0,15$ djeluje ova krivulja kao kočnica. Zbog toga je potrebno ispitati brzinu tijela na kraju luka za više vrijednosti koeficijenta trenja u zadanom intervalu, svaku napose.

$$a.) \mu = 0,15; c = 0; v_a = 24,3 \text{ m/sec}; tg\alpha = \mu.$$

$$\text{Po formuli 81.): } \tau_a = 0,595 + \sqrt{1 + 0,595^2} = 1,759.$$

$$\text{Nadalje je } \mu \varphi \cos\alpha = 0,15 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0,15^2}} = 0,233; \text{ a}$$

jednadžba 96.), koja dolazi ovdje u obzir, poprima oblik:

$$\tau = 1,759 - \frac{(1,759 - 1)^2 \cdot 0,233}{1 + (1,759 - 1) \cdot 0,233} = 1,759 - 0,114 = 1,645.$$

Iz kvadrirane sredene jednađbe 81.) slijedi onda:

$$\frac{v_b^2}{k} = \frac{\tau^2 - 1}{2\tau} = \frac{1,645^2 - 1}{2 \cdot 1,645} = 0,519; v_b^2 = 514,8; v_b = 22,7 \text{ m/sec}$$

Skrižaljka 4.

μ	$\text{tg} \alpha$	$\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}$	$\left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}\right)^2$	$1 - \left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}\right)^2$	$\sqrt{1 - \left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}\right)^2}$	$k = 992$				
				$\left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1$	c^2/k	c^2	c	v_a	v_a^2	v_a^2/k
0,19	0,15	0,7895	0,623	0,377	0,614	—	—	10,8	116,6	0,118
0,18		0,8333	0,694	0,306	0,553	—	—	15,3	234,1	0,236
0,17		0,8624	0,779	0,221	0,471	—	—	18,8	353,4	0,356
0,16		0,9375	0,879	0,121	0,348	—	—	21,7	470,9	0,475
0,15		1,0000	1,000	—	—	—	—	24,3	590,5	0,595
0,14		1,0714	1,148	0,148	0,385	381,9	19,5	26,6	707,6	0,713
0,13		1,1538	1,331	0,331	0,576	571,4	23,9	28,7	823,7	0,830
0,12		1,2500	1,563	0,563	0,750	744,0	27,3	30,7	942,5	0,950
0,11		1,3636	1,859	0,859	0,927	919,6	30,3	32,5	1056,3	1,065
0,10		1,5000	2,250	1,250	1,118	1109,0	33,3	34,3	1176,5	1,186

Omjer između konačne i početne brzine mjeri:

$$\kappa = \frac{22,7}{24,3} = 0,934$$

b.) $\mu = 0,16$; $v_a = 21,7 \text{ m/sec}$; $\text{tg} \alpha < \mu$.

$$\tau_a = 0,475 + \sqrt{1 + 0,475^2} = 1,582.$$

$$2\mu\varphi\cos\alpha = 2 \cdot 0,16 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0,15^2}} = 0,497.$$

U ovom slučaju dolazi u obzir jednađba 89.). S pomoću skrižaljke 4 je onda:

$$\frac{\tau_a - \frac{\text{tg} \alpha}{\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu}\right)^2}} = \frac{1,582 - 0,938}{0,348} = 1,851; \arctg 1,851 = 1,075;$$

$$e = 2,930. \text{ Nadalje je: } \frac{2 \frac{tga}{\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{tga}{\mu}\right)^2}} = \frac{2,0,938}{0,348} = 5,388.$$

Formula 89.) poprima oblik:

$$\tau \cdot \left[e^{\operatorname{artcg} \frac{\tau - 0,938}{0,348}} \right]^{5,388} = \tau_a \cdot 2,930 \cdot e^{-0,497}$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_a} \right)^{5,388} \cdot e^{\operatorname{artcg} \frac{\tau - 0,938}{0,348}} = 2,673.$$

Uz supstituciju $\tau = \tau_a - x = \tau_a \left(1 - \frac{x}{\tau_a} \right)$ prelazi ova jedna-džba u oblik, ako se uvrsti još i brojčana vrijednost za τ_a :

$$\left(1 - \frac{x}{1,582} \right)^{5,388} \cdot e^{\operatorname{artcg} \frac{0,644 - x}{0,348}} = 2,673$$

x/τ_a je pravi slomak i to malen prema jedinici toliko, da se mogu upotrijebiti samo prva dva člana binomskog stavka, računajući vrijednost prvog faktora lijeve strane jednadžbe. Taj faktor glasi onda:

$$\left(1 - \frac{x}{5,388 \cdot 1,582} \right). \text{ Drugi član u zagradi sada je još}$$

manji prema jedinici, te se može naprosto izostaviti, bez uštrba na praktičnu tačnost računa. Bit će dakle:

$$e^{\operatorname{artcg} \frac{0,644 - x}{0,348}} = 2,673$$

$$\operatorname{artcg} \frac{0,644 - x}{0,348} = \ln 2,673 = 0,983.$$

$$\frac{0,644 - x}{0,348} = \operatorname{tg} 0,983 = 1,500.$$

Iz ove pak jednadžbe slijedi: $x = 0,122$. Dakle je: $\tau = \tau_a - x = 1,582 - 0,122 = 1,460$. Nadalje je iz jedn. 81.):

$$\frac{v_b^2}{k} = \frac{\tau^2 - 1}{2\tau} = \frac{1,46^2 - 1}{2,1,46} = 0,388$$

$$v_b^2 = 992 \cdot 0,388 = 384; v_b = 19,6 \text{ m/sec.}$$

Omjer između konačne i početne brzine mjeri

$$\kappa = \frac{19,6}{21,7} = 0,903$$

c.) $\mu = 0,17$; $v_a = 18,8$ m/sec.; $\operatorname{tg} \alpha < \mu$.

Računajući na posve jednaki način kao pod b.) izlazi:
 $\tau = 1,278$; $v_b = 15,7$ m/sec; $\kappa = 0,835$.

f.) $\mu = 0,18$; $v_a = 15,3$ m/sec; $\operatorname{tg} \alpha < \mu$. Postupajući isto tako: $\tau = 1,118$; $v_b = 10,5$ m/sec; $\kappa = 0,686$.

g.) $\mu = 0,19$; $v_a = 10,8$ m/sec; $\operatorname{tg} \alpha < \mu$.

Pokuša li se račun s pomoću jednadžbe 89.) izlazi $\tau < 1$. To znači, da tijelo neće proći krivulju, jer je $\tau = 1$, ako je $v_b = 0$, a $\tau > 1$, ako je $v_b > 0$. Zbog toga se računa veličina centričnog kuta, uz koji će biti $v_b = 0$ t. j. uz koji će tijelo sustati u krivulji. i to s pomoću formule 90.). U ovom je slučaju:

$$\tau_a = 0,118 + \sqrt{1 + 0,118^2} = 1,125;$$

$$2\mu\varphi\cos\alpha = \frac{2 \cdot 0,19}{\sqrt{1 + 0,15^2}} \varphi = 0,376\varphi;$$

$$\frac{\tau_a - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2}} = \frac{1,125 - 0,790}{0,614} = 0,546;$$

$$\operatorname{arctg} 0,546 = 0,5; \quad e^{0,5} = 1,649$$

$$\frac{2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 0,79}{0,614} = 2,573;$$

$$\frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2}} = \frac{1 - 0,79}{0,614} = 0,342$$

$$\operatorname{arctg} 0,342 = 0,33; \quad e^{0,33} = 1,391.$$

Jednadžba 90.) poprima oblik:

$$1,391^{\frac{2,573}{2,573}} = 1,125 \cdot 1,649^{\frac{2,573}{2,573}} \cdot e^{-0,376\varphi},$$

a iz nje slijedi: $\varphi = 1,476 = 84^\circ 34'$. Centrični kut krivulje pu-

toklazine iznosi $\frac{\pi}{2}$; tijelo će sustati dakle u krivulji nedaleko pred krajem luka.

Potanki račun za preostale vrijednosti koeficijenta trenja $tga > \mu$, ne daje se ovdje jer je postupak potanko razjašnjen u prvom primjeru za taj slučaj. Iznose se ovdje tek rezultati u formi skrižaljke 5, koja daje ujedno i pregled o promjeni brzine za cijeli zadani interval vrijednosti koeficijenta trenja.

Skrižaljka 5.

μ	v_a	τ	v_b	κ	c	l
0,19	10,8	<1	—	—	—	—
0,18	15,3	1,118	10,5	0,69	—	10
0,17	18,8	1,278	15,7	0,84	—	8
0,16	21,7	1,460	19,6	0,90	—	7
0,15	24,3	1,645	22,7	0,93	—	6
0,14	26,6	1,849	25,5	0,96	19,5	6
0,13	28,7	—	27,8	0,97	23,9	5
0,12	30,7	2,257	30,1	0,98	27,3	5
0,11	32,5	—	32,2	0,99	30,3	5
0,10	34,3	2,712	34,1	0,99	33,3	4

Dok postoji kritična brzina, dakle dok je $c > 0$, omjer između završne i početne brzine ne mijenja se mnogo :
($0,96 < \kappa < 0,99$).

U ovom je primjeru razmak između početne brzine v_a i kritične brzine c malen, κ se mijenja doduše mnogo osjetljivije nego u prvom primjeru, gdje je taj razmak bio velik, nu opet ne toliko, da se nebi mogla uzeti srednja njegova vrijednost $\kappa = 0,975$ kao konstanta u račun i u ovom slučaju. To znači, da je praktički dovoljno izračunati vrijednost κ samo za jednu vrijednost koeficijenta trenja u intervalu $0,13 > \mu > 0,10$, t. j. u intervalu, u kojem je $c > 0$. U slučaju $c = 0$, $tga = \mu$, račun po formuli 96.) nije težak, ne iziskuje mnogo posla, a služi i kao kontrola za prvu izračunatu srednju vrijednost κ . Za preostale vrijednosti koeficijenta trenja $tga < \mu$, omjer između konačne i početne brzine naglo pada. U tom je intervalu kočno djelovanje krivulje snažno, a najvažniji će biti pošao pronaći

vrijednost koeficijenta trenja, uz koju će sustati tijelo u krivulji (ovdje $\mu = 0,19$).

U tu svrhu služi kriterij $\tau \leq 1$; jer je za onu vrijednost μ , za koju je $\tau = 1$, brzina tijela jednaka ničtici na kraju luka. U ovom je primjeru razmjerno velika i najmanja zadana brzina. Uz manju početnu brzinu izbilo bi kočno djelovanje ove krivulje još snažnije. Krivulja nagiba $\text{tga} < \mu$ može se osnovati samo uz veliku početnu brzinu na otvorenoj pruzi. Osnivati se mogu dakle ovakove krivulje samo uz određeni oprez. No i uz sve mjere opreza kapacitet ovakove krivulje je vrlo malen obzirom na dužinu drveta, koje se otprema. Jasno to dokazuje ovaj primjer. U posljednjem vertikalnom stupcu iskazane su dužine drveta l , koje se može otpremati u razno doba, već prema vrijednosti koeficijenta trenja. Velika je početna brzina potrebna, da se svlada kočno djelovanje ovakove krivulje. Uz veliku brzinu velik je poprečan nagib β . Dužina drveta je pak s tim manja, čim je veći poprečan nagib. Ova dakle krivulja može poslužiti za otpremu tek razmjerno kratkog drveta. Bolje je zbog toga držati se već spomenutog pravila i osnovati užljebinu u krivulji na otvorenoj pruzi samo-tamo, gdje je početna brzina malena, a može se upotrijebiti veliki polumjer i uzdužan nagib, veći od najvećeg koeficijenta trenja, koji još dolazi u obzir. Na taj način doskočit će se kočnom djelovanju krivulje, a podignuti kapacitet putoklizine obzirom na dužinu drveta, koje se otprema.

3. primjer. Treba odrediti poprečan profil užljebine, putoklizine u krivulji drugog primjera. Najvećoj brzini od 34,3 m/sec pripada poprečan nagib, prema jednadžbi 40.)

$$\text{tg}\beta_1 = \frac{34,3^2}{9,81 \cdot 100} = 1,199.$$

Odgovarajući koeficijent nagiba iznosi po formuli 9.):

$$v_{\min} = \frac{0,15}{\sqrt{1 + \frac{1,199^2}{1 + 0,15^2}}} = 0,0967; v_{\min}^2 = 0,00935; v_{\min}^3 = 0,000904$$

Najmanjoj brzini od 10,5 m/sec pripada poprečan nagib

$$\text{tg}\beta_2 = \frac{10,5^2}{9,81 \cdot 100} = 0,113$$

i koeficijent nagiba:

$$v_{\max} = \frac{0,15}{\sqrt{1 + \frac{0,113^2}{1 + 0,15^2}}} = 0,1491; v_{\max}^2 = 0,02223; v_{\max}^3 = 0,003315$$

Nadalje je $v_{\max}^3 - v_{\min}^3 = 0,002411$.

Horizontalna projekcija širine puta neka mjeri $d = 0.6$ m.

Onda je:

$$\frac{d}{\cos \alpha} = 0,6 \sqrt{1 + 0,15^2} = 0,6067.$$

Koordinate poprečnog profila mjere pak po jednadžbama 36.):

$$\xi = \frac{v^3}{0,002411} \cdot 0,6; \quad \eta = \frac{(0,0225 - v^2)^{3/2}}{0,002411} \cdot 0,6067.$$

Za $v = v_{\min} = 0,0967$ izlaze kordinate tačke 1 (slika 12) sa:

$$\xi_1 = \frac{0,000904}{0,002411} \cdot 0,6 = 0,225;$$

$$\eta_1 = \frac{(0,0225 - 0,00935)^{3/2}}{0,002411} \cdot 0,6067 = 0,379$$

Za $v = v_{\max} = 0,1491$ izlaze koordinate tačke 2 sa:

$$\xi_2 = \frac{0,003315}{0,002411} \cdot 0,6 = 0,825;$$

$$\eta_2 = \frac{(0,0225 - 0,02223)^{3/2}}{0,002411} \cdot 0,6067 = 0,001.$$

Kao kontrola služi: $\xi_2 - \xi_1 = 0,825 - 0,225 = 0,6 = d$.

Visinska razlika između tačke 1 i 2 mjeri:

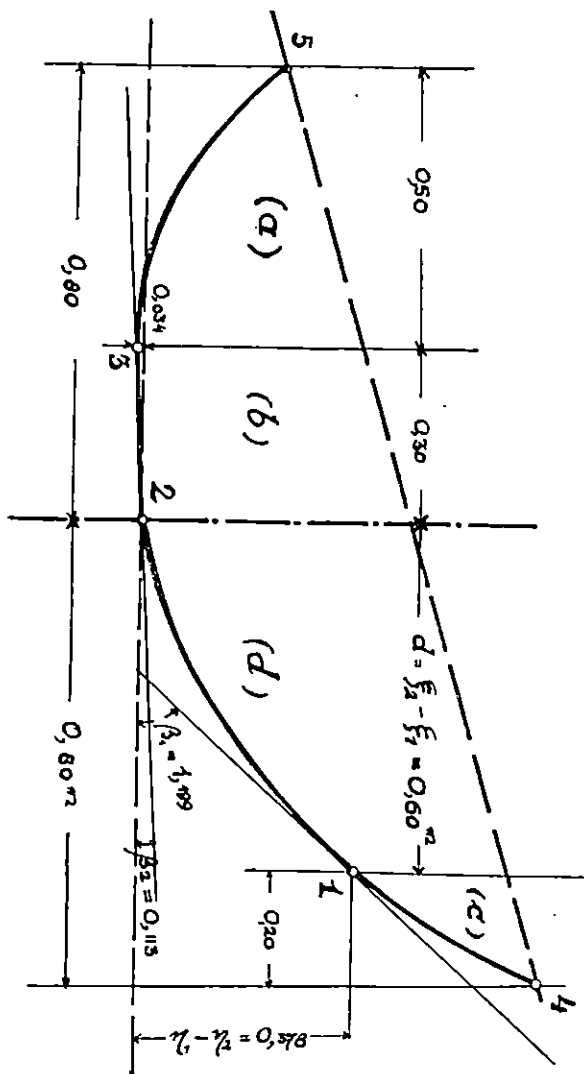
$$\eta_1 - \eta_2 = 0,379 - 0,001 = 0,378 \text{ m.}$$

Slika 12. pedočuje taj poprečan profil. Dijeli se u četiri dijela. Srednji dio (b) izveden je u pravcu nagiba $\tan \beta_2 = 0,113$ prema horizontali. Njegova širina treba da je svakako veća od $f = \frac{l^2}{8r}$ (isporedi formulu 46). Inače ne leži drvo sa obim kra-

jevima na njemu, klizeći sa najmanjom brzinom, što se pretpostavlja u računu. U ovom je slučaju $l = 10$ m, a $f = 0,125$ m. Dakle je odabrana širina tog dijela sa 0,30 m dovoljno velika. Ordinata tačke 3 mjeri, obzirom na horizontalu, povučenu kroz tačku 2, $y_3 = 0,3 \tan \beta_2 = 0,034$ m. Desni dio užljebine (d) izveden je u obliku evolute elipse. Ordinata tačke 1 mjeri, obzirom na horizontalu, povučenu kroz tačku 2,

$y_1 = \eta_1 - \eta_2 = 0,378$ m. U toj tački konstruirana je tangenta pod nagibom $\tan \beta_1 = 1,199$, a krivulja ucrtana je uz tangente u tački 1 i 2 s pomoću šablone, koja najbolje pristaje. U tom dijelu klizi drvo najčešće. Treba ga izvesti dakle naitačnije i najsolidnije. Treći dio (c) nastavak je šablonom ucrtane evo-

lute na dužinu od 0,20 m u horizontalnoj projekciji. Potreban je, da drvo ne izlazi iz užljebine, kada klizi sa predviđenom najvećom brzinom tangirajući tačku 1, ili sa napredviđenom



Slika 12.

još većom brzinom, izdižući se iznad te tačke. Ova je krivulja kočna. Dobro će doći još i mali nasip od zgodnog materijala uz gornji rub užljebine, da se spriječi izlaz drvetu iz užljebine u svakom slučaju sigurno. Mala kakva zapreka može biti po-

vod, da drvo izađe iz putoklizine, ako nije vanjska stijena užljebine dovoljno visoka. U četvrtom dijelu (*a*) leži drvo, kada uđe u krivulju sa manjom brzinom od najmanje predviđene, te, izgubivši i tu, sustane u užljebini. Oblik i veličina tog dijela zavisit će najčešće o obliku tla, u kome je užljebina izvedena. $D = 1,60$ m označuje ukupnu širinu užljebine u horizontalnoj projekciji. Točka 2 smještena je svrsi shodno u uzdužnu osovinu putoklizine. Za konstrukciju poprečnog profila praktički je dovoljno dakle izračunati $tg\beta_2$, y_1 i y_3 . Ostalo nada se iz konstrukcije samo po sebi.

4. primjer. Pred krivuljom nalazi se $d = 250$ m dugačak pravac (mjereno u horizontalnoj projekciji) nagiba $tg\alpha = 0,36$. Krivulja je kružnica polumjera $r = 100$ m, centričnog kuta $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dužina krivulje (osovine putoklizine) mjeri dakle: 157,08 m. Putoklizina providena je sa švarcvaldskim profilom, a želi se, da funkcionira za vrijednosti koeficijenta trenja podloge u intervalu $0,17 \leq \mu_1 \leq 0,35$, i za vrijednosti koeficijenta trenja stijene braniča u intervalu $0,15 \leq \mu_2 \leq 0,27$. Krivulja se nalazi na otvorenoj pruzi.

Najprije je izračunata brzina na kraju pravcu ujedno i brzina na početku krivulje v_a s pomoću formule 118.) u zadanom intervalu koeficijenta trenja μ_1 , u formi skrižaljke 6. Zatim je određen uzdužni nagib krivulje prema minimalnoj brzini, uz koju se još želi, da putoklizina radi i to tako, da se tijelo ne izdiže sa putoklizine, jer se krivulja nalazi na otvorenoj pruzi. Da se to postigne sigurno, računat je taj nagib (po formuli 58.) sa rezultatom:

$$tg\alpha \geq 0,35 + \frac{0,27}{\sqrt{1 + 0,35^2}} \cdot \frac{5}{100} = 0,362,$$

a odabran je zaokruženo prema gore sa $tg\alpha = 0,365$. Ova formula vrijedi za slučaj, kada tijelo klizi na podlozi jednolično, dotičući se i stijene braniča. Dakle za slučaj, kada je početna i kritična brzina jednako velika. U tom slučaju nema kočnog djelovanja, a da to bude još sigurnije, zaokružena je izračunata vrijednost nagiba prema gore. Kod putoklizine ovog tipa poprečan nagib nema osobitog značenja. Može izostati. Osnuje li se ipak, određuje se po najmanjoj brzini i po formuli 13.), na pr. u ovom slučaju sa

$$tg\beta = \frac{5}{100} = 0,05, \quad \text{t. j.}$$

toliko malen, da nema praktičnog utjecaja na daljnji račun. Zbog toga je određen već i uzdužni nagib po formuli 58.) t. j. bez obzira na poprečan nagib, da zadovoljava i slučaju, kada se tijelo dotiče i stijene braniča, klizeći u krivulji. Kritična

brzina izračunata je po formuli 57.) ne uzevši utjecaj poprečnog nagiba. Ta formula poprima oblik u ovom primjeru:

$$\frac{c^2}{k} = \frac{0.365 - \mu_1}{\mu_2}$$

Vrijednost konstante putoklazine iznosi pak:

$$k = 100 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{1 + 0,365^2} = 1044.$$

Tako izračunati rezultati u zadanom intervalu koeficijenata trenja sabrani su u skrižaljci 6.

Skrižaljka 6.

μ_1	$\frac{v_a^2}{g}$	v_a^2	v_a	$\operatorname{tg} \alpha - \mu_1$	μ_2	$\frac{c^2}{k}$	c^2	c
0,35	5	49,0	7,0	0,015	0,270	0,0555	57,9	7,6
0,34	10	98,0	9,9	0,025	0,263	0,0951	99,3	10,0
0,33	15	146,4	12,1	0,035	0,256	0,1367	142,7	11,9
0,32	20	196,0	14,0	0,045	0,250	0,1800	187,9	13,7
0,31	25	246,5	15,7	0,055	0,243	0,2263	236,2	15,4
0,30	30	295,8	17,2	0,065	0,236	0,2754	287,5	17,0
0,29	35	342,3	18,5	0,075	0,230	0,3261	340,4	18,5
0,28	40	392,0	19,8	0,085	0,223	0,3812	398,0	19,9
0,27	45	441,0	21,0	0,095	0,216	0,4398	459,1	21,4
0,26	50	488,4	22,1	0,105	0,210	0,5000	522,0	22,8
0,25	55	538,2	23,2	0,115	0,203	0,5665	591,4	24,3
0,24	60	590,5	24,3	0,125	0,196	0,6378	665,9	25,8
0,23	65	640,0	25,3	0,135	0,190	0,7105	741,8	27,2
0,22	70	686,4	26,2	0,145	0,183	0,7923	827,2	28,8
0,21	75	734,4	27,1	0,155	0,176	0,8807	919,5	30,3
0,20	80	784,0	28,0	0,165	0,170	0,9706	1013,3	31,8
0,19	85	835,2	28,9	0,175	0,163	1,0736	1120,8	33,5
0,18	90	882,1	29,7	0,185	0,156	1,1859	1238,1	35,2
0,17	95	930,3	30,5	0,195	0,150	1,3000	1357,2	36,8

Brzina na kraju luka računa se po formuli 65a.) i to opet u obliku skrižaljke 7.

Skrižaljka 7.

μ_2	$2\mu_2\varphi$	$2\mu_2\varphi \cos\alpha$	$\frac{2\mu_2\varphi \cos\alpha}{e}$	$\frac{c^2 - v_a^2}{e}$	$\frac{c^2 - v_a^2}{2\mu_2\varphi \cos\alpha}$	v_b^2	v_b	v_a	$k = \frac{v_b}{v_a}$
0,270	0,8482	—	—	8,9	—	—	—	7,0	—
0,263	0,8262	—	—	1,3	—	—	—	9,9	—
0,256	0,8042	—	—	— 3,7	—	—	—	12,1	—
0,250	0,7854	—	—	— 8,1	—	—	—	14,0	—
0,243	0,7634	—	—	—10,3	—	—	—	15,7	—
0,236	0,7414	—	—	— 8,3	—	—	—	17,2	—
0,230	0,7226	—	—	— 1,9	—	—	—	18,5	—
0,223	0,7006	—	—	6,0	—	—	—	19,8	—
0,216	0,6786	0,637	1,891	18,1	9,6	449,5	21,2	21,0	1,01
0,210	0,6594	0,619	1,857	33,6	18,1	503,9	22,4	22,1	1,01
0,203	0,6377	0,599	1,820	53,2	29,2	562,2	23,7	23,2	1,02
0,196	0,6158	0,578	1,783	75,4	42,3	623,6	25,0	24,3	1,03
0,190	0,5969	0,560	1,751	101,8	58,1	683,7	26,1	25,3	1,03
0,183	0,5749	0,540	1,716	140,8	82,1	745,1	27,3	26,2	1,04
0,176	0,5529	0,519	1,681	185,1	110,1	809,4	28,4	27,1	1,05
0,170	0,5341	0,502	1,652	229,3	138,8	874,5	29,6	28,0	1,06
0,163	0,5121	0,481	1,618	285,6	176,5	944,3	30,7	28,9	1,06
0,156	0,4901	0,460	1,584	356,0	224,7	1013,4	31,8	29,7	1,07
0,150	0,4712	0,442	1,555	426,9	274,5	1082,7	32,9	30,5	1,08

Po toj formuli izračunata je brzina na kraju luka v_b samo za vrijednosti koeficijenta trenja $\mu_2 = 0,216 - 0,150$, t. j. za vrijednosti, uz koje je diferencija između kritične brzine i početne brzine relativno velika. Za ostale vrijednosti $\mu_2 = 0,270 - 0,223$ račun o konačnoj brzini nije bio potreban, jer je diferencija između kritične i početne brzine relativno

tako malena, da će se brzina na kraju luka jedva razlikovati od brzine na početku luka. Iz ovog se primjera vidi, da je za vrijednosti početne brzine 12,1, 14,0, 15,7, 17,2 i 18,5 odgovarajuća kritična brzina nešto manja, iako je nagib putoklizine određen uz uvjet $v_{amin} < c_{min}$. U ovom slučaju najveća takova diferencija iznosi samo $15,7 - 15,4 = 0,3$ m/sec. Tijelo će dakle proći ovu krivulju uz neznatno ili nikakovo izdizanje bez smetnje. Općenito se ali može desiti, da bude ta diferencija veća t. j. da nije mjerodavna za određenje uzdužnog nagiba najmanja početna brzina, nego koja možda i veća od ove. U takovom slučaju valja nagib povećati prema toj brzini, a račun obnoviti. Sve to zavisi o vrijednostima koeficijenata trenja μ_1 i μ_2 , koje mogu stojati u vrlo različitom međusobnom odnosu kod putoklizine ovakovog tipa. U ovom primjeru određen je taj odnos na sljedeći način:

Po Försteru kreće se vrijednost koeficijenta trenja na podlozi od tvrdog, čvrstog tla, prostog od kamena i vegetacije u granicama od 0,16 do 0,48 za suho drvo, bez kore. Dolinja granica odnosi se na vlažno, a gornja na suho takovo tlo. Po Petrascheku iznosi pak koeficijent trenja u drvenom točilu 0,15, ako je vlažno, a 0,35, ako je suho. Pretpostavilo se je, da iznosi vrijednost koeficijenta trenja $\mu_1 = 0,17 - 47$ za podlogu putoklizine, a $\mu_2 = 0,15 - 0,35$ za stijenu drvenih braniča istodobno. Međuvrijednosti linearno su interpolirane obostrano u granicama, u kojima se traži da putoklizina radi.

Iz tablice IV izlazi, uz $v_a = 7,0$ m/sec i $r = 100$ m, da se može otpremati ovom putoklizinom 22 m dugo drvo, ako je 2,0 m široka, 17 m dugo drvo, ako je 1,2 m široka, a 13 m dugo drvo, ako je 0,80 m široka. Otpremati se može tako dugačko drvo i onda, kada je brzina veća od minimalne (7,0 m/sec), dakle u z s v e i s k a z a n e b r z i n e, bez razlike. To dolazi otuda, što je poprečan nagib, koji utječe na dužinu drveta vrlo osjetljivo, konstantan i udešen po najmanjoj brzini švarcvaldskog profila. Njegov se utjecaj ne mijenja dakle sa brzinom. Drukčije stoji ta stvar kod užljebine, gdje poprečan nagib nije konstantan, nego se mijenja sa brzinom. To se najbolje vidi, ako se prispodobi kapacitet putoklizine u krivulji obzirom na dužinu drveta u ovom i u drugom promjeru. Obje kružnice imaju isti polumjer od 100 m. Dok može ovdje iznositi najveća dužina drveta 22 m, tamo samo 10 m i to baš zbog utjecaja poprečnog nagiba. Sam po sebi izlazi otuda nauk, da treba napustiti užljebinu, a redovno upotrijebiti švarcvaldski profil, sa što manjim poprečnim nagibom, u krivulji i onda, kada je putoklizina izvedena u obliku užljebine u ostalom svom dijelu, dakle i kod zimskih putoklizina.

Iskazane vrijednosti koeficijenta brzine κ , u posljednjem vertikalnom stupcu skrižaljke, pokazuju konačno, da se ko-

načna brzina v_b doista malo mijenja prema početnoj brzini v_a , kako se je uztvrdilo u teoretskom dijelu rasprave.

Kočno djelovanje putoklizine, providene sa švarcvaldskim profilom u krivulji, promatra se u slijedećem primjeru.

5. primjer. Putoklizina kao u prijašnjem primjeru: kružnica polumjera od 100 m, centričnog kuta $\frac{\pi}{2}$ u horizontalnoj projekciji. Početna brzina i interval koeficijenata trenja, uz koji se želi, da putoklizina radi, isti kao tamo. Razlikuje se samo uzdužni nagib, koji se u ovom primjeru odabire sa $\text{tg}\alpha = 0,34$. Utjecaj poprečnog nagiba $\text{tg}\beta = 0,05$ zanemaruje se. Kritična brzina računa se po formuli 57.) koja, poprima oblik:

$$\frac{c}{k} = \frac{0,340 - \mu_1}{\mu_2}$$

Konstanta putoklizine mjeri: $k = 100 \cdot 9,81 \sqrt{1 + 0,34^2} = 1036$. Račun i rezultati u zadanom intervalu koeficijenata iskazani su u skrižaljci 8.

Brzina na kraju luka v_b izračunata je s upotrebom formule 65a.), a unešeni su u istu skrižaljku samo rezultati u zadanom intervalu. U posljednjem vertikalnom stupcu iskazan je konačno omjer između brzine na kraju i na početku luka κ

Po tom se omjeru vidi, da ova krivulja djeluje kočno za sve vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 od 0,35 do 0,23 uključivo. Za $\mu_1 = 0,22$ klizi drvo jednolično, a samo za vrijednosti koeficijenta trenja $\mu_1 = 0,21 - 0,17$ sa pospješenjem. Najsnažnije je kočno djelovanje za $\mu_1 = 0,35 > \text{tg}\alpha = 0,34$. Vrijednost κ brzo pada za sve vrijednosti $\mu_1 > \text{tg}\alpha$, a raste polagano i gotovo linearno za vrijednosti $\mu_1 < \text{tg}\alpha$. Kočno djelovanje pada dakle zajedno sa koeficijentom trenja μ_1 i prestaje kod njegove vrijednosti $\mu_1 = 0,22$. Za sve vrijednosti v_a , μ_1 i μ_2 brzina na kraju luka v_b veća je od ničice, unatoč kočnom djelovanju krivulje. U većem dijelu intervala kritična brzina manja je od početne brzine. Akceleracija biti će dakle negativna u tom dijelu i zbog toga treba se pobrinuti za dovoljno visoku stijenu od braniča, da se spriječi ispad drveta.

6. primjer. Putoklizina izvedena je u horizontalnoj kružnici polumjera $r = 100$ m, a providena je sa švarcvaldskim profilom. Centrični kut mjeri $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Zadani interval koeficijenata trenja $0,17 \leq \mu_1 \leq 0,26$ i $0,150 \leq \mu_2 \leq 0,276$. Treba odrediti početnu brzinu v_a tako, da bude brzina na kraju luka $v_b = 0$. U obzir dolazi onda formula 70.), koja poprima oblik, za $v = 0$:

Skrizaljka 8:

μ_1	$\operatorname{tg} \alpha - \mu_1$	μ_2	$\frac{c^2}{k}$	c^2	c	v_a	v_b	$\kappa = \frac{v_b}{v_a}$
0,35	-0,01	0,270	-0,0370	-38,3	-	7,0	0,9	0,13
0,34	0	0,263	0	0	0	9,9	6,7	0,68
0,33	0,01	0,256	0,0391	40,5	6,4	12,1	9,5	0,79
0,32	0,02	0,250	0,0800	82,9	9,1	14,0	11,7	0,84
0,31	0,03	0,243	0,1235	127,9	11,3	15,7	13,6	0,87
0,30	0,04	0,236	0,1695	175,6	13,3	17,2	15,3	0,89
0,29	0,05	0,230	0,2174	225,2	15,0	18,5	16,8	0,91
0,28	0,06	0,223	0,2691	278,8	16,7	19,8	18,4	0,93
0,27	0,07	0,216	0,3241	335,7	18,3	21,0	19,8	0,94
0,26	0,08	0,210	0,3810	394,7	19,9	22,1	21,1	0,95
0,25	0,09	0,203	0,4433	459,3	21,4	23,2	22,4	0,97
0,24	0,10	0,196	0,5102	528,6	23,0	24,3	23,7	0,98
0,23	0,11	0,190	0,5789	599,7	24,5	25,3	25,0	0,99
0,22	0,12	0,183	0,6557	679,3	26,1	26,2	26,2	1,00
0,21	0,13	0,176	0,7386	765,2	27,7	27,1	27,3	1,01
0,20	0,14	0,170	0,8235	853,1	29,2	28,0	28,5	1,02
0,19	0,15	0,163	0,9202	953,3	30,9	28,9	29,7	1,03
0,18	0,16	0,156	1,0256	1062,5	32,6	29,7	30,8	1,04
0,17	0,17	0,150	1,1333	1174,1	34,3	30,5	31,9	1,05

$$v_a^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{\frac{2\mu_2 \varphi}{\mu_1}} - 1) rg \quad 119.]$$

Tražena početna brzina iznosi u zadanom intervalu. a računata po ovoj formuli, kako je iskazano u skrizaljci 9.

Kočno djelovanje ovakove krivulje vrlo je snažno. Unatoč velike početne brzine sustane tijelo u njoj. Znade li se u konkretnom slučaju početna brzina v_a' , može se prosuditi iz skrizaljke, da li će tijelo proći ovakovu krivulju ili sustati u njoj, već prema tome, da li je $v_a' \geq v_a$. Krivulje snažnog kočnog djelovanja stavljaju se redovno na kraj putoklizine, gdje se poništi brzina, a drvo istovaruje. Tijelo se izdiže u takvoj

Skrizaljka 9.

μ_1	μ_2	v_a m/sec	μ_1	μ_2	v_a m/sec
0,36	0,276	42,0	0,26	0,210	33,7
0,35	0,270	41,2	0,25	0,203	32,9
0,34	0,263	40,4	0,24	0,196	32,0
0,33	0,256	39,5	0,23	0,190	31,1
0,32	0,250	38,7	0,22	0,183	30,3
0,31	0,243	37,9	0,21	0,176	29,4
0,30	0,236	37,0	0,20	0,170	28,5
0,29	0,230	36,2	0,19	0,163	27,7
0,28	0,223	35,4	0,18	0,156	26,8
0,27	0,216	34,5	0,17	0,150	25,9

krivulji s tim više, čim je veća njegova brzina. Zbog toga potrebna je visoka stijena od braniča, osobito na početku krivulje, gdje je ta brzina najveća.

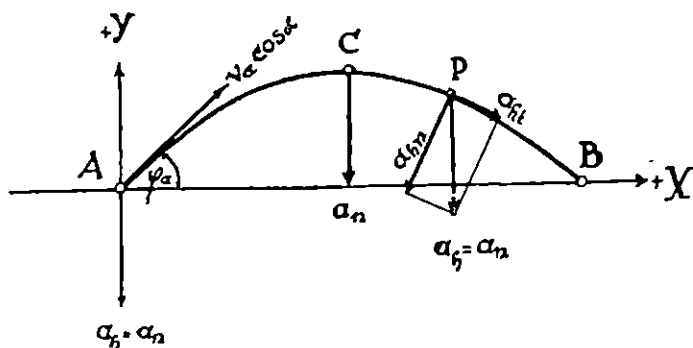
II

U ovom se dijelu promatra klizanje teškog tijela i promjena brzine na putoklizini konstantnog uzdužnog nagiba α , ako je horizontalna projekcija osovine te putoklizine inače povoljna čunjosječica.

11. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je parabola. U petoj tački određena je komponenta akceleracije u smjeru normale a_n i u smjeru tangente a_t krivulje općenitog oblika, koju opisuje težište tijela, ako klizi na podlozi uzdužnog nagiba α i poprečnog nagiba β uz uvjet, da je smjer centripetalne sile horizontalan. Te su komponente izražene kao funkcije uzdužnog nagiba α , poprečnog nagiba β , koeficijenta trenja μ i akceleracije teže g . U konkretnom slučaju su μ i g konstante, a pretpostavi li se još i konstantan uzdužan nagib α , obje su komponente funkcije samo jedne promjenljive, poprečnog nagiba β . U tom slučaju zavisi oblik krivulje samo o zakonu, po kojemu se mijenja poprečan nagib. Ili obrnuto. Odrede li se komponente akceleracije a_n i a_t tako, da tijelo opisuje krivulju konkretnog oblika, utvrđen je istodobno i zakon, po kojemu se mijenja poprečan nagib. Prelazeći na po-

stavljenju zadaću, promatra se krivulja, koju opisuje tijelo u horizontalnoj projekciji, i tu neka imade oblik parabole.

Tijelo opisuje parabolu, kako je poznato, ako imade određenu početnu brzinu $v_{ah} = v_a \cos \alpha$ u smjeru tangente i konstantnu akceleraciju a_{ht} paralelnu sa simetralom parabole. Tangencijalna akceleracija a_{ht} i normalna akceleracija a_{hn} treba dakle da rezultiraju ukupnu akceleraciju a_h , konstantne veličine, po smjeru paralelnu sa simetralom u svakoj tački parabole (slika 13). U vrhu parabole, u tački C , tangencijalna komponenta



Slika 13.

akceleracije a_{ht} jednaka je ničtici, a normalna komponenta a_{hn} izjednačuje se sa ukupnom akceleracijom a_h , dotično sa akceleracijom centripetalne sile a_n , koja djeluje u smjeru normale, a horizontalno prema pretpostavci. U toj je dakle tački prema formuli 42.):

$$a_h = a_{hn} = a_n = g \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta_c ; a_{ht} = 0 .$$

Jer je ali a_h konstantan vektor, imade tijelo istu tu akceleraciju po smjeru i veličini i u svakoj inoj tački parabole, dakle i u tački A , u kojoj se nalazi ishodište pravokutnog koordinatnog sistema XY . Osovina Y paralelna je sa simetralom parabole. Komponente akceleracije u toj su dakle tački:

$$\ddot{x} = 0 ; \ddot{y} = -a_h = -g \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta_c ,$$

a komponente brzine:

$$v_x = \dot{x} = v_a \cos \alpha \cos \varphi_a ; v_y = \dot{y} = v_a \cos \alpha \sin \varphi_a - a_h t .$$

Nadalje je, integrirajući još jedanput:

$$x = v_a t \cos \alpha \cos \varphi_a ; y = v_a t \cos \alpha \sin \varphi_a - \frac{a_h t^2}{2} .$$

Integracione konstante otpadaju, jer se pretpostavlja, da je za $t=0$ istodobno x i y jednak ničtici. Eliminira li se

vrijeme t iz prethodnje jednačbe i uvrsti u posljednju, dobije se jednačba parabole:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi_a - \frac{x^2}{2p},$$

gdje je
$$p = \frac{v_a^2 \cos^2 \varphi_a}{g \operatorname{tg} \beta_c} \quad 120.]$$

Uvrste li se koordinate tačke B , $x = 2b_1$, $y = 0$ u gornju jednačbu, izlazi:

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{b_1}{p}, \quad 121.]$$

a jednačba parabole poprima oblik:

$$y = \frac{x}{2p} (2b_1 - x). \quad 122.]$$

Nadalje je:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1 - x}{p}, \quad y'' = -\frac{1}{p} \quad 123.]$$

i apsolutni iznos polumjera krivosti:

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = p \left[\left(\frac{b_1 - x}{p} \right)^2 + 1 \right]^{3/2} \frac{p}{\cos^3 \varphi}. \quad 124.]$$

U vrhu parabole je $x = b_1$ ili $\varphi = 0$, $r_c = p$.

Parametar p ujedno je dakle i polumjer krivosti u vrhu parabole.

Općenita formula 40.) primjenjena na vrh parabole (tačku C) glasi:

$$p = \frac{v_c^2}{g \operatorname{tg} \beta_c}. \quad 125.]$$

Isporedi li se ova jednačba sa jednačbom 120.), izlazi:

$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{\left(\frac{b_1}{p} \right)^2 + 1}. \quad 126.]$$

Ishodište koordinatnog sistema smješteno je u povoljno odabranoj tački A . Za svaku tačku parabole vrijedi dakle snošaj:

$$\frac{v}{v_c} = \frac{1}{\cos \varphi_a} = \sqrt{\left(\frac{b_1 - x}{p} \right)^2 + 1}. \quad 127.]$$

Polumjer krivosti mjeri u povoljnoj tački parabole, (slijedi iz jednačbe 124 i 127):

$$r = \left(\frac{v}{v_c}\right)^3 p, \quad 128.]$$

a poprečan nagib (slijedi iz jednačbe 40, 128 i 125):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_c}{v} \operatorname{tg} \beta_c. \quad 129.]$$

Visina strijelice, ordinata tačke C mjeri (slijedi iz jednačbe 120 i 121): $f = \frac{b_1^2}{2p} = \frac{b_1 \operatorname{tg} \varphi_a}{2}. \quad 130.]$

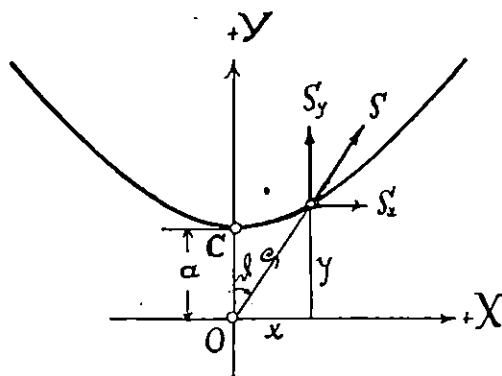
Uzdužni nagib je konstantan. Svejedno je dakle u kojoj se tački parabole određuje. Svrši shodno određuje se u vrhu gdje je $a_{ht} = 0$. Obzirom na općenitu jednačbu 43.) to je moguće samo ako je:

$$\nu = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \cos^2 a \operatorname{tg}^2 \beta_c}} = \mu.$$

Za određenje uzdužnog nagiba $\operatorname{tg} a$ mogu se upotrijebiti dakle već prije izvedene formule 14.) i 14a.), u kojima treba staviti:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_c = \frac{v_c^2}{gp} = \frac{v_a^2 \cos^2 \varphi_a}{gp}. \quad 131.]$$

12. Horizontalna projekcija osovine putoklazine je hiperbola. Na tačku P neka djeluje sila S (slika 14). Smjer te sile:



Slika 14.

prolazi stalno ishodištem O koordinatnog sistema XY . Veličina

njezina linearno je proporcionalna sa udaljenošću s tačke P od središta O . Dakle je:

$$S = mk^2 s,$$

gdje m označuje masu, a k poblize još neodređenu konstantu. Komponente akceleracije u tački P su:

$$\ddot{x} = a_{hx} = k^2 s \sin \vartheta = k^2 x; \quad \ddot{y} = a_{hy} = k^2 s \cos \vartheta = k^2 y.$$

Općenito rješenje ovih dviju diferencijalnih jednačbi glasi:

$$x = Ae^{\frac{kt}{2}} + Be^{-\frac{kt}{2}}; \quad y = Ce^{\frac{kt}{2}} + De^{-\frac{kt}{2}}. \quad 132.]$$

Integracione konstante A, B, C i D određuju se iz ovih i daljnjih dviju jednačbi komponenata brzine u istoj tački:

$$v_x = \dot{x} = kAe^{\frac{kt}{2}} - kB e^{-\frac{kt}{2}}, \quad v_y = \dot{y} = kCe^{\frac{kt}{2}} - kD e^{-\frac{kt}{2}} \quad 133.]$$

na slijedeći način:

U početku promatranja neka je vrijeme $t = 0$, a istodobno: $x = 0$, $y = a$; $v_x = v_{ch}$, $v_y = 0$.

Posljednje četiri jednačbe poprimaju onda oblik:

$$0 = A + B, \quad a = C + D, \quad v_{ch} = k(A - B), \quad 0 = C - D,$$

a iz njih slijedi:

$$A = \frac{v_{ch}}{2k}, \quad B = -\frac{v_{ch}}{2k} \quad \text{i} \quad C = D = \frac{a}{2}.$$

Uvrste li se ove vrijednosti u jednačbe 132.), izlazi:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{v_{ch}}{2k} \left(e^{\frac{kt}{2}} - e^{-\frac{kt}{2}} \right) \\ y &= \frac{a}{2} \left(e^{\frac{kt}{2}} + e^{-\frac{kt}{2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad 134.]$$

ili:

$$\frac{k}{v_{ch}} x = \sinh(kt), \quad \frac{1}{a} y = \cosh(kt) \quad *)$$

Objе ove jednačbe kvadrirane i odbijene, prva od druge, daju jednačbu hiperbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad 135.]$$

sa dužinom glavne osovine $2a$ i sa

$$b = \frac{v_{ch}}{k}. \quad 136.]$$

*) $\sinh, \cosh$ označuju hiperbolične funkcije.

Nadalje postoji u polju ovog centralnog gibanja potencijal:

$$V = - \left(S d_{\zeta} + C^{**} \right)$$

ili, ako se uvrsti vrijednost za S i izvrši integracija:

$$V = - \frac{mk^2 \zeta^2}{2} + C.$$

Neka označuje v_{ch} brzinu tijela u vrhu hiperbole, (u tački C), $v_h = v \cos \alpha$ brzinu tijela u povoljnoj tački hiperbole, a V_{ch} i V_h potencijale u tim tačkama, onda postoji daljnji snošaj:

$$V_h - V_{ch} = \frac{mv_{ch}^2}{2} - \frac{mv_h^2}{2},$$

ili uvrstivši odgovarajuće vrijednosti:

$$- \frac{mk^2 \zeta^2}{2} + \frac{mk^2 a^2}{2} = \frac{mv_{ch}^2}{2} - \frac{mv_h^2}{2}.$$

odakle se dobije brzina u povoljnoj tački hiperbole:

$$v_h^2 = v_{ch}^2 + k^2 (\zeta^2 - a^2). \quad 137.]$$

Ova se jednadžba može preobličiti u daljnje svrhe na slijedeći način:

Iz slike se razabire, da je $\zeta^2 = x^2 + y^2$, dočim slijedi iz jednadžbe 135.):

$$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} x^2,$$

dakle je $e^2 = \frac{e^2}{b^2} x^2 + a^2$, ako je $e^2 = a^2 + b^2$,

Vrijednost konstante k određena je jednadžbom 136.)

Jednadžba 137.) poprima onda oblik:

$$v_h^2 = \frac{v_{ch}^2}{b^2} \left(b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2 \right). \quad 137a.)$$

Zavede li se još numerička ekscentriciteta $\varepsilon = \frac{e}{a}$ i parametar

hiperbole $p = \frac{b^2}{a}$, namjesto konstanti b i e u gornju formulu, onda je:

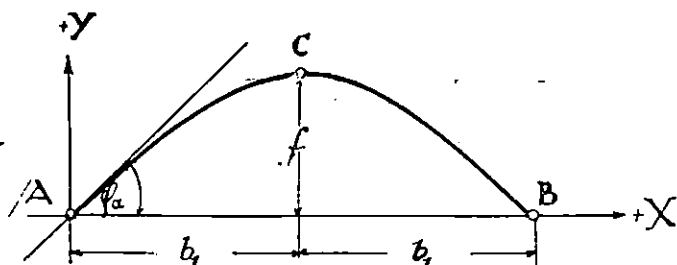
$$b^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}; \quad \frac{e^2}{b^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

a jednadžba brzine u povoljnoj tački hiperbole poprima konačan oblik:

**] C označuje integracionu konstantu.

$$v_h = v_{ch} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 x^2 + 1} \quad 138.]$$

Primjenivši ovo na putoklizinu, bolje je, da se promatra hiperbola u koordinatnom sistemu sa ishodištem u tački A, na početku krivulje, prema slici 15. analogno kao kod parabole. Jednadžba hiperbole, jedne samo potrebne grane, glasi u tom koordinatnom sistemu:



Slika 15.

$$y = \frac{a}{b} \left[\sqrt{b_1^2 + b^2} - \sqrt{(x - b_1)^2 + b^2} \right] \quad 139.]$$

Nadalje je:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = - \frac{a}{b} \frac{x - b_1}{\sqrt{(x - b_1)^2 + b^2}} = - \frac{x - b_1}{p \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} (x - b_1)^2 + 1}} \quad 140.]$$

$$\text{dakle je: } \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} (x - b_1)^2} = - \frac{x - b_1}{p \operatorname{tg} \varphi} ; \quad 140a.]$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = - \frac{x - b_1}{p \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} (x - b_1)^2 + 1}} \quad 141.]$$

$$\text{dakle je: } \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} (x - b_1)^2 + 1} = - \frac{x - b_1}{p \sin \varphi} \quad 141a.]$$

Jednadžba brzine u povoljnoj tački hiperbole poprima oblik u ovom koordinatnom sistemu (stavi li se $x - b_1$ namjesto x u jednadžbi 138.):

$$\frac{v_h}{v_{ch}} = \frac{v \cos \alpha}{v_c \cos \alpha} = \frac{v}{v_c} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 (x - b_1)^2 + 1} = - \frac{x - b_1}{p \sin \varphi} \quad 142.]$$

Na početku krivulje bit će, za $x = 0$:

$$tg\varphi_a = \frac{b_1}{p\sqrt{\frac{\varepsilon^2-1}{p^2}b_1^2+1}}, \quad 143.) \quad \sin\varphi_a = \frac{b_1}{p\sqrt{\frac{\varepsilon^2-1}{p^2}b_1^2+1}}, \quad 144.)$$

$$\frac{v_a}{v_c} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2}b_1^2+1} = \frac{b_1}{psin\varphi_a} \quad 145.)$$

Drugi izvod jednadžbe 139.) glasi:

$$y'' = - \frac{ab}{[(x-b_1)^2+b^2]^{3/2}}$$

a apsolutni iznos polumjera krivosti:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{1}{ab^3} [e^2(x-b_1)^2+b^4]^{3/2} = \\ &= p \left[\frac{\varepsilon^2}{p^2}(x-b_1)^2+1 \right]^{3/2} = p \left(\frac{v_a}{v_c} \right)^3. \end{aligned} \quad 146.)$$

$$\text{Na početku krivulje je: } r_a = p \left(\frac{v_a}{v_c} \right)^3, \quad 147.)$$

$$\text{a na vrhu u tački C, } r_c = p \quad 147a.)$$

Parametar p ujedno je dakle i polumjer krivosti u vrhu hiperbole.

Iz općenite formule 40.) slijedi:

$$tg\beta_c = \frac{v_c^2}{gp} \quad 148.)$$

Št. dalje obzirom na jednadžbu 146.) mjeri poprečan nagib putoklizine u povoljnoj tački hiperbole:

$$tg\beta = \frac{v_c}{v} tg\beta_c \quad 149.)$$

Visina strijelice u vrhu hiperbole, ordinata tačke C, mjeri (iz jednadžbe 139, za $x=b_1$):

$$t = a \left[\sqrt{\frac{b_1^2}{b^2}+1} - 1 \right] = \frac{p}{\varepsilon^2-1} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon^2-1}{p^2}b_1^2+1} - 1 \right].$$

Obzirom na jednadžbu 143.) i 145.) može se svesti ova formula još i na oblik:

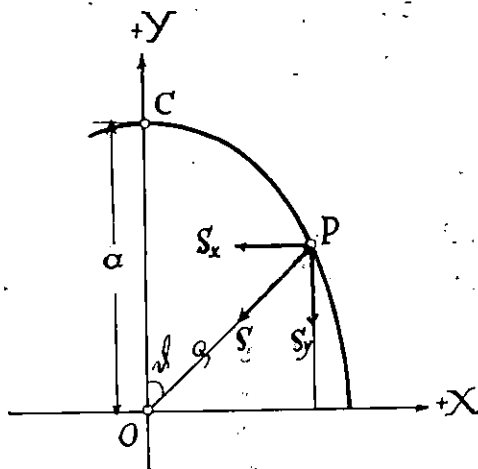
$$f = \frac{b_1^2 tg\varphi_a}{b_1 + p tg\varphi_a} = \frac{b_1 sin\varphi_a}{cos\varphi_a + \frac{v_c}{v_a}} \quad 150.)$$

Uzdužni nagib $tg\alpha$ određuje se iz jednadžbe 14.) ili 14a.), u kojima treba staviti

$$tg\beta = tg\beta_c = \frac{v_c^2}{gp},$$

a v_c odrediti iz jednadžbe 145.). Obrazloženje vidi na kraju tačke 11.

13. Horizontalna projekcija osovine putoklazine je osovljena elipsa. Postanak elipse zamišlja se analogno kao postanak hiperbole. Na tačku P neka djeluje sila S . Smjer te sile prolazi stalno ishodištem O koordinatnog sistema X, Y (sl. 16). Veličina njezina je proporcionalna sa udaljenošću ρ tačke



Slika 16.

P od ishodišta O . Dakle je

$$S = -mk^2\rho$$

gdje m označuje masu, a k poblize još neodređenu konstantu. Komponente akceleracije u tački P su:

$$\ddot{x} = a_{hx} = -k^2\rho\sin\vartheta = -k^2x; \quad \ddot{y} = a_{hy} = -k^2\rho\cos\vartheta = -k^2y.$$

Općenito rješenje ovih dviju diferencijalnih jednadžbi glasi:

$$x = A\sin kt + B\cos kt; \quad y = C\sin kt + D\cos kt \quad (151.)$$

Integraciona konstante A, B, C i D određuje se iz ovih i daljnjih jednadžbi, komponenata brzine u istoj tački:

$$\dot{v}_x = \dot{x} = kA\cos kt - kB\sin kt; \quad v_y = \dot{y} = kC\cos kt - kD\sin kt.$$

(152.)

na slijedeći način: U početku promatranja neka je vrijeme $t=0$, a istodobno:

$$x=0, y=a; v_x=v_{ch}, v_y=0.$$

Posljednje četiri jednačbe poprimaju onda oblik:

$$0=B; a=D; v_{ch}=kA; 0=kC,$$

a iz njih slijedi:

$$A=\frac{v_{ch}}{k}; B=C=0; D=a.$$

Uvrste li se ove vrijednosti u jednačbe (151.), izlazi:

$$\frac{x}{\frac{v_{ch}}{k}} = \sin kt, \quad \frac{a}{y} = \cos kt. \quad 153.]$$

Objek ove jednačbe, kvadrirane i zbrojene, daju jednačbu osovljene elipse:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad 154.]$$

sa polovicom dužine velike osovine a , odnosno male osovine:

$$b = \frac{v_{ch}}{k}. \quad 155.]$$

U polju ovog centralnog gibanja postoji potencijal:

$$V = - \int S d\sigma + C,$$

ili, ako se uvrsti vrijednost za S , a izvrši integracija:

$$V = -\frac{mk^2e^2}{2} + C.$$

Označuje li v_{ch} brzinu tijela u vrhu elipse, u tački C ; $v_h = v \cos \alpha$ brzinu tijela u povoljnoj tački elipse, a V_{ch} i V_h odgovarajuće potencijale, postoji daljnji odnos:

$$V_h - V_{ch} = \frac{mv_{ch}^2}{2} - \frac{mv_h^2}{2},$$

ili uvrstivši odgovarajuće vrijednosti:

$$\frac{mk^2e^2}{2} - \frac{mk^2a^2}{2} = \frac{mv_{ch}^2}{2} - \frac{mv_h^2}{2}$$

Odavle izlazi jednačba brzine u povoljnoj tački elipse:

$$v_h^2 = v_{ch}^2 + k^2(a^2 - e^2). \quad 156.$$

Uzme li se u obzir, da je $e^2 = x^2 + y^2$, a iz jednačbe 154.)

$y^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2$, dakle, da je $e^2 = a^2 - \frac{e^2}{b^2} x^2$, ako je $e^2 = a^2 - b^2$, zatim uzme li se vrijednost konstante k iz jednadžbe 155.), sređena jednadžba 156.) poprima oblik:

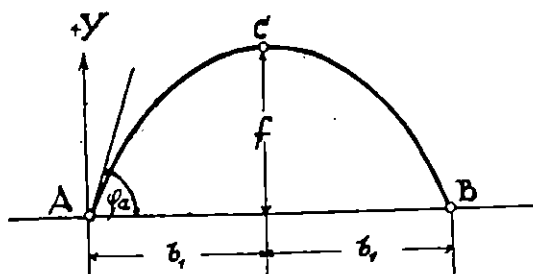
$$v_h^2 = \frac{v_{ch}^2}{b^2} (b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2). \quad 156a.)$$

Jednadžba brzine u povoljnoj tački elipse glasi konačno sređena, ako se uvede u posljednju jednadžbu numerička ekscentriciteta $\varepsilon = \frac{e}{a}$ i parametar $p = \frac{b^2}{a}$, namjesto konstanti b i e :

$$v_h = v_{ch} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 x^2 + 1}. \quad 157.)$$

Ova jednadžba i jednadžba 138.) jednake su po obliku. Razlikuju se samo po numeričkoj ekscentriciteti. Kod elipse je $\varepsilon^2 < 1$, a kod hiperbole je $\varepsilon^2 > 1$.

Primjenivši ovo na putoklizinu, promatra se elipsa u koordinatnom sistemu sa ishodištem u početnoj tački A krivulje, prema slici 17, analogno kao hiperbola i parabola u prijašnjim



Slika 17.

tačkama. Jednadžba osovljene elipse u ovom koordinatnom sistemu glasi:

$$y = \frac{a}{b} \left[\sqrt{b^2 - (x - b_1)^2} - \sqrt{b^2 - b_1^2} \right] \quad 158.)$$

a njezin prvi izvod:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b} \frac{x - b_1}{\sqrt{b^2 - (x - b_1)^2}} = -\frac{x - b_1}{p \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} (x - b_1)^2}} \quad 159.)$$

$$\text{Dakle je: } \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} (x - b_1)^2} = -\frac{x - b_1}{p \operatorname{tg} \varphi}. \quad 159a.)$$

Nadalje je:

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = -\frac{x-b_1}{p\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}(x-b_1)^2}} \quad 160.]$$

Dakle je:

$$\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}(x-b_1)^2} = -\frac{x-b_1}{psin\varphi} \quad 160a.]$$

Jednadžba brzine u povoljnoj tački elipse poprima oblik u ovom koordinatnom sistemu analogno kao kod hiperbole:

$$\frac{v_h}{v_{hc}} = \frac{v}{v_c} = \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}(x-b_1)^2} = -\frac{x-b_1}{psin\varphi} \quad 161.]$$

Na početku krivulje bit će, za $x=0$:

$$tg\varphi_a = \frac{b_1}{p\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2-1}{p^2}b_1^2}} \quad 162.] \text{ ili } \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2-1}{p^2}b_1^2} = \frac{b_1}{ptg\varphi_a} \quad 162a.]$$

$$sin\varphi_a = -\frac{b_1}{p\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}b_1^2}} \quad 163.] \text{ ili } \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}b_1^2} = \frac{b_1}{psin\varphi_a} \quad 163a.]$$

$$\frac{v_a}{v_c} = \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{p^2}b_1^2} = \frac{b_1}{psin\varphi_a} \quad 164.]$$

Drugi izvod jednadžbe 158.) glasi:

$$y'' = -\frac{ab}{[b^2 - (x-b_1)^2]^{3/2}}$$

a apsolutni iznos polumjera krivosti:

$$r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{[b^2 + e^2(x-b_1)^2]^{3/2}}{ab} = p \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{p^2}(x-b_1)^2 \right]^{3/2} = \left(\frac{v}{v_c} \right)^3 p \quad 165.]$$

$$\text{Na početku krivulje je: } r_a = \left(\frac{v_a}{v_c} \right)^3 p \quad 166.]$$

$$\text{a na vrhu u tački C: } r_c = p \quad 167.]$$

Parametar p ujedno je i polumjer krivosti u vrhu osovljene elipse.

$$\text{Iz općenite formule 40.) slijedi } tg\beta_c = \frac{v_c^2}{gp} \quad 168.]$$

i dalje, poprečan nagib putoklizine u povoljnoj tački elipse, obzirom na jednadžbu 165.):

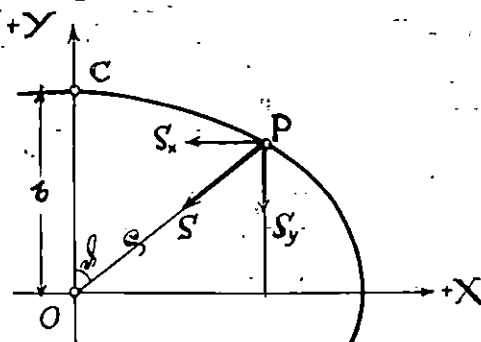
$$tg\beta = \frac{v_0}{y} tg\beta_c . \quad 169.]$$

Visina strijelice u vrhu osovljene elipse mjeri kao i kod hiperbole:

$$f = \frac{b_1^2 tg\varphi_a}{b_1 + p tg\varphi_a} = \frac{b_1 \sin\varphi_a}{\cos\varphi_a + \frac{v_0}{v_a}} . \quad 170.]$$

Uzdužni năgib $tg\alpha$ određuje se također na jednaki način kao kod hiperbole.

14. Horizontalna projekcija osovine putoklazine je ispružena elipsa. Polazi se iz jednadžbe 151.) i 152.) prijašnje tačke. U početku promatranja ($t=0$) neka je sada $y=b$, a



Slika 18.

sve ostalo isto, kao prije. Integracione konstante određene su onda iz tih jednadžbi sa:

$$A = \frac{v_{ch}}{k}, \quad B = C = O \quad i \quad D = b.$$

Jednadžbe 151.) poprimaju pak oblik:

$$\frac{x}{\frac{v_{ch}}{k}} = \sin kt, \quad \frac{y}{b} = \cos kt . \quad 171.]$$

Kvadrirane pak i zbrojene daju jednadžbu ispružene elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 172.]$$

Polovica dužine velike osovine je sada:

$$a = \frac{v_{ch}}{k} \quad 173.]$$

Jednadžba promjene potencijala i brzine glasi u ovom slučaju:

$$\frac{mk^2 e^2}{2} - \frac{mk^2 b^2}{2} = \frac{mv_{ch}^2}{2} - \frac{mv_h^2}{2},$$

a jednadžba brzine u povoljnoj tački ispružene elipse:

$$\left. \begin{aligned} v_h^2 &= v_{ch}^2 + k^2 (b^2 - e^2) = \frac{v_{ch}^4}{a^2} \left(a^2 - \frac{e^2}{a^2} x^2 \right) \\ v_h &= v_{ch} \sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2} (1 - e^2)^2 \frac{x^2}{p^2}} \end{aligned} \right\} \quad 174.]$$

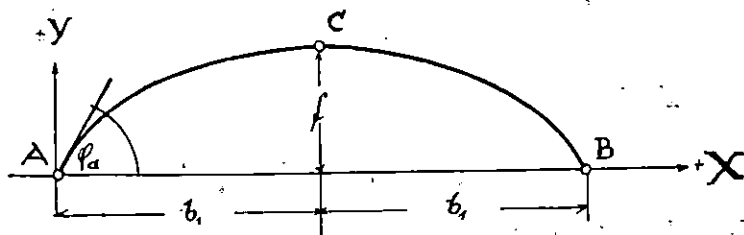
U svrhu za kojom se ide, zgodnije će biti, da se uvede radius krivosti r_c (u tački C, vrhu ispružene elipse) namjesto parametra p u formule. Između jedne i druge veličine postoji snošaj:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{b} \left(\frac{b}{a} \right)^3 = r_c (1 - e^2)^{3/2}, \quad 175.]$$

a formula 174.) poprima oblik:

$$v_h = v_{ch} \sqrt{1 - \frac{e^2 \cdot x^2}{r_c^2 (1 - e^2)}} \quad 174a.)$$

Postupajući analogno kao prije, promatra se ta elipsa u koordinatnom sistemu sa ishodištem u tački A, na početku krivulje



Slika 19.

(slika 19.) U tom koordinatnom sistemu jednadžba ispružene elipse glasi:

$$y = \frac{b}{a} [\sqrt{a^2 - (x - b_1)^2} - \sqrt{a^2 - b_1^2}], \quad 176.]$$

a njezin prvi izvod:

$$y' = tg\varphi = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x-b_1}{\sqrt{a^2 - (x-b_1)^2}} = -\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{p} \cdot \frac{x-b_1}{\sqrt{1 - \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{p^2}(x-b_1)^2}} = -\frac{1}{r_c} \cdot \frac{x-b_1}{\sqrt{1 - \frac{(x-b_1)^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}}} \quad 177.]$$

Dakle je:

$$\sqrt{1 - \frac{(x-b_1)^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}} = -\frac{x-b_1}{r_c tg\varphi} \quad 177a.)$$

Nadalje je:

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = -\frac{x-b_1}{r_c \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2(x-b_1)^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}}} \quad 178.]$$

Dakle je:

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2(x-b_1)^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}} = -\frac{x-b_1}{r_c \sin\varphi} \quad 178a.)$$

Jednadžba brzine 174a.) glasi u ovom koordinatnom sistemu, obzirom na jednadžbu 178a.):

$$\frac{v_h}{v_{hc}} = \frac{v}{v_c} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2(x-b_1)^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}} = -\frac{x-b_1}{r_c \sin\varphi} \quad 179.]$$

Na početku krivulje je, za $x=0$:

$$tg\varphi_a = \frac{b_1}{r_c \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}}} \quad 180.]$$

Dakle je:

$$\sqrt{1 - \frac{b_1^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}} = \frac{b_1}{r_c tg\varphi_a} \quad 180a.)$$

Nadalje je u istoj tački:

$$\sin\varphi_a = \frac{b_1}{r_c \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 b_1^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}}} \quad 181.]$$

Dakle je:

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 b_1^2}{r_c^2(1-\varepsilon^2)}} = \frac{b_1}{r_c \sin\varphi_a} \quad 181a.)$$

A onda je:

$$\frac{v_a}{v_c} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 b_1^2}{r_c^2 (1 - \varepsilon^2)}} = \frac{b_1}{r_c \sin \varphi_a} \quad 182]$$

Drugi izvod jednadžbe 176.) glasi:

$$y'' = - \frac{ab}{[a^2 - (x - b_1)^2]^{3/2}} .$$

apsolutni pak iznos polumjera krivosti iznosi:

$$r = \frac{(1 + y''^2)^{3/2}}{y''} = \frac{a^2}{b} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 (x - b_1)^2 \right]^{3/2} = \quad 183.]$$

$$= r_c \left[1 - \frac{\varepsilon^2 (x - b_1)^2}{r_c^2 (1 - \varepsilon^2)} \right]^{3/2} = \left[\frac{v_c}{v_a} \right]^3 \cdot r_c .$$

$$\text{Na početku krivulje je: } r_a = \left(\frac{v_a}{v_c} \right)^3 r_c . \quad 184.]$$

Kod putoklizine ovog oblika redovno je određen minimalni polumjer krivosti na početku krivulje r_a . Polumjer krivosti r_c na vrhu ispružene elipse, u tački C, određuje se onda iz posljednje formule.

$$\text{Iz općenite formule 40.) slijedi: } tg \beta_c = \frac{v_c^2}{gr_c} . \quad 185.]$$

za vrh elipse. Poprečan nagib putoklizine u povoljnoj tački ispružene elipse mjeri pak:

$$tg \beta = \frac{v_c}{v} tg \beta_c . \quad 186.]$$

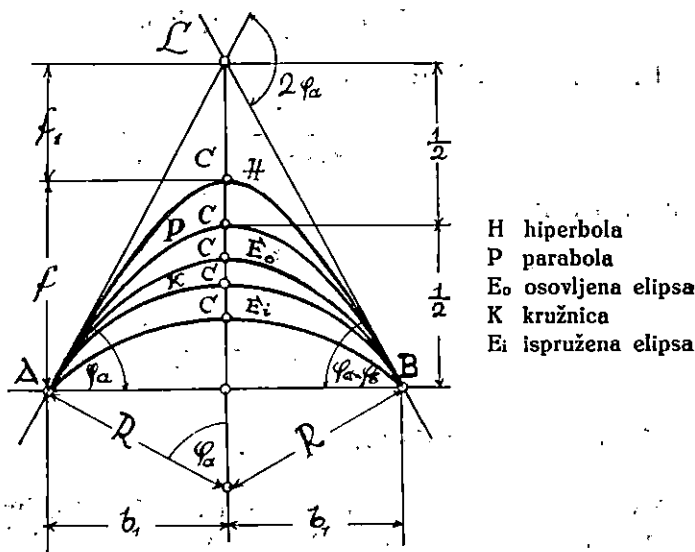
Visina strijelice u vrhu ispružene elipse, ordinata tačke C mjeri:

$$f = \frac{b_1^2 tg \varphi_a}{b_1^2 + r_c tg \varphi_a} = \frac{b_1 \sin \varphi_a}{\cos \varphi_a + \frac{v_c}{v_a}} . \quad 187.]$$

Uzdužni nagib tga određuje se kao i kod ostalih čuniosječica:

15. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čuniosječica. Lomi li se horizontalna projekcija trase putoklizine, sastavljene od pravaca, u tački L (vidi sl. 20), polučuje se prelaz smjera iz jednog pravca u drugi s pomoću tangencijalne krivulje. Redovno se isključuje u tu svrhu kružnica sa prelaznom krivuljom ili bez nje. No može se upotrijebiti i druga koja krivulja postojeće krivosti, naročito i druga koja čuniosječica izim kružnice. Osovljena elipsa, parabola, a

naročito hiperbola priljubljuje se uz tangente mnogo tješnije od kružnice, a imaju i tu prednost, da im polumjer krivosti



Slika 20.

poprma minimalnu vrijednost samo jednputa, i to na vrhu kod osovljene elipse, parabole i hiperbole, u tački C, a dva-puta kod ispružene elipse, na početku i na kraju luka, u tački A i B. Prelazna krivulja ispada predugačka uz kružnicu malog polumjera, spomenuto je bilo već i prije. Jednostavna krivulja parabola ili hiperbola imati će prednost pred složenom krivuljom od kružnice i prelazne krivulje u takovom slučaju, jer je kraća, a priljubljuje se uz tangente praktički gotovo jednako kao i prelazna krivulja. Mnogoput prilagodit će se i terenskim prilikama druga koja čunjosječica bolje od kružnice. S upotrebom druge koje čunjosječice mogu se dakle prištediti i suvišni građevni troškovi. Zbog toga se promatraju u ovoj tački sve čunjosječice, jednako duge tetive $AB = 2b_1$ sa teoretske strane, iznose pojave, koje su im zajedničke, a izvođe kriteriji, po kojima ih treba razlikovati i prema prilikama upotrijebiti.

U vrhu C svake čunjosječice tangencijalna komponenta akceleracije jednaka je ničici, dakle je $v = \mu$ u toj tački; kako je već bilo obrazloženo i prije. Odatle izlazi za poprečan nagib u toj tački, kod sviju čunjosječica bez razlike:

$$\operatorname{tg} \beta_c = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2}}{\mu \cos \alpha} \quad 188]$$

Kod kružnice je tangencijalna komponenta akceleracije u svakoj tački jednaka ničici. Formula 188.) vrijedi osim toga dakle kod kružnice i u svakoj tački (isporedi jednadžbu 17). Nadalje vrijedi za poprečan nagib u vrhu svake čunjosječice i općenita formula 40.) (kod kružnice u svakoj tački):

$$\operatorname{tg} \beta_c = \frac{v_c^2}{gr_c} \quad 189.)$$

Izjednače li se dvije posljednje jednadžbe, izlazi:

$$v_c^2 = gr_c \operatorname{tg} \beta_c = \frac{gr_c}{\cos \alpha} \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1} \quad 190.)$$

Isporede li se jednadžbe 126, 145, 164 i 182 vidi se, da vrijedi za sve čunjosječice bez razlike općenita jednadžba:

$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{b_1}{r_c \sin \varphi_a} \quad 191.)$$

(Napose je kod parabole obzirom na jednadžbe 121. i 191. uz $r_c = p$:

$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{p \operatorname{tg} \varphi_a}{p \sin \varphi_a} = \frac{1}{\cos \varphi_a} \quad 191a.)$$

u skladu sa jednadžbom 126. Kod kružnice je $\frac{v_a}{v_c} = 1$). Jednadžba 190.) može se dakle pisati ovako:

$$v_a^2 = k \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1}, \quad 192.)$$

a konstanta putoklazine k poprima sada općenitiji oblik:

$$k = \left(\frac{b_1}{r_c \sin \varphi_a}\right)^2 \cdot \frac{gr_c}{\cos \alpha} \quad 193.)$$

te vrijedi za sve čunjosječice bez razlike.

U specijalnom slučaju parabole je:

$$k = \frac{gp}{\cos \alpha \cos^2 \varphi_a} \quad 193a.)$$

dok je konstanta putoklazine izvedene u obliku kružnice, određena već prije, jednadžbom 19.).

Iz jednadžbe 192.) izlazi: Mijenja li se koeficijent trenja na putoklizinu stalnog uzdužnog nagiba α , a promjenljivog poprečnog nagiba β , izvedenoj u luku povoljne čunjosječice,

svakoj vrijednosti koeficijenta trenja μ odgovara samo jedna posve određena početna brzina v_a . Ovo pravilo, izrečeno već prije za kružnicu, vrijedi dakle za sve čunjosječice. Kao što tijelo opisuje kružnicu bez p o v o d a, gibajući se na takvoj podlozi jednolično, tako opisuje i b e z p o v o d a drugu koju čunjosječicu, gibajući se nejednolično. Podloga mora biti udešena naravno tako, da poprečan nagib zadovoljava jednadžbu-

$$tg\beta = \frac{v_c}{v} tg\beta_c \quad 194.]$$

u svakoj tački putanje tijela, jer ta formula vrijedi za sve čunjosječice bez razlike (isporedi jednadžbe 129, 149, 169 i 186.)

Prispodobe li se formule 188.), 189.) i 190.) sa formulama 17.) 13.) i 18.) vidi se, da te formule vrijede u svakom profilu kod putoklizine izvedene u obliku kružnice, a samo u jednom profilu, u vrhu, kod putoklizine izvedene u obliku ostalih čunjosječica. Zbog toga određuje se p o p r e č a n p r o f i l u vrhu ostalih čunjosječica na jednaki način kao i kod kružnice prema rečenome u tački 4. Zbog toga određuje se j u ž d u Ź a n n a g i b $tg\alpha$ — a bilo je to obrazloženo i kod svake čunjosječice napose — po formulama 14.) ili 14a.) kod ostalih čunjosječica na jednaki način, kao i kod kružnice. Treba uvrstiti samo $tg\beta_c$ namjesto $tg\beta$ u te formule. A i m i n i m a l a n p o l u m j e r k r i v o s t i r_a kod ispružene elipse, a r_c kod ostalih čunjosječica, određuje se po tablicama II, III i IV kao i kod kružnice, jer su utjecaji na taj polumjer kod svih čunjosječica isti. Treba uzeti u račun samo $v=v_a$ kod ispružene elipse, a $v=v_c$ kod ostalih čunjosječica upotrebljavajući te tablice.

Kod ispružene elipse, slijedi iz jednadžbe 180.) postoji omjer između polovice dužine tetive b_1 i polumjera krivosti u vrhu r_c :

$$\frac{b_1}{r_c} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot tg\varphi_a}{\sqrt{1+tg^2\varphi_a - \varepsilon^2}} \quad 195.]$$

Ova jednadžba poprima oblik, ako je $\varepsilon^2 = 0$:

$$\frac{b_1}{r} = \frac{tg\varphi_a}{\sqrt{1+tg^2\varphi_a}} = \sin\varphi_a .$$

a vrijedi za k r u Ź n i c u, jer je kod kružnice numerička ekscentriciteta ε jednaka ničtici. Od ispružene elipse nastala je dakle kružnica. Ista ova jednadžba prelazi u oblik, ako je $\varepsilon^2 = 1$:

$$\frac{b_1}{r_c} = 0 .$$

a to je moguće samo, ako je $r_c = \infty$, jer je $b_1 \leq 0$. Od ispru-

žene elipse nastaje pravac, tetiva AB (slika 20). Numerička ekscentriciteta elipse kreće se u granicama $0 < \varepsilon^2 < 1$, u tom je pak intervalu:

$$0 < \frac{b_1}{r_c} < \sin \varphi_a \quad 196.)$$

Po tom se kriteriju raspoznaje dakle ispružena elipsa, uz zadane veličine: b_1 , r_c i φ_a .

Kod osovljene elipse i hiperbole glasi isti taj omjer između polovice dužine tetive b_1 i polumjera krivosti $r_c = p$ u vrhu (slijedi iz jednadžbe 143. i 162.):

$$\frac{b_1}{r_c} = \frac{b_1}{p} = \frac{tg \varphi_a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2) tg^2 \varphi_a}} \quad 197.)$$

U slučaju $\varepsilon^2 = 0$ poprima ova jednadžba opet oblik jednadžbe 195.) a vrijedi za kružnicu.

Ako je $\varepsilon^2 = 1$, onda je:

$$\frac{b_1}{r_c} = \frac{b_1}{p} = tg \varphi_a, \dots \quad 198.)$$

a vrijedi za parabolu (isporedi formulu 121). Kod elipse kreće se numerička ekscentriciteta u granicama $0 < \varepsilon^2 < 1$. Kriterij za osovljenu elipsu glasi dakle:

$$\sin \varphi_a < \frac{b_1}{r_c} = \frac{b_1}{p} < tg \varphi_a \quad 199.)$$

Kod hiperbole je numerička ekscentriciteta $\varepsilon^2 > 1$. Kriterij za hiperbolu glasi dakle:

$$\frac{b_1}{r_c} = \frac{b_1}{p} > tg \varphi_a \quad 200.)$$

Za visinu strijelice vrijedi kod svih čunjosječica, bez razlike, općenita jednadžba:

$$f = \frac{b_1 \sin \varphi_a}{\cos \varphi_a + \frac{v_c}{v_a}} \quad 201.)$$

Napose je

$$\text{kod kružnice: } f = \frac{b_1 \sin \varphi_a}{\cos \varphi_a + 1} = b_1 tg \frac{\varphi_a}{2} \quad 201a.)$$

$$\text{kod parabole: } f = \frac{b_1 \sin \varphi_a}{2 \cos \varphi_a} = \frac{b_1}{2} tg \varphi_a \quad 201b.)$$

Iz' jednadžbe 201.) slijedi onda općenito:

$$\frac{v_c}{v_a} = \frac{f_1}{f} \cos \varphi_a, \quad 202.]$$

ako je $f_1 = b_1 \operatorname{tg} \varphi_a - f$. 203.]

(isporedi sliku 20.) U specijalnom slučaju je kod kružnice:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1}{\cos \varphi_a} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_a} > 1, \quad 204.]$$

a kod parabole: $f_1/f = 1$. 205.]

Dakle je kod hiperbole: $f_1/f < 1$, 206.]

kod osovljene elipse: $1 < f_1/f < \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_a}$, 207.]

a kod ispružene elipse: $f_1/f > \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_a}$. 208.]

Dalje je analogno:

$$\left. \begin{array}{l} \text{kod hiperbole: } \frac{v_c}{v_a} < \cos \varphi_a, \\ \text{kod parabole: } \frac{v_c}{v_a} = \cos \varphi_a, \\ \text{kod osovljene elipse: } \cos \varphi_a < \frac{v_c}{v_a} < 1, \\ \text{kod kružnice: } \frac{v_c}{v_a} = 1, \\ \text{a kod ispružene elipse: } \frac{v_c}{v_a} > 1 \end{array} \right\} \quad 209.]$$

Na kružnici giba se tijelo jednolično, bez povoda, na ispruženoj elipsi sa pospješanjem prema vrhu, a odavde prema kraju sa retardacijom. Kod ostalih čunjosječica obratno: prema vrhu sa retardacijom, a odavle prema kraju sa pospješanjem. U svakom slučaju brzina jednako je velika na početku i na kraju čunjosječice, jer je brzina jednako velika u simetričkim tačkama svake čunjosječice uopće. Iz jednadžbi 127, 142, 161, i 179. slijedi naime za brzinu na kraju luka v_b svake čunjosječice općenito:

$$\frac{v_b}{v_c} = - \frac{b_1}{p \sin \varphi_b} \quad 210.]$$

Isporedi li se ova jednadžba sa jednadžbom 191.), a uzme u obzir, da je $\varphi_b = \varphi_a$ i $p = r_c$, izlazi:

$$\frac{v_b}{v_c} = - \frac{v_a}{v_c} \text{ ili } v_b = - v_a.$$

v_a i v_b su brzine u povoljno odabranim simetričkim tačkama A i B povoljne čunjosječice. Dakle su brzine u simetričkim tačkama s v a k e čunjosječice doista jednako velike, a razlikuju se samo po predznaku, t. j. po smjeru. Na putoklizini u naravi uistinu neće biti posvema tako, jer je u ovim formulama zanemaren utjecaj zraka. Ovo zanemarenje nema ipak praktičnog značenja. Dužina putoklizine u krivulji razmjerno je kratka. Površina drveta, kojom prodire zrak, malena. Vrijednost koeficijenta trenja, bez utjecaja zraka, također nije poznata. Ta je vrijednost određena uz djelovanje otpora zraka. Zbog toga se i ne uzima zasebno u obzir utjecaj zraka kod praktičnog izračunavanja putoklizina uopće. I ovdje vrijedi općenito pravilo inženjerskih konstrukcija, račun o njima treba tek da se približi što više istinskom stanju u naravi.

Nadalje vrijedi za sve čunjosječice, bez razlike, općenita jednadžba

$$f = \frac{b_1^2 \operatorname{tg} \varphi_a}{b_1 + r_c \operatorname{tg} \varphi_a} \quad (211.)$$

iz koje slijedi:

$$r_c = \frac{f_1}{f} \frac{b_1}{\operatorname{tg} \varphi_a}. \quad (212.)$$

Dakle je:

$$\left. \begin{aligned} \text{kod hiperbole: } p &= r_c < \frac{b_1}{\operatorname{tg} \varphi_a} \\ \text{kod parabole: } p &= r_c = \frac{b_1}{\operatorname{tg} \varphi_a} \\ \text{kod osovljene elipse: } \frac{b_1}{\operatorname{tg} \varphi_a} &< r_c = p < \frac{b_1}{\sin \varphi_a} \\ \text{kod kružnice } r &= \frac{b_1}{\sin \varphi_a} \\ \text{a kod ispružene elipse } r_c &> \frac{b_1}{\sin \varphi_a} \end{aligned} \right\} \quad (213.)$$

Uz istu vrijednost r_c dužina tetiva najveća je kod hiperbole, a najmanja kod ispružene elipse.

Na temelju kriterija, izvedenih u ovoj tački, neće biti teško odabrati čunjosječicu, koja će najbolje pristajati kao osovina putoklizine u konkretnim prilikama. Izpružena elipsa rijetko dolazi u obzir.

16. Putoklizina izvedena je u obliku užljebine, stalnog uzdužnog nagiba. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čunjosječica. U tačkama 12. do 15. opisani su uvjeti uz koje klizi teško tijelo u obliku povoljne čunjosječice bez p o v o d a. Napose je obrazloženo u prijašnjoj tački uz koje je uvjete brzina jednako velika u simetričkim tačkama čunjosječice. Početna brzina treba da zadovoljava jednadžbu 192.), a podloga konstantnog uzdužnog nagiba . prema formuli 14) ili 14 a.), treba da imade i promjenljiv poprečan nagib, prema formuli 163.), u tom slučaju. Posljednjem uvjetu udovoljiti praktički je lako, ako se daje putoklizni oblik užljebine u krivulji. Teško tijelo klizeći lako nađe potreban poprečan nagib u profilu užljebine i onda, kada je ona izvedena konstantnog oblika duž cijele krivulje. Dapače, najjednostavnije ovo rješenje je i najbolje. Treba samo da je izveden profil doista sa poprečnim nagibom, od najmanje do najveće potrebne vrijednosti, postojano, na način, obrazložen u tački četvrtoj. Tijelo opisuje u takovom slučaju, — klizeći i tražeći brzini odgovarajući nagib, te mijenjajući položaj unutar žlijeba, — postojanu krivulju, koja se malo ili nikako ne razlikuje od računski pretpostavljene. Imade li osovina putoklizine oblik krivulje iznad kružnice, dakle oblik osovine elipse, parabole ili hiperbole u horizontalnoj projekciji, prelazna krivulja otpada redovno. U tom slučaju r_a prekoračuje redovno vrijednost polumjera kružnice, uz koju nije više potrebno iskolčenje prelazne krivulje. Oblik užljebine bit će dakle gotovo jednak u pravcu i u krivulji, ako je ona oblika čunjosječice iznad kružnice. Proširenje, ili neznatne deformacije užljebine bit će od potrebe tek u okolici vrha takove čunjosječice, gdje prima polumjer krivosti najmanju vrijednost.

Dajući ali putoklizini oblik užljebine u krivulji, čini se više nego što treba. Užljebina ne služi naime teškom tijelu samo kao p o d l o g a, nego djeluje na nj i kao p o v o d, te ga sili zbog visokih stijena, da se giba na određenom putu i onda, kada njegova početna brzina ne zadovoljava jednadžbu 192.). Kod kružnice ne giba se tijelo jednolično u takovom slučaju. Kod ostalih pak čunjosječica brzina tijela neće biti više jednaka u simetričkim tačkama. Treba dakle odrediti način, kako se mijenja brzina u tom slučaju? Za ispitivanje i dimenzioniranje putoklizine od važnosti je poznavati brzinu samo na kraju luka v_b . Treba dakle odrediti tu brzinu, ako iznosi brzinu na tijelu na početku povoljne čunjosječice:

$$v_a^2 \geq k \sqrt{\left(\frac{tga}{\mu}\right)^2 - 1} = c_a^2 \quad 192a)$$

Promatrajući sliku 20.) vidi se, ako je $v_a = c_a$, da je brzina na kraju luka v_b jednaka brzini na početku luka v_a u svakom slu-

čaju, putovalo tijelo od tačke A do tačke B kružnicom, ili drugom kojom povoljnom čunjosječicom, jer su tačke A i B zajedničke simetričke tačke svih tih čunjosječica, a brzina tijela jednako je velika u simetričkim tačkama svake čunjosječice, bez razlike u takovom slučaju. Imade li tijelo u tački A brzinu $v_a \geq c_a$, brzina v_b u tački B bit će različita od brzine v_a u tački A , no jednako velika, putovalo tijelo kružnicom ili drugom kojom čunjosječicom od A do B , jer su to zajedničke tačke svih tih čunjosječica. Zbog toga mogu se upotrijebiti formule izvedene u tački 8.) za izračunavanje brzine v_b u slučaju $v_a \geq c_a$ i onda, kada klizi teško tijelo užljebinom stalnog nagiba, izvedenom ne samo u obliku kružnice, nego i u obliku povoljne druge koje čunjosječice, jednako duge tetive, u horizontalnoj projekciji. Uistinu klizi tijelo povoljnom čunjosječicom od A do B . Računajući pak brzinu v_b u tački B uzima se, da klizi kružnicom jednako duge tetive od A do B , u takovom slučaju. Ovaj zaključak izveden analogijom, nalazi potkrepu još i u tome, što se mijenja — uz zanemarenje utjecaja zraka — samo način promjene brzine sa oblikom krivulje na putu od A do B , dok i z n o s promjene brzine ostaje isti u tim tačkama, zbog zakona o živoj sili i radnji, pod istim inače utjecajima.

U ostalim tačkama između tačke A i B brzina tijela je različita na kružnici, a različita na drugoj kojoj čunjosječici jednako duge tetive. Naročito je ta razlika najveća u vrhu, u tački C (sl. 20). No može se izračunati na slijedeći način:

Označuje li c_c brzinu u vrhu kružnice, a ta se može odrediti po formulama, izvedenima u osmoj tački, mjeri brzina v_c u vrhu povoljne druge koje čunjosječice, jednako duge tetive, slijedi općenito iz jednadžbe 191.):

$$v_c = c_c \frac{r_c \sin \varphi_a}{b_1} . \quad 214.]$$

Ako je ta čunjosječica parabola, napose:

$$v_c = c_c \cdot \cos \varphi_a . \quad 215.]$$

Brzina u ostalim tačkama čunjosječice nema značenja za praktično izračunavanje i osnivanje putokluzina. Zbog toga u daljnji račun i ne ulazi. Treba tek primjetiti još nešto glede upotrebe formula, izvedenih u osmoj tački, i formula izvedenih u tačkama 11 do 16. Prve se odnose na kružnicu, a druge na ostale čunjosječice.

Slovo φ označuje dvojaki kut. Kod kružnice u osmoj tački centrični kut, a kod ostalih čunjosječica (i kod kružnice) u tačkama 11 do 16 kut tangente prema tetivi. Računajući nadalje brzinu v_b i c_c po formulama, koje vrijede za kružnicu, iako putuje tijelo uistinu drugom kojom čunjosječicom, jedna-

ko duge tetive, treba imati na umu, da je visinska razlika između tačke A i B uvijek ista. Uzdužni nagib tga drugačiji je dakle na kružnici, a drugačiji na drugoj kojoj čunjosečica, jednako duge tetive. Upotrebljavajući dakle formule osme tačke treba odrediti uzdužni nagib tga iz visinske razlike obiju tačaka A i B i dužine luka kružnice nad tetivom, nad kojom se nalazi čunjosečica, kojom će kliziti tijelo uistinu. Ova se okolnost može iskoristiti eventualno i odabrati čunjosečicu najpovoljnijeg nagiba u konkretnom slučaju.

Zbog nedostataka, obrazloženih u desetoj tački, upotrijebiti će se mjesto putoklizine providene sa užljebinom u kriulji, više:

17. Putoklizina, providena sa švarcvaldskim profilom, stalnog uzdužnog nagiba. Horizontalna projekcija osovine putoklizine je povoljna čunjosečica. Neznatan utjecaj poprečnog nagiba se zanemaruje. Taj se nagib određuje po najmanjoj brzini, njegov je iznos minimalan, te se može izostaviti kod računanja putoklizina ovakovog tipa uopće. Razlikovati treba opet dva slučaja.

a.) U prvom je slučaju brzina tijela jednako velika u simetričkim tačkama čunjosečice. Brzina u vrhu svake čunjosečice računa se po formuli 57.) bez razlike. Ta formula poprima sada općenitiji oblik:

$$v_c^2 = \frac{r_c g}{\cos \alpha} \cdot \frac{tga - \mu_1}{\mu_2} \quad 216.]$$

r_c označuje polumjer krivosti u vrhu čunjosečice, μ_1 koeficijent trenja podloge, μ_2 koeficijent trenja povoda, α uzdužni nagib, a g akceleraciju teže, kao i prije.

Za sve čunjosečice vrijedi jednadžba 191.) bez razlike i u ovom slučaju. Iz ove pak jednadžbe i jednadžbe 216.) slijedi daljnji uvjet, kojemu treba da udovolji početna brzina:

$$v_a^2 = k \cdot \frac{tga - \mu_1}{\mu_2} \quad 217.]$$

Konstanta putoklizine k ove formule određena je već jednadžbom 193.)

Uzdužni nagib određuje se po najmanjoj brzini, uz koju se želi, da radi putoklizina, s pomoću formule 58.) koja poprima sada općenitiji oblik:

$$tga = \mu_1 + \frac{v_c^2}{gr_c} \cdot \frac{\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \quad 218.]$$

a vrijedi za sve čunjosečice bez razlike. Brzina na kraju luka v_b jednaka je naravno brzini na početku luka v_a u ovom

slučaju. Izvod ovih formula podudara se u svemu sa izvodom analognih formula u sedmoj tački, za specijalan slučaj kružnice. Zbog toga su ovdje izneseni samo rezultati.

Brzina na početku luka može imati samo jednu posve određenu vrijednost po formuli 217.) uz određene koordinirane vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 i μ_2 , na istoj putoklizinu i u ovom slučaju, ako se želi, da bude u simetričkim tačkama putoklazine brzina jednako velika. Uistinu rijedak je to slučaj. Brzina na početku luka redovno ne zadovoljava jednađbu 217.) Redovno će biti

b.) brzina tijela različita u simetričkim tačkama čunjosječice, osovine putoklazine. Ako je dakle u tački A:

$$v_a^2 \leq k \frac{\operatorname{tga} - \mu_1}{\mu_2} = c_a^2,$$

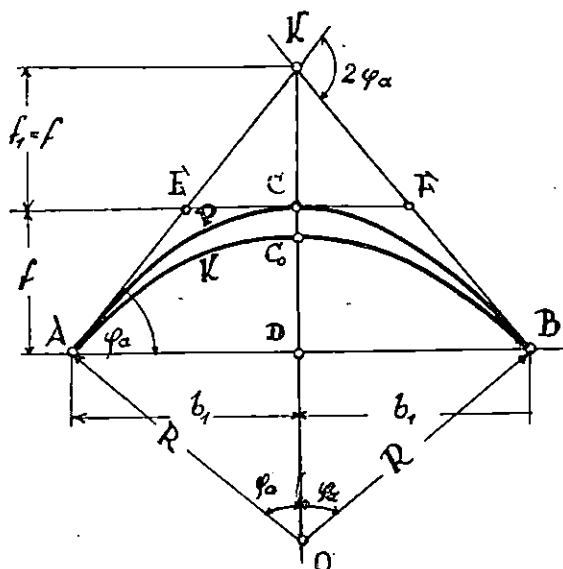
moгу se upotrijebiti opet formule izvedene u sedmoj tački za taj slučaj, računajući brzinu v_b na kraju luka, u tački B i onda, kada ne klizi tijelo u obliku kružnice, nego u obliku povoljne druge koje čunjosječice, jednako duge tetive, iz razloga, navedenih u prijašnjoj tački. Klizi li dakle tijelo povoljnom kojom čunjosječicom, računski će se uzeti kao da klizi kružnicom, nad istom tetivom, a brzina tijela v_b na kraju luka odrediti iz formula izvedenih u sedmoj tački za taj slučaj.

Označuje li nadalje c_e brzinu tijela u vrhu takove kružnice, brzina tijela u vrhu povoljne druge koje čunjosječice, nad istom tetivom, određuje se po formulama 214.) i 215.) analogno kao kod putoklazine, izvedene u obliku užljebine. Jednako vrijedi i ostalo rečeno u prijašnjoj tački, glede upotrebe formula, koje se odnose na kružnicu, i u ovom slučaju, kada se primjenjuju na drugu koju čunjosječicu, jednako duge tetive.

Putoklizinu treba osnovati na otvorenoj pruzi tako, da bude $v_a \leq c_a$, ili barem, da nije v_a mnogo veća od c_a , ako se želi spriječiti izdizanje tijela. U protivnom slučaju bit će gibanje tijela nepravilno, zbog jake retardacije, neznatna zapreka može biti uzrok, da tijelo izade iz putoklazine. Čunjosječice, izim ispružene elipse, razlikuju se od kružnice baš u tom pogledu, jer na njima vlada retardacija u prvoj polovini krivulje i onda, kada je $v_a \leq c_a$. Treba se dakle pobrinuti za dovoljno visoki povod usvakom dijelu putoklazine u krivulji, na kojem vlada retardacija.

18. Primjer. Podaci, uz koje se imade osnovati putoklizinu, jednaki su onima u prvom primjeru, desete tačke. Namjesto kružnice neka je sada horizontalna projekcija osovine putoklazine parabola, a namjesto užljebine, neka je providena

sada putoklizina sa švarcvaldskim profilom. Ovdje se radi o osnježenoj putoklizini. Dok se kreće vrijednost koeficijenta trenja podloge u granicama $0,10 \leq \mu_1 \leq 0,20$, koeficijent povoda, stijene braniča, nalazi se u granicama: $0,10 \leq \mu_2 \leq 0,15$. Ovi podci vrijede za dugo drvo. Prema ograničenim vrijednostima iskombinirane su onda ostale koordinirane vrijednosti obiju koeficijenata trenja na način, kako je iskazano u skrižaljci 10. Iako će se izvesti osovina putoklizine u obliku parabole u horizontalnoj projekciji, račun se provodi, kao da je ta osovina kružnica, jednako duge tetive. Prema označenim podacima, razabire se iz slike 21, polovica dužine te tetive mjeri:



Slika 21.

$$b_1 = R \sin \varphi_a = 200 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 141,42 \text{ m.}$$

Uzdužni nagib kružnice mjeri $\tan \alpha = 0,20$. Dužina luka kružnice iznosi: $\frac{R \pi}{2} = \frac{200 \pi}{2} = 314,16 \text{ m}$. Visinska razlika između tačke A i B pak $314,16 \times 0,2 = 62,83 \text{ m}$. Dužina luka parabole AC mjeri:

$$s = \frac{p}{2} \left[\frac{\sin \varphi_a}{\cos^2 \varphi_a} + \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_a}{2} \right) \right]. \quad 219.]$$

Iz jednadžbe 198.) slijedi:

$$r_c = p = \frac{b_1}{\operatorname{tg} \varphi_a} = \frac{141,42}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 141,42,$$

dakle je:

$$s = \frac{141,42}{2} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = 162,31 \text{ m.}$$

Nagib parabole, osovine stvarne putoklazine mjeri dakle:

$$\operatorname{tga} = \frac{\frac{1}{2} 62,83}{162,31} = 0,1935; \operatorname{tga} = 193'5''_{00}$$

Iako će se izvesti parabola sa nagibom od $193'5''_{00}$, račun se provodi dalje kao da tijelo klizi kružnicom nagiba $200'_{00}$. Konstanta putoklazine iznosi onda po formuli 19.):

$$k = 200 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{1 + 0,20^2} \approx 2000,$$

a kritična brzina računa se po formuli 57.), koja poprima oblik u ovom slučaju:

$$c^2 = 2000 \cdot \frac{\operatorname{tga} - \mu_1}{\mu_2}$$

Brzina na krazu luka v_b mjeri po formuli 65a.):

$$v_b^2 = c^2 - \frac{c^2 - v_a^2}{\mu_2 \pi \cos \alpha}$$

Rezultati izračunati po ovim formulama iskazani su u skrižaljci 10.

Brzina na vrhu kružnice mjeri:

$$c_v^2 = c^2 - \frac{c^2 - v_a^2}{\mu_2 \frac{\pi}{2} \cos \alpha}$$

slijedi iz formule 65a.), jer vrhu kružnice pripada centrični kut $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Brzina u vrhu parabole dobije se iz formule 215.), koja sada poprima oblik:

$$v_v = c_v \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0,70711 c_v.$$

Izračunati rezultati, u zadanom intervalu, iskazani su u daljnjoj skrižaljci 11, u kojoj su uspoređene još jednom i sve ostale izračunate brzine.

Skrizaljka 10.

μ_1	v_a^2	v_a	$\lg \alpha - \mu_1$	μ_2	c^2	c	$\mathcal{L}_b^2$	v_b	$k = \frac{v_b}{v_a}$
0,19	78,5	8,9	0,01	0,145	137,8	11,7	99,9	10,0	1,12
0,18	157,0	12,5	0,02	0,140	285,7	16,9	202,1	14,2	1,13
0,17	235,4	15,3	0,03	0,135	444,4	21,1	306,5	17,5	1,14
0,16	313,9	17,7	0,04	0,130	615,4	24,8	413,3	20,3	1,15
0,15	392,4	19,8	0,05	0,125	800,0	28,3	522,6	22,9	1,16
0,14	470,9	21,7	0,06	0,120	1000,0	31,6	634,5	25,2	1,16
0,13	549,4	23,4	0,07	0,115	1217,4	34,9	748,4	27,4	1,17
0,12	627,8	25,1	0,08	0,110	1454,5	38,1	865,5	29,4	1,17
0,11	706,3	26,6	0,09	0,105	1714,3	41,8	984,6	31,4	1,18
0,10	784,8	28,0	0,10	0,100	2000,0	44,7	1106,9	33,3	1,19

Skrizaljka 11.

μ_2	C_c^2	kružnica			parabola		
		v_a	C_c	v_b	v_a	v_a	$v_b \text{ m m}$
0,145	90,4	8,9	9,5	10,0	8,9	6,7	10,0
0,140	181,9	12,5	13,5	14,2	12,5	9,5	14,2
0,135	274,6	15,3	16,6	17,5	15,3	11,7	17,5
0,130	368,5	17,7	19,2	20,3	17,7	13,6	20,3
0,125	463,7	19,8	21,5	22,9	19,8	15,2	22,9
0,120	560,2	21,7	23,7	25,2	21,7	16,8	25,2
0,115	657,9	23,4	25,6	27,4	23,4	18,1	27,4
0,110	756,3	25,1	27,5	29,4	25,1	19,4	29,4
0,105	856,4	26,6	29,3	31,4	26,6	20,7	31,4
0,100	957,8	28,0	30,9	33,3	28,0	21,8	33,3

Polumjer krivosti mjeri na početku parabole po formuli 124.):

$$r_a = \frac{141,42}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 400 \text{ m.}$$

Uz toliki polumjer ne iskolčuje se prelazna krivulja niti kod kružnice. Prelazna krivulja otpada dakle i ovdje. Visina strijelice mjeri kod kružnice (po jednadžbi 201a.):

$$f = 141,42 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 58,56 \text{ m, a kod parabole (po jednadžbi}$$

$$201b.): f = \frac{141,42}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 70,71 \text{ m.}$$

Vrh parabole udalji se je za 12,15 m više nego vrh kružnice od zajedničke tetive. U prvom primjeru desete tačke najveća dužina drveta iznosila je 26 m i to samo za $\mu_1 = 0,19$. U ostalom zadanom intervalu koeficijenta trenja moglo se je otpremati razmjerno samo kratko drvo tom putoklizinom (isporedi tamo). U ovom primjeru gdje je upotrijebljen švarcvaldski profil, namjesto užljebine, najveća dužina drveta može iznositi preko 30 m i to u cijelom zadanom intervalu koeficijenta trenja. Ta je dužina pronađena iz formule 48a.), koja poprima u ovom slučaju oblik:

$$r_c \geq 0,65lv_c,$$

a odatle:

$$l = \frac{141,42}{0,65 \times 6,7} \sim 32 \text{ m.}$$

ovom se putoklizinom može otpremati dakle 30 m. dugo drvo u svako doba, bez obzira na vrijednost koeficijenta trenja, ako je putoklizina dovoljno široka (u ovom slučaju je $f \sim 0,80$ m, treba dakle cca 2,0 široka putoklizina i to samo na vrhu. Prema krajevima može se ta širina postojano suziti na normalnu širinu putoklazine u pravcu). Odatle proizlazi velika prednost švarcvaldskog profila pred užljebinom.

Za iskolčenje osovine putoklazine, parabole, mogu poslužiti ovi podaci:

Dužina tangente:

$$AK = BK = \begin{cases} \frac{b_1}{\cos \varphi_a} = \frac{141,42}{\cos \frac{\pi}{4}} = 200 \text{ m} \\ R \cdot \operatorname{tg} \varphi_a = 200 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 200 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Nadalje je: } AE = EK = \frac{AK}{2} = 100 \text{ m.}$$

$$EC = CF = \frac{b_1}{2} = \frac{141,42}{2} = 70,71 \text{ m.}$$

$$KC = CD = f = 58,56 \text{ m.}$$

Sa tangente ECF iskolčuju se tačke parabole s pomoću jednadžbe:

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2}{282,34}.$$

Apscisa x je dužina mjerama na tangentu od C prema E ili F , a ordinata y je dužina mjerena okomito na tangentu. Sa tangente AE ili BF prema vrhu K mogu se kolčiti tačke parabole s pomoću formule:

$$(x + y \operatorname{tg} \varphi_a)^2 = 2yr_a. \quad 220.]$$

Apscisa x mjeri se u smjeru od A (B) prema E (F), a ordinata y okomito na taj smjer. Ako je $y \operatorname{tg} \varphi_a$ dovoljno maleno prema x , gornja formula poprima jednostavniji oblik:

$$y = \frac{x^2}{2r_a}. \quad 220a)]$$

*
* *

Sve formule izvedene u ovoj raspravi, koje se protežu na putoklizinu, izvedenu u obliku užljebine, mogu se upotrijebiti naravno i kod drvenog točila u krivulji, bez promjene.

Kod prosuđivanja promjene brzine tijela na putoklizi, kao cjelini, moći će se pojednostaviti računski mnogošto i u krivulji u skladu sa načinom, koji sam izveo za ostali dio putoklizine u raspravi. »Prilog teoriji putoklizina«. Govorit ću o tome ipak drugom prilikom. Za početak bilo je potrebno razmotriti klizanje teškog tijela na putoklizi u krivulji zasebno, matematski dovoljno tačno, da se prijede s tim sigurnije i lakše na cjelovit i približan postupak poslije. Zbog toga su i primjeri izrađeni u ovoj raspravi kud i kamo u širem opsegu, nego što je praktički potrebno. U najviše slučajeva ograničit će se račun o promjeni brzine tijela samo na granične vrijednosti zadanog intervala koeficijenta trenja. Sigurno se može postupiti ali tako samo na temelju utvrđenih pravila ili formula, matematski potpuno raščišćenih već prije. Na taj način narasao je opseg ovog zasebnog dijela veći, nego što se je mislilo u prvi čas, a nastala je otuda i potreba, da se iznese u zasebnoj raspravi, kako bi manje gubio na preglednosti postupak, kod osnivanja i izračunavanja putoklizine, kao cjeline.

Drugi, možda još snažniji povod, bila je mršava djelomice netačna i razrožna stručna šumarska literatura u predmetu ove rasprave. Od svega, o čemu se ovdje govori sa teorijske strane, iznjo je Dr. Hanska formulu za poprečar. nagib:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{gr} .$$

a Dr. Angerholzer: $\operatorname{tg}\beta = \frac{v^2}{gr \cos \alpha} .$

Prva formula vrijedi za klizanje teškog tijela na podlozi, izvedenoj u luku kružnice, inače stalnog uzdužnog nagiba, bez trenja, kako je dokazano u drugoj tački ove rasprave, a druga formula daje srednju neku takovu vrijednost za putoklizinu sa trenjem i bez trenja. Ni jedna ni druga formula ne može se upotrijebiti dakle u šumarstvu, na putoklizini sa trenjem. Nadalje je postavio Dr. Hauska i formulu:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\beta} .$$

s pomoću koje bi se imao odrediti uzdužan nagib putoklizine u krivulji. No ta formula imade sasvim drugi oblik (isporedi formulu 14.) i 14a.)), dokazano je u ovoj raspravi. Mnogi autori, osim već spomenutih, postavili su i formule za minimalan polumjer krivosti, ali na način, koji se razlikuje od načina upotrijebljenog u ovoj raspravi. O računu promjene brzine tijela nema u toj literaturi nikakvih konkretnih podataka, matematskih forma, koje bi se mogle iskoristiti kod osnivanja putoklizina u krivulji.

v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$
21,3	453,69	46,248	26,3	691,69	70,509	31,3	979,69	99,886	36,3	1317,69	134,321
4	457,96	46,683	4	696,96	71,046	4	985,96	100,506	4	1324,96	135,062
5	462,25	47,120	5	702,25	71,585	5	992,25	101,147	5	1332,25	135,805
6	466,56	47,560	6	707,56	72,126	6	998,56	101,790	6	1339,56	136,550
7	470,89	48,001	7	712,89	72,670	7	1004,89	102,435	7	1346,89	137,298
8	475,24	48,444	8	718,24	73,215	8	1011,24	103,083	8	1354,24	138,047
9	479,61	48,890	9	723,61	73,762	9	1017,61	103,732	9	1361,61	138,798
22,0	484,00	49,337	27,0	729,00	74,312	32,0	1024,00	104,383	37,0	1369,00	139,551
1	488,41	49,787	1	734,41	74,863	1	1030,41	105,037	1	1376,41	140,307
2	492,84	50,239	2	739,84	75,417	2	1036,84	105,692	2	1383,84	141,064
3	497,29	50,692	3	745,29	75,972	3	1043,29	106,350	3	1391,29	141,824
4	501,76	51,148	4	750,76	76,530	4	1049,76	107,009	4	1398,76	142,585
5	506,25	51,606	5	756,25	77,090	5	1056,25	107,671	5	1406,25	143,349
6	510,76	52,065	6	761,76	77,651	6	1062,76	108,334	6	1413,76	144,114
7	515,29	52,527	7	767,29	78,215	7	1069,29	109,000	7	1421,29	144,882
8	519,84	52,991	8	772,84	78,781	8	1075,84	109,668	8	1428,84	145,651
9	524,41	53,457	9	778,41	79,349	9	1082,41	110,337	9	1436,41	146,423
23,0	529,00	53,925	28,0	784,00	79,918	33,0	1089,00	111,009	38,0	1444,00	147,197
1	533,61	54,394	1	789,61	80,490	1	1095,61	111,683	1	1451,61	147,972
2	538,24	54,866	2	795,24	81,064	2	1102,24	112,359	2	1459,24	148,750
3	542,89	55,340	3	800,89	81,640	3	1108,89	113,037	3	1466,89	149,530
4	547,56	55,817	4	806,56	82,218	4	1115,56	113,717	4	1474,56	150,311
5	552,25	56,295	5	812,25	82,798	5	1122,25	114,399	5	1482,25	151,121
6	556,96	56,775	6	817,96	83,380	6	1128,96	115,083	6	1489,96	151,882
7	561,69	57,257	7	823,69	83,964	7	1135,69	115,769	7	1497,69	152,670
8	566,44	57,741	8	829,44	84,550	8	1142,44	116,457	8	1505,44	153,460
9	571,21	58,227	9	835,21	85,139	9	1149,21	117,147	9	1513,21	154,252
24,0	576,00	58,716	29,0	841,00	85,729	34,0	1156,00	117,839	39,0	1521,00	155,046
1	580,81	59,206	1	846,81	86,321	1	1162,81	118,533	1	1528,81	155,842
2	585,64	59,698	2	852,64	86,915	2	1169,64	119,229	2	1536,64	156,640
3	590,49	60,193	3	858,49	87,512	3	1176,49	119,927	3	1544,49	157,440
4	595,36	60,689	4	864,36	88,110	4	1183,36	120,628	4	1552,36	158,243
5	600,25	61,188	5	870,25	88,710	5	1190,25	121,330	5	1560,25	159,047
6	605,16	61,688	6	876,16	89,313	6	1197,16	122,035	6	1568,16	159,853
7	610,09	62,191	7	882,09	89,917	7	1204,09	122,741	7	1576,09	160,662
8	615,04	62,695	8	888,04	90,524	8	1211,04	123,450	8	1584,04	161,472
9	620,01	63,202	9	894,01	91,133	9	1218,01	124,160	9	1592,01	162,284
25,0	625,00	63,710	30,0	900,00	91,743	35,0	1225,00	124,873	40,0	1600,00	163,099
1	630,01	64,221	1	906,01	92,356	1	1232,01	125,587	1	1608,01	163,915
2	635,04	64,734	2	912,04	92,970	2	1239,04	126,304	2	1616,04	164,734
3	640,09	65,249	3	918,09	93,587	3	1246,09	127,022	3	1624,09	165,555
4	645,16	65,766	4	924,16	94,206	4	1253,16	127,743	4	1632,16	166,377
5	650,25	66,284	5	930,25	94,827	5	1260,25	128,466	5	1640,25	167,202
6	655,36	66,805	6	936,36	95,450	6	1267,36	129,191	6	1648,36	168,029
7	660,49	67,328	7	942,49	96,074	7	1274,49	129,917	7	1656,49	168,857
8	665,64	67,853	8	948,64	96,701	8	1281,64	130,646	8	1664,64	169,688
9	670,81	68,380	9	954,81	97,330	9	1288,81	131,377	9	1672,81	170,521
26,0	676,00	68,909	31,0	961,00	97,961	36,0	1296,00	132,110	41,0	1681,00	171,356
1	681,21	69,440	1	967,21	98,594	1	1303,21	132,845	1	1689,21	172,193
2	686,44	69,973	2	973,44	99,229	2	1310,44	133,582	2	1697,44	173,032

v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$	v	v ²	$\frac{v^2}{g}$
41,3	1705,69	173,873	44,8	2007,04	204,591	48,2	2323,24	236,823	51,7	2672,89	272,466
4	1713,96	174,716	9	2016,01	205,506	3	2332,89	237,807	8	2683,24	273,521
5	1722,25	175,551				4	2342,56	238,793	9	2693,61	274,578
6	1730,56	176,408	45,0	2025,00	206,422	5	2352,25	239,781			
7	1738,89	177,257	1	2034,01	207,340	6	2361,96	240,771	52,0	2704,00	275,637
8	1747,24	178,109	2	2043,04	208,261	7	2371,69	241,762	1	2714,41	276,698
9	1755,61	178,961	3	2052,09	209,183	8	2381,44	242,756	2	2724,84	277,761
			4	2061,16	210,108	9	2391,21	243,752	3	2735,29	278,827
42,0	1764,00	179,817	5	2070,25	211,034				4	2745,76	279,894
1	1772,41	180,674	6	2079,36	211,963	49,0	2401,00	244,750	5	2756,25	280,963
2	1780,84	181,533	7	2088,49	212,894	1	2410,81	245,750	6	2766,76	282,035
3	1789,29	182,394	8	2097,64	213,827	2	2420,64	246,752	7	2777,29	283,108
4	1797,76	183,257	9	2106,81	214,761	3	2430,49	247,756	8	2787,84	284,183
5	1806,25	184,123				4	2440,36	248,762	9	2798,41	285,261
6	1814,76	184,991	46,0	2116,00	215,698	5	2450,25	249,771			
7	1823,29	185,860	1	2125,21	216,637	6	2460,16	250,781	53,0	2809,00	286,340
8	1831,84	186,732	2	2134,44	217,579	7	2470,09	251,793	1	2819,61	287,422
9	1840,41	187,603	3	2143,69	218,521	8	2480,04	252,807	2	2830,24	288,506
			4	2152,96	219,465	9	2490,01	253,823	3	2840,89	289,591
43,0	1849,00	188,481	5	2162,25	220,412				4	2851,56	290,679
1	1857,61	189,359	6	2171,56	221,362	50,0	2500,00	254,842	5	2862,25	291,769
2	1866,24	190,239	7	2180,89	222,313	1	2510,01	255,862	6	2872,96	292,860
3	1874,89	191,120	8	2190,24	223,266	2	2520,04	256,885	7	2883,69	293,954
4	1883,56	192,004	9	2199,61	224,221	3	2530,09	257,909	8	2894,44	295,050
5	1892,25	192,890				4	2540,16	258,936	9	2905,25	296,152
6	1900,96	193,778	47,0	2209,00	225,178	5	2550,25	259,964			
7	1909,69	194,668	1	2218,41	226,138	6	2560,36	260,995	54,0	2916,00	297,248
8	1918,44	195,560	2	2227,84	227,099	7	2570,49	262,028	1	2926,81	298,350
9	1927,21	196,454	3	2237,29	228,062	8	2580,64	263,062	2	2937,64	299,454
			4	2246,76	229,028	9	2590,81	264,099	3	2948,49	300,560
44,0	1936,00	197,350	5	2256,25	229,994				4	2959,36	301,668
1	1944,81	198,248	6	2265,76	230,964	51,0	2601,00	265,138	5	2970,25	302,778
2	1953,64	199,148	7	2275,29	231,936	1	2611,21	266,178	6	2981,16	303,890
3	1962,49	200,050	8	2284,84	232,909	2	2621,44	267,221	7	2992,09	305,004
4	1971,36	200,954	9	2294,41	233,885	3	2631,69	268,266	8	3003,04	306,120
5	1980,25	201,860				4	2641,96	269,313	9	3014,01	307,239
6	1989,16	202,769	48,0	2304,00	234,862	5	2652,25	270,362			
7	1993,09	203,679	1	2313,61	235,842	6	2662,56	271,413	55,0	3025,00	308,359

II. Tablica $r^m = \frac{l^2}{8f}$

$\frac{l}{f}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	$\frac{l}{f}$
2.0	r=	—	—	—	—	—	—	—	—	30	36	42	49	56	2.0
1.9	—	—	—	—	—	—	—	—	26	32	38	44	52	59	1.9
1.8	—	—	—	—	—	—	—	—	28	34	40	47	54	63	1.8
1.7	—	—	—	—	—	—	—	—	29	36	42	50	58	66	1.7
1.6	—	—	—	—	—	—	—	—	31	38	45	53	61	68	1.6
1.5	—	—	—	—	—	—	—	27	33	40	48	56	65	75	1.5
1.4	—	—	—	—	—	—	—	29	36	43	51	60	70	80	1.4
1.3	—	—	—	—	—	—	—	31	38	47	55	65	75	87	1.3
1.2	—	—	—	—	—	—	27	34	42	50	60	70	82	94	1.2
1.1	—	—	—	—	—	—	29	37	45	55	65	77	89	102	1.1
1.0	—	—	—	—	—	25	32	41	50	61	72	85	98	113	1.0
0.9	—	—	—	—	—	27	36	45	56	67	80	94	109	125	0.9
0.8	—	—	—	—	23	31	40	51	63	76	90	106	123	141	0.8
0.7	—	—	—	—	26	35	46	58	71	86	103	121	140	161	0.7
0.6	—	—	—	21	30	41	53	68	83	101	120	141	163	188	0.6
0.5	—	—	—	25	38	49	64	81	100	121	144	169	196	225	0.5
0.4	—	—	20	31	45	61	80	101	125	151	180	211	245	281	0.4
0.3	—	—	27	42	60	82	107	135	167	202	240	282	327	375	0.3
0.2	—	23	40	62½	90	122½	160	202½	250	302½	360	422½	490	562½	0.2
0.1	20	45	80	125	180	245	320	405	500	605	720	845	980	1125	0.1

III. Tablica $f^m = 0.192 \frac{1^m}{v \text{ m/sec}}$

$\frac{1}{v}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
2	0.38	0.58	0.77	0.96	1.15	1.34	1.53	1.73	1.92	2.11	2.30	2.49	2.69	2.88	3.07
3	0.26	0.38	0.51	0.64	0.77	0.90	1.02	1.15	1.28	1.41	1.53	1.66	1.79	1.92	2.05
4	0.19	0.29	0.38	0.48	0.58	0.67	0.77	0.86	0.96	1.06	1.15	1.25	1.34	1.44	1.53
5	0.15	0.23	0.31	0.38	0.46	0.54	0.61	0.69	0.77	0.84	0.92	1.00	1.07	1.15	1.23
6	0.13	0.19	0.26	0.32	0.38	0.45	0.51	0.58	0.64	0.70	0.77	0.83	0.90	0.96	1.02
7	0.11	0.16	0.22	0.27	0.33	0.38	0.44	0.49	0.55	0.60	0.66	0.71	0.87	0.82	0.89
8	0.10	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.38	0.43	0.48	0.53	0.58	0.63	0.67	0.72	0.77
9	0.09	0.13	0.17	0.21	0.26	0.30	0.34	0.38	0.43	0.47	0.51	0.55	0.60	0.64	0.68
10	0.08	0.12	0.16	0.19	0.23	0.27	0.31	0.35	0.38	0.42	0.46	0.50	0.54	0.58	0.61
11	0.07	0.10	0.14	0.17	0.21	0.24	0.28	0.31	0.35	0.38	0.42	0.45	0.49	0.52	0.56
12	0.06	0.10	0.13	0.16	0.19	0.22	0.26	0.29	0.32	0.35	0.38	0.42	0.45	0.48	0.51
13	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30	0.32	0.35	0.38	0.41	0.44	0.47
14	0.06	0.09	0.11	0.14	0.17	0.19	0.22	0.25	0.27	0.30	0.33	0.36	0.38	0.41	0.44
15	0.05	0.08	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.23	0.26	0.28	0.31	0.33	0.36	0.38	0.41
16	0.05	0.07	0.10	0.12	0.15	0.17	0.19	0.22	0.24	0.26	0.29	0.31	0.34	0.36	0.38
17	0.05	0.07	0.09	0.11	0.14	0.16	0.18	0.20	0.23	0.25	0.27	0.29	0.32	0.34	0.36
18	0.05	0.06	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34
19	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32
20	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.25	0.27	0.29	0.31
21	0.04	0.06	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.27	0.29
22	0.04	0.06	0.07	0.09	0.11	0.12	0.14	0.16	0.17	0.19	0.21	0.23	0.24	0.26	0.28
23	0.03	0.05	0.07	0.08	0.10	0.12	0.13	0.15	0.16	0.18	0.20	0.22	0.23	0.25	0.27
24	0.03	0.05	0.06	0.08	0.10	0.11	0.13	0.14	0.16	0.18	0.19	0.21	0.22	0.24	0.26
25	0.03	0.05	0.06	0.08	0.09	0.11	0.12	0.14	0.15	0.17	0.18	0.20	0.21	0.23	0.25
26	0.03	0.04	0.06	0.07	0.09	0.10	0.12	0.13	0.15	0.16	0.17	0.19	0.21	0.22	0.24
27	0.03	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17	0.18	0.20	0.21	0.23
28	0.03	0.04	0.05	0.07	0.08	0.10	0.11	0.12	0.14	0.15	0.16	0.18	0.20	0.21	0.22
29	0.03	0.04	0.05	0.07	0.08	0.09	0.10	0.12	0.13	0.15	0.16	0.17	0.19	0.20	0.21
30	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.09	0.10	0.12	0.13	0.14	0.15	0.17	0.18	0.19	0.20
32	0.02	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.11	0.12	0.13	0.14	0.16	0.17	0.18	0.19
34	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.15	0.16	0.17	0.18
36	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17
38	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16
40	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.15

IV. Tablica $r = 0.65 \sqrt{v}^m |_{\text{sec}}$

$\begin{array}{c} 1 \\ v \end{array}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	$\begin{array}{c} 1 \\ v \end{array}$
2	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29	31	34	36	39	2
3	8	12	16	20	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	3
4	10	16	21	26	31	36	42	47	52	57	62	68	73	78	4
5	13	20	26	33	39	46	52	59	65	72	78	85	91	98	5
6	16	23	31	39	47	55	62	70	78	86	94	101	109	117	6
7	18	27	36	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	137	7
8	21	31	42	52	62	73	83	94	104	114	125	135	146	156	8
9	23	35	47	59	70	82	94	105	117	129	140	152	164	176	9
10	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	10
11	29	43	57	72	86	100	114	129	143	157	172	186	200	215	11
12	31	47	62	78	94	109	125	140	156	172	187	203	218	234	12
13	34	51	68	85	101	118	135	152	169	186	203	220	237	254	13
14	36	55	73	91	109	127	146	164	182	200	218	237	255	273	14
15	39	59	78	98	117	137	156	176	195	215	234	254	273	293	15
16	42	62	83	104	125	146	166	187	208	229	250	270	291	312	16
17	44	66	88	111	133	155	177	199	221	243	265	287	309	332	17
18	47	70	94	117	140	164	187	211	234	257	281	304	328	351	18
19	49	74	99	124	148	173	198	222	247	272	296	321	346	371	19
20	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	20
21	55	82	109	137	164	191	218	246	273	300	328	355	382	410	21
22	57	86	114	143	172	200	229	257	286	315	343	372	400	429	22
23	60	90	120	150	179	209	239	269	299	329	359	389	419	449	23
24	62	94	125	156	187	218	250	281	312	343	374	406	437	468	24
25	65	98	130	163	195	228	260	293	325	358	390	423	455	488	25
26	68	101	135	169	203	237	270	304	338	372	406	439	473	507	26
27	70	105	140	176	211	246	281	316	351	386	421	456	491	527	27
28	73	109	146	182	218	255	291	328	364	400	437	473	510	546	28
29	75	113	151	189	226	214	302	339	377	415	452	490	528	566	29
30	78	117	156	195	234	273	312	351	390	429	468	507	546	585	30
32	83	125	166	208	250	291	333	374	416	458	499	541	582	624	32
34	88	133	177	221	265	309	354	398	442	486	530	575	619	663	34
36	94	140	187	234	281	328	374	421	468	515	562	608	655	702	36
38	99	148	198	247	295	346	395	445	494	543	593	642	692	741	38
40	104	156	208	260	312	364	416	458	520	572	624	676	728	780	40

ÜBER DEN RIESWEG IN DER KRÜMMUNG.

Einleitend wird der heutige Zustand des Rieswegbaues in der Krümmung in kurzen Worten hervorgehoben. Besonders wird die konstruktive Ausbildung des Querschnitts in der Form »des Rinnenprofils« und »des Schwellenprofils (Schwarzwälder Profil)«, die sich als zweckmässigst in der Kurve bewährt haben, betont. Die eigentliche Abhandlung ist in zwei Teile geteilt. Im ersten Teile sind die mit dem Gleiten eines schweren Körpers auf einem im Kreisbogen trassierten Rieswege und in dem zweiten die mit dem Gleiten auf einem im beliebigen Kegelschnitte trassierten Rieswege in Verbindung stehenden Erscheinungen behandelt. Beide Teile sind noch in zusammenhängende eine auf die andere sich stützende Unterabteilungen geteilt.

I.

1. Das Gleiten eines unschweren Körpers auf einem Kreisbogen konstanter Längsneigung α . Die Bahn ist die cylindrische Schraubenlinie. Es werden die Bedingungen, unter welchen sich ein unschwerer Körper auf einer Schraubenlinie bewegt, im kurzen hergeleitet. Diese Bedingungen lauten in Worten: Eine Schraubenlinie entsteht nur dann, wenn die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper bewegt, konstant ist; ihre Richtung mit Richtung der Tangente der Schraubenlinie zusammenfällt und die Bewegende Kraft der Centripetalkraft des Kreises, horizontaler Projektion der Schraubenlinie, gleich ist. Diese Bedingungen werden auch durch Formeln ausgedrückt. Gl. 1 stellt das Verhältniss zwischen dem Krümmungshalbmesser ϱ der Schraubenlinie und dem Krümmungshalbmesser r des Kreises ihrer horizontalen Projektion (Trassierungshalbmesser) dar.

2. Das Gleiten eines schweren Körpers auf einer reibungslosen Unterlage, deren Längsachse die Form eines Kreisbogens konstanter Längsneigung α aufweist. Ein schwerer Körper beschreibt eine cylindrische Schraubenlinie auf einer solchen Unterlage laut Punkt 1 falls sämtlich einwirkende Kräfte nur eine Bewegungskraft gleich der Centripetalkraft des Kreises horizontaler Projektion der Schraubenlinie resultieren. Aus dieser Bedingung folgt dann die Gl. 2, welche die erforderliche Querneigung β der Unterlage bestimmt. Diese auch von Dr. L. Hauska entwickelte Formel bezieht sich nur auf eine Reibungslose Unterlage; kann also bei den rauen föstlichen Riesbauten nicht verwendet werden. Wird $\alpha=0$ schrumpft die Schraubenlinie in eine Kreislinie zusammen, und die Querneigungsformel nimmt die Form der Gl. 3. an.

3. Das Gleiten eines schweren Körpers mit Reibung auf einer Unterlage, deren Längsachse einen Kreisbogen konstanter Längsneigung α aufweist. In diesem Falle ist laut Punkt 2 eine Querneigung erforderlich. Die auf den Körper einwirkende Schwerkraft Q kommt also in drei Hauptrichtungen zur Geltung. Die eine Komponente Q_2 bestrebt die Bewegung in der Richtung der Querneigung β ; die zweite Komponente Q_3 in der Richtung der Längsneigung und die dritte Komponente Q_1 auf beide ersten Richtungen senkrecht wirkend, drückt nur den Körper gegen die Unterlage fest. Zur Bestimmung dieser drei Komponenten betrachtet man die auf den Körper einwirkenden Kräfte in einem Koordinatensystem XYZ .

dessen Anfangspunkt mit einem beliebigen Punkte P der Schraubenlinie zusammenfällt (Abbd. 3). XZ Ebene ist die Radial-Ebene und YZ ist die Tangentialebene des Schraubenliniens Cylinders. XY ist eine horizontale Ebene. Die drei Ebenen stehen senkrecht zueinander; das erwähnte Koordinatensystem ist also ein rechtwinkliges. Komponente Q_1 wirkt unter Neigung β gegen die Horizontale in der XZ Ebene; die Komponente Q_2 unter Neigung α gegen die Horizontale in der YZ Ebene. Die Komponente Q_3 auf die Richtungen der beiden ersten Komponenten senkrecht wirkend, liegt in dem ersten Oktant, und die Schwerkraft Q selbst in der Z Achse. Aus diesen Komponenten zusammengesetztes Parallelepiped ist kein rechtwinkliges, denn die Komponenten Q_2 und Q_3 schliessen einen spitzen Winkel ein. Die mit Nummer 4.) bezeichneten Gleichungen geben sodann die Neigungswinkel der Komponente Q_1 bzw. die Neigungswinkel der PQ_2Q_3 Ebene gegen die XYZ Achsen an, und mit Nummer 5.) bezeichnete Gleichungen bestimmen die Grösse dieser Komponenten. Ausser der Schwerkraft wirkt auf den Körper auch die horizontale Centripetalkraft N ein. Diese wird auch — analog wie Kraft Q — in drei Komponenten zerlegt: N_3 in Richtung der Querneigung, N_2 in Richtung der Längsneigung und N_1 senkrecht auf beide ersten Richtungen. Die Gl. 6.) geben sodann ihre Grösse an. Das Gleiten des Körpers verzögert noch die Reibung μW . μ ist der Reibungskoeffizient, und W Widerstand der Unterlage. Die Reibung wirkt in dem der Bewegung entgegengesetzten Sinne, d. h. in der Richtung $+Q_2$, der Widerstand W aber senkrecht auf die Unterlage, d. h. in der Richtung $-Q_1$. Wünscht man nun, dass der Körper einen Kreisbogen konstanter Längsneigung α beschreibt, so können nach früherem sämtliche auf den Körper einwirkende Kräfte nur eine horizontale Centripetalkraft N resultieren. In den Koordinatensystem $Q_1Q_2Q_3$ (Abbd. 3) ergeben diese Kräfte also drei Gleichgewichtsgleichungen, aus denen Gl. 7.), die die Grösse der Centripetalkraft und Gl. 8.), die die Grösse des Unterlagswiderstandes bestimmt, folgen. Ist nun r eine Funktion, nach Art der Gl. 9, so folgt aus der Gleichgewichtsgleichungen noch eine dritte wichtige Formel, die Gl. 10.). Betrachtet man dieselben Kräfte in dem Koordinatensystem XYZ , gelangt man zu demselben Resultate. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen sind aber die Komponenten des Unterlagswiderstandes aus der Gl. 11.) zu entnehmen und in die Gleichgewichtsgleichungen einzusetzen. Die Auflösungen dieser Gleichungen ergeben ebenfalls die Gl. 7.), 8.) und 10. — Aus den letzten Gleichungen und aus der Gl. 12.) folgen nun wichtige Formeln zur Berechnung des Riesweges. Aus der Gl. 7.) und 12.) ergibt sich die Formel 13.), die die Querneigung β des Riesweges bestimmt. Nachdem die Querneigung bestimmt ist, berechnet sich die Längsneigung α aus der Gl. 14.) die sich auf die Formel 14a) anbringen lässt, falls $tg^2\beta$ gegen 1 verhältnissmässig eine kleine Grösse ist. Beide letzten Formeln folgen aus der Gl. 9.) und 10.) — weichen aber von der vom Dr. Hauska aufgestellten ähnlichen Formel stark ab. Aus der Gl. 14a) geht hervor, dass $tg\alpha$ stets grösser als μ sein muss. Es ist deshalb erforderlich die Längsneigung α in der Krümmung nach der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit v_a (bzw. grössten μ) zu bestimmen, falls man die Bremswirkung der Kurve verhindern will. Praktisch kann man dies auch im Falle $tg\alpha = \mu$ erreichen, wenn der Krümmungshalbmesser ρ gegen die Anfangsgeschwindigkeit v_a genügend gross ist. In diesem Falle wird nämlich $tg\beta$ verschwindend klein, praktisch unausführbar, deshalb also $tg\alpha = \mu$. Tafel 1.) gibt die Werte vom ρ an, bei welchen man praktisch $tg = \mu$ setzen darf, falls μ und v_a bekannt sind. Bei der Benützung dieser Tafel ist aber die Gl. 1 in Betracht zu ziehen.

Gl. 9.) und 10.) lassen sich auf die Form der Gl. 17.) anbringen, aus welcher hervorgeht: ändert sich auf einer fertigen Rieswegkurve der Reibungskoeffizient so muss auch die Unterlage eine veränderliche Querneigung haben. Weiter folgen aus Gleichungen 13.) und 17.) neue Gleichungen

chungen 18.) und 19.) aus denen man sieht: Auf einer fertigen Rieswegkurve, konstanter Längsneigung α und veränderlicher Querneigung β , entspricht einer jeden Veränderung des Reibungskoeffizienten μ eine — und nur eine — durch die Gl. 18.) bestimmte Anfangsgeschwindigkeit v_a , mit welcher sich der Körper auf der Unterlage gleichmässig bewegt und eine Schraubenlinie beschreibt. Der durch die Gl. 19.) bestimmte Wert k wird Rieswegkonstante genannt, weil er alle konstanten Faktoren eines fertigen Riesweges zusammenfasst.

Diesen theoretischen Erfordernissen kann man gewissermassen entgegen kommen: Veränderliche Unterlage ausbilden, indem man dem Rieswege in der Kurve die Form des Rinnenprofils gibt. Konstante Längsneigung wird auch nicht schwer erreichbar sein. Dass aber die Anfangsgeschwindigkeit für alle in Betracht kommenden Werte von μ die Gl. 18 befriedige, ist allerdings nicht erreichbar. Tritt ein schwerer Körper mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit in so eine Rieskurve ein, so wird er zwar gezwungen eine Schraubenlinie zu beschreiben, denn das Rinnenprofil hat nicht nur eine veränderliche Querneigung, sondern viel mehr; es wirkt auch als Führung; der Körper wird sich aber nicht mehr gleichmässig bewegen, sondern ungleichmässig, vielleicht auch in der Kurve stecken bleiben, worüber in dem Punkte 8.) näher gesprochen wird.

4. Über das Rinnenprofil in der Krümmung. Betrachtet man den Reibungskoeffizient μ als eine unabhängige Veränderliche, so verbleibt zur Bestimmung der Form des Rinnenprofils in der Kurve nur die Gl. 17.). Diese Gleichung erinnert an die trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente einer Ellipsen-Evolute. Es ist auch tatsächlich die Gl. 13.) erste Ableitung der Gl. 28.) und 29.) die die Ellipsen-Evolute darstellen, worüber man sich leicht durch einfache Derivation überzeugen kann. Die letzt genannten Gleichungen bestimmen aber nur die Form des Rinnenprofils. Nach Grösse und Form bestimmen das Rinnenprofil die Gl. 30.). In diesen Formeln deutet d die horizontale Projektion der aktiven Breite des Rinnenprofils an. Gl. 13., sowie auch Gl. 30.) lässt sich nur im Falle, wenn die Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 18.) befriedigt, verwenden. Im Allgemeinen, wenn also die Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 18.) auch nicht befriedigt, bestimmen die Koordinaten des Rinnenprofils in der Kurve die Gl. 36.). Gleichungen 30.) sind dann nur ein Spezialfall der Gl. 36.) für $v=\mu$, wo v durch Gl. 9.) definierten Neigungskoeffizient der Riese bedeutet. Indexe max. oder min. beziehen sich auf den grössten bzw. kleinsten Wert der im Betracht kommenden Neigungskoeffizienten.

5. Das Gleiten eines schweren Körpers auf einer mit Längsneigung α und Querneigung β versehenen rauhen Unterlage, deren Achse eine beliebige Raumkurve, die Richtung der Centripetalkraft aber horizontal ist. Der Neigungskoeffizient. In diesem Falle wirken auf den Körper das Eigengewicht Q , Unterlagswiderstand W und die Reibung μW ein. Fügt man diesen tatsächlich wirkenden Kräften noch die entgegengesetzten Trägheitskräfte, die Tangentialkraft T und die Centrifugalkraft N zu, so erhält man nach D'Alambert die zur Berechnung der unbekannten Grössen erforderlichen drei Gleichgewichtsbedingungen, aus denen sich die Gl. 37.), 38.) und 39.) ergeben, welche die Grösse der Centripetalkraft N , den Unterlagswiderstand W und die Tangentialkraft T bestimmen. In Ausnützung dieser Resultate folgt aus der Gl. 37.) die Formel 40.) die die Querneigung β im beliebigen Punkte einer Raumkurve, deren horizontale Projektion des Krümmungshalbmessers r ist, bestimmt. Weiter folgt aus der Gl. 39.) dass die Tangentialkraft T in jenem Bahnpunkte gleich Null, in welchem v gleich μ ist. Ist nun ein solcher Punkt bekannt, so lässt sich die Längsneigung α aus der Gl. 14.) oder 14a.) berechnen, falls sie konstant ist. Denn diese Gleichungen sind eben für diesen Fall und aus der Bedingung $v=\mu$ abgeleitet worden, Zum

weiteren Gebrauche sind noch die Komponenten der Beschleunigung in dem XYZ koordinatensystem durch die Gl. 41, sodann die Normal- und die Tangentialkomponente derselben durch die Gl. 42.) bzw. 43.) angegeben.

Als Bahnkurve lässt sich im Allgemeinen eine beliebige Raumkurve verwenden. Man wird sich doch nur auf die einfachsten Kurven, die bei Berechnung und Bau der Riesen keine grössere Schwierigkeiten bieten, beschränken müssen. In diesem Punkte sind nur zwei specielle Fälle behandelt worden; mit den übrigen in Betracht noch kommenden befasst sich die zweite Abteilung dieser Abhandlung.

1. Fall. $N=0$. Die Raumkurve ist eine gerade. Die Beschleunigung nimmt die Form der Gl. 43a.) an, ein bekannter Ausdruck, falls sich der Körper auf einer schiefen Ebene geradlinig bewegt. Es wird weiterhin auf diesem Speciellfalle erläutert, dass die Bedingung: die Richtung der Centripetalkraft sei horizontal, auch die Bedingung: die Längsneigung soll konstant sein, einschliesst. Der Bereich in diesem Punkte entwickelter Formeln umfasst also nur die Raumkurve konstanter Längsneigung, sonst aber beliebiger Form.

2. Fall. Es sei stets $v=\mu$. Die Tangentialkraft ist also stets gleich Null. Dann ist aber auch die Geschwindigkeit v in jedem Bahnpunkte gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_a . Die allgemeinen Formeln, führen sodann zur Gl. 18.), d. h. der Körper gleitet in der Form einer cylindrischen Schraubenlinie und die Anfangsgeschwindigkeit muss Gl. 18.) genüge leisten; ein Fall der schon in Punkt 3. besprochen wurde.

Vergleicht man die Bewegung eines schweren Körpers das eine Mal auf einer Geraden und das andere Mal auf einer Raumkurve, so sieht man, dass die Bewegung auf der Geraden gleichförmig ist, wenn $\tan \alpha$ gleich μ , und auf der Raumkurve, wenn v gleich μ ist. Es wird deshalb v »Neigungskoeffizient des Riesweges« genannt, der für die Kurve wie für Gerade gilt und die Neigung des Riesweges allgemeiner ausdrückt, denn $\tan \alpha = \mu$ ist nur ein Speciellfall der Gl. $v=\mu$, für $\tan \beta = 0$ (vergl. Formel 9).

6. Über den Minimalradius. Ist die Querneigung gering, oder besteht sie gar nicht, so ist zur Bestimmung des Trassierungshalbmessers nur die Fahrbahnbreite bzw. die Pfeilhöhe f (Abbdg. 8) massgebend (nach der bekannten Formel 46.). Kann man die Querneigung nicht vernachlässigen, so wird sie vom Einflusse auf die Grösse des Trassierungshalbmessers u. z. ungefähr folgendermassen: Die drei Punkte A, B, C (Abbd. 8) liegen in relativ nicht gleicher Höhe mit dem Punkte D. Das gleitende Riesholz liegt nicht auf der Unterlage mit seiner ganzen Länge l , sondern nur mit einem gewissen Teile derselben auf dem vorderen und hinteren Ende. Viel besser wird sich das Riesholz der Unterlage anpassen, wenn es am vorderen und hinteren Ende mit einem Spranz, bearbeitet nach Miklitz oder Dr. Glatz, versehen ist. Aber auch in diesem Falle, wenn man erreichen will, dass das Gleiten in der Kurve von dem Gleiten in der Geraden mit Rücksicht auf den Reibungskoeffizient, der rechnerisch in beiden Fällen gleichgesetzt ist, je weniger abweicht, wird man die erwähnte Höhendifferenz tunlichst begrenzen müssen. Diese Höhendifferenz, folglich auch der Minimalradius, wird nicht nur von der Bahnbreite sondern auch von der Spranzhöhe z abhängen (Abbdg. 8a). Ist die Bahn noch mit Schwellen versehen, so gleitet das Holz von einer Schwelle auf die andere in Punkten, die auch nicht relativ in gleicher Höhe liegen. Dieser Übergang wird eben nur durch den Spranz ermöglicht. Die relative Höhendifferenz dieser Übergangspunkte ist gewiss kleiner als die zwischen den Punkten D und C, denn auf eine volle Holzlänge l entfallen jedenfalls mehr als zwei Schwellen. Bei der Bestimmung des Minimalradius einer Rieswegkurve, versehen mit Rinnenprofil oder auch mit Rippenprofil, wird man deshalb sicher vorgehen, wenn man diesen Wert nicht nur aus der Bahnbreite, sondern auch aus

der Bedingung: relative Höhendifferenz zwischen den Punkten D und B (oder C) kann nicht grösser als die Spranzhöhe z sein, bestimmt. Aus den Formeln 46.) und 47.), welche diesen beiden Bedingungen entsprechen, sowie mit Rücksicht auf die Formel 40.) folgen sodann die Formeln 48.) und 49.), die die Grösse des Minimalradius und der Pfeilhöhe f angeben. Beide Formeln sind praktisch notwendig, denn es muss der Minimalwert von r so bestimmt werden, dass die Pfeilhöhe f auch der Bahnbreite entspricht. Diesem Zwecke dienen die Tafeln III und IV, welche für den mittleren Wert der Spranzhöhe $z=3$ cm., und $g=9,81$ m/sec., den Minimalwert von r angeben. Die Formeln 48.) und 49.) nehmen sodann die Form der Gl. 48a) und 49a) an, nach denen die Tafelwerte berechnet sind. Die Stufenlinien in der Tabelle haben folgende Bedeutung: Unter der Annahme, dass f bei 0,80, 1,20 und 2,0 m. Bahnbreite nur 0,20, 0,40, bzw. nur 0,60 m. ausmachen kann, so geben die fettgedruckten Zahlen der Tafel IV. die kleinsten Radiuswerte an, wenn die tatsächliche Geschwindigkeit gleich oder kleiner als die den fettgedruckten Zahlen entsprechende Tafelgeschwindigkeit ist, u. z. unter der ersten Stufenlinie bei 2,0 m., unter der zweiten Stufenlinie bei 1,20 und unter der dritten bei 0,8 m. Fahrbahnbreite. Ist die tatsächliche Geschwindigkeit grösser als die den fettgedruckten Zahlen entsprechende Tafelgeschwindigkeit, so ist aus der Säule l der tatsächlichen Geschwindigkeit entsprechender grösserer Wert von r zu entnehmen. Beim Rinnenprofil ist für $r_{\min}$ die grösste, und beim Rippenprofil die kleinste in Betracht kommende Geschwindigkeit massgebend. Desswegen schmiegt sich auch das Rippenprofil viel besser dem Gelände an als das Rinnenprofil.

7. Über die mit Rippenprofil versehene Rieswegkurve. Die Geschwindigkeitsänderung in ihr. Die Seitenwände des Rippenprofils wirken als Führung. Das gleitende Rieselholz wird also gezwungen eine bestimmte Kurve — hier eine cylindrische Schraubenlinie — zu beschreiben. Unterlagswiderstand wird mit W_1 , und der Seitenwandwiderstand mit W_2 bezeichnet. Entsprechende — im allgemeinen verschiedene — Reibungskoeffizienten seien μ_1 bzw. μ_2 . Die Seitenwände sind vertikal und in der Form der trassierten Bahnkurve genau ausgeführt. Der Seitenwiderstand wirkt also horizontal und ist dem Kurvenmittelpunkte stets zugewendet. Die in den Koordinatensystem XYZ aufgestellten D'Alambert-schen Gleichungen ergeben sodann weitere Gl. 50), 51) und 52), welche den Unterlagswiderstand W_1 , die Centripetalkraft N , und die Tangentialkraft T bestimmen. Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Seitenwiderstand W_2 , so lässt sich die Tangentialbeschleunigung durch die Gl. 53 ausdrücken. Ist diese gleich Null, so bewegt sich der Körper gleichmässig und die entsprechende Geschwindigkeit c definiert sich durch die Gl. 54. h bedeutet wieder die Rieswegkonstante (vergl. Form. 19). Ist nun die Anfangsgeschwindigkeit v_a und die Querneigung $tg\beta$ bekannt, so lässt sich die Längsneigung $tg\alpha$ aus der Gl. 55.), oder aus der Gl. 55a.) — falls $tg\beta$ gegen 1 ein kleiner Bruch ist — berechnen. Ist umgekehrt v_a und $tg\alpha$ bekannt, so bestimmt sich die Querneigung $tg\beta$ aus der Gl. 56. Längs- und Quergefälle soll man auch in diesem Falle nach der kleinsten noch in Betracht kommenden Anfangsgeschwindigkeit v_a wählen. Beide sind dann für andere Werte der Anfangsgeschwindigkeit konstante Grössen. Dadurch wird aber $tg\beta$ ein kleiner Bruch, so klein, dass man es regelmässig vernachlässigen kann. Die Gl. 54.) und 55.) nehmen somit die Form der Gl. 57.) und 58.) an, und gelten für gleichmässige Bewegung, streng genommen, nur im Falle $tg\beta=0$. Tritt ein Körper mit Anfangsgeschwindigkeit $v_a \leq c$ in die Kurve ein, d. h. mit einer Geschwindigkeit, welche die Gl. 54 bzw. 57 nicht befriedigt, so gleitet er ungleichförmig. Aus der Gl. 53.) folgt: Ist die Tangentialbeschleunigung $a_t > 0$, so ist $v < c$; ist $a_t = 0$, so ist $v = c$ und ist $a_t < 0$, so wird $v > c$. Die dritte Gleichgewichtsgleichung lässt sich auch durch die Gleichung: $T \sin \alpha = Q - W_2$ ausdrücken. W_2 stellt die

Vertikalkomponente des Gesamtwiderstandes dar. Aus diesen Gleichungen folgt nun weiter: Solange $T > 0$, oder, was dasselbe ist, solange $v < c$ ist, wird auch $W_z < Q$. d. h., der Körper wird aus der Bahn nicht so leicht auspringen, denn die Vertikalkomponente des Gesamtwiderstandes W_z ist kleiner als sein Eigengewicht Q . Ist $T < 0$, oder $v > c$ so wird $W_z > Q$ und der Körper springt leicht aus der Bahn aus, falls sich eine zufällige Veranlassung, die den Körper ablenkt, findet, dabei aber die Seitenwand nicht genug hoch ist. Ist $T = 0$, oder $v = c$, so wird $W_z = Q$, der Körper bewegt sich gleichförmig und beschreibt eine cylindrische Schraubenlinie auf solch einer rauen Unterlage ganz analog wie eine Kreislinie auf einer ähnlichen horizontalen Unterlage ohne Reibung (vergl. Punkt 3). Die Gefahr des Ausspringens besteht, wenn auch nicht in so grossem Masse wie zuvor, doch noch immer auch in diesem Falle. Aus dieser Darlegung geht hervor: Der Riesweg in der Kurve ist so anzulegen, dass die in Betracht kommende Anfangsgeschwindigkeit v_a in den Grenzen: $v_{\min} \leq v_a \leq c$ liegt. $v_{\min}$ deutet die kleinste Geschwindigkeit an, bei welcher die Kurve noch arbeiten soll, und c ist die durch Gl. 57.) bestimmte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper gleichmässig in der Kurve bewegt. Bei einer solchen Anlage ist das Bestreben des gleitenden Körpers zum Ausspringen nicht zu gross, was für die Kurven auf der offenen Strecke von Bedeutung ist. Aus diesem Grunde wird auch c als »kritische (stationäre) Geschwindigkeit« genannt. Sie hängt von der Konstruktion der Bahn selbst (r, a, β) ab, und ist eine konstante Grösse für dieselben koordinierten Werte der Reibungskoeffizienten μ_1 und μ_2 . Das oben dargelegte kurz zusammengefasst lautet also: Auf dem mit Rippenprofil in der Kurve versehenen Rieswege, konstanter Längs- und Querneigung gleitet ein schwerer Körper sicher, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit gleich oder grösser als die kleinste Geschwindigkeit, auf Grund deren die Kurve konstruiert, aber gleich oder kleiner als die kritische Geschwindigkeit ist. Oder: Auf dem mit Rippenprofil in der Kurve versehenen Rieswege, konstanter Längs- und Querneigung, gleitet ein schwerer Körper sicher und strebt nicht auszuspriegen nur im Falle die Beschleunigung positiv ist.

Im weiteren wird die Geschwindigkeitsänderung des Körpers, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 57.) nicht befriedigt, betrachtet. Durch Anwendung der Gl. 53.) gelangt man zur Differential-Gleichung 59a), deren allgemeine Auflösung die Gl. 63.) ist. Nach der Bestimmung des Wertes der Integrations-Konstante, nimmt die Gleichung der Geschwindigkeit im beliebigen Bahnpunkte die Form der Gl. 65.) an, φ ist der dem vom Anfangs- bis zum Bahnpunkte zurückgelegten Trassierungsbogen entsprechende Centriwinkel, und ρ ist die Basis der natürlichen Logarithmen. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass sich der Körper, mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit $v_a \leq c$ in die Kurve eingelangt, mit einer der kritischen stetig sich annähernden Geschwindigkeit weiter bewegt. Seine Geschwindigkeit wächst oder fällt auf den Betrag der kritischen Geschwindigkeit, theoretisch zwar in der Unendlichkeit, praktisch aber schon eher, ähnlich wie beim Falle eines schweren Körpers in dem mit Luft erfüllten Raume. Sobald $v_a > c$ wird die Geschwindigkeit des Körpers gebremst. Diese Bremswirkung kann noch gesteigert werden in den s. g. Bremskurven. Gl. 70 gibt die Geschwindigkeit in einer horizontalen Bremskurve an ($fga=0$), und Gl. 71) den Trassierungs-Centriwinkel φ , bei welchem die Geschwindigkeit gleich Null wird. Gl. 73) gibt die Grösse der Geschwindigkeit auf einer mit Gegensteigung (a negativ) versehenen Bremskurve an, und Gl. 74) bestimmt den Wert des Centriwinkels φ , bei welchem der Körper in der Kurve stecken bleibt. Die Gl. 75.) bezieht sich endlich auf die Geschwindigkeit eines, in einer mit $fga=\mu_1$ trassierten Bremskurve, gleitenden Körpers.

8. Über die mit Rinnenprofil versehene Rieskurve. Geschwindigkeitsänderung in ihr. Das Rinnenprofil

genügt nicht nur als Unterlage für Bewegung eines schweren Körpers in der Form einer Schraubenlinie, sondern viel mehr es wirkt auch als Führung, und der Körper wird gezwungen die Schraubenlinie auch in dem Falle zu beschreiben, wie es bereits im Punkt 3 betont wurde, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit auch die Gl. 18 nicht befriedigt d. h., wenn sich der Körper ungleichmässig in der Kurve bewegt. In diesem Falle wird, laut Gl. 40.), $tg\beta$ veränderlich. Streng genommen wird dann aber auch die Längsneigung α veränderlich. Unter der Voraussetzung aber, dass der gleitende Körper das mit genügend hohen Seitenwänden versehene Rippenprofil ohne Veranlassung nicht verlassen kann; sodann mit Rücksicht auf tatsächlich verhältnissmässig kleine Änderung der Längsneigung der Bahn innerhalb des Rinnenprofils, kann jedoch auch in diesem Falle die Längsneigung der Bahn genügend genau als konstant angesehen und der Längsneigung der Riesbahnachse gleichgesetzt werden. Unter dieser Annahme also und aus der Gl. 43.) mit Benützung der Gl. 62.) ausgehend, gelangt man zur Differential-Gleichung 77.), die sich mit Hilfe der Gl. 9.) und 40.) dann mit den dem Zwecke entsprechenden Substitutionen 77b.) und 77d.) auf die Form der Gl. 77e.) anbringen lässt. Allgemeine Auflösung dieser Differential-Gleichung ist die Gl. 78.), welche nach der Bestimmung der Integrationskonstante die Form der Gl. 80.) annimmt. Die Bedeutung der Buchstaben dieser Gleichung ist durch die Gl. 81.), 82.) und 83.) erklärt. Aus der Gl. 80.) lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen: Beide Seiten dieser Gleichung sind gleich Null, wenn die Bedingung 84.) erfüllt ist, oder mit Rücksicht auf die Gl. 81.), 82.) und 84.), wenn die Bedingung 85.) besteht. Ausser dieser Bedingung wird $v=c$ auch im Falle $va \leq c$ für $\varphi \rightarrow \infty$. D. h.: Mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit in die Kurve eingelangter Körper bewegt sich immer rascher oder langsamer mit der dem Werte c sich stetig annähernden Geschwindigkeit, je nachdem $va \leq c$ ist. Es besteht die kritische Geschwindigkeit auch in diesem Falle, die nicht anders, als — folgt aus der Gl. 85.) und 18.) — die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers ist, der sich in einem in Form der Schraubenlinie trassierten Rinnenprofile gleichmässig bewegt. Mit Rücksicht auf die Gl. 81.), 82.), 83.) und 85.) nimmt sodann die Gleichung der Geschwindigkeit im beliebigen Punkte der mit dem Rinnenprofil versehenen Bahnkurve die endliche, durch die Gl. 86.) angegebene, Form an. Diese Gleichung lässt sich aber bei konstanter Längsneigung nur im Falle $tg\alpha > \mu$, d. h. $c > 0$ verwenden. Ist $tg\alpha < \mu$ nimmt die Geschwindigkeitsgleichung die Form der Gl. 89.) an. Im diesem Falle wirkt schon die Kurve bremsend. Der Trassierungs-Centriwinkel φ , bei welchem der Körper stehen bleibt, bestimmt sich aus der Gl. 90.). Schliesslich, im Falle $tg\alpha = \mu$, nimmt die Gleichung der Geschwindigkeit die Form der Gl. 93.) an, die sich noch auf die Form 96.) zur praktischen Benützung anbringen lässt. Bremskurven charakterisiert überhaupt die Beziehung $tg\alpha \leq \mu$. Und zwar nach der Wirkungsstärke in der Reihenfolge: $tg\alpha = \mu$, $tg\alpha < \mu$, $tg\alpha = 0$, $tg\alpha < 0$. Die ersten zwei Fälle sind schon behandelt worden; es verbleiben also noch die letzten zwei übrig. Im Falle $tg\alpha = 0$ bestimmt sich die Geschwindigkeit aus der Gl. 98.) und der Winkel beim welchem $v=0$ ist, aus der Gl. 99.) Ist $tg\alpha < 0$, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle $|tg\alpha| < \mu$ gelten die Gl. 100.) und 101.), im zweiten Falle $|tg\alpha| = \mu$ die Gl. 103.) und 104.) und in dem dritten $|tg\alpha| > \mu$ die Gl. 106.) und 107.), welche die Geschwindigkeit, bzw. den Centriwinkel φ , bei welchem $v=0$ ist, bestimmen.

9. Über die Übergangskurve. Nach der Begründung der Anwendungsnotwendigkeit der Übergangskurve am Anschlusse eines scharfen Kreisbogens an eine Gerade, wird die Gl. 110.) derselben in üblicher Weise im kurzen hergeleitet. Sodann wird auf Grund der Mechanik untersucht, unter welchen Umständen ein Körper auf einer rauen Unterlage die Übergangskurve beschreibt. Als Resultat ergibt sich, dass

eine Übergangskurve entsteht, wenn die Längsneigung der Unterlage konstant und dem Reibungskoeffizienten gleich ist ($\mu = \mu$), die Querneigung aber die Gl. 116.) in jedem Bahnpunkte befriedigt. Die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit muss natürlich mit der Richtung der Tangente in dem Anfangspunkt der Übergangskurve zusammenfallen. Auf Grund dessen lässt sich die Länge der Übergangskurve gegebenenfalls bestimmen. Da aber der Riesweg nicht nur für einen sondern regelmässig für ein ganzes Intervall der Werte von μ anzulegen ist, so ist die Länge der Übergangskurve unmöglich so zu bestimmen, dass sie allen in Betracht kommenden Werten von μ im oben erwähnten Sinne (ohne Führung) entspricht. Man wird deshalb besser vorgehen indem man ihre Länge s aus der Gleichung $C = Rs = 3000$ bestimmt und bei der Berechnung der Geschwindigkeit die eine Hälfte der Gerade, und die andere Hälfte dem Kreisbogen anschliesst. Die Konstante C ist auf Grund der Erfahrungsangaben mit 3000 beziffert worden, kann aber wie beim Rinnen- so auch beim Rippenprofil, nur falls der Kreisbogendurchmesser R nach Punkt 6 vorher bestimmt ist, benützt werden. Dieses Annäherungsverfahren wird nur falls die Übergangskurve gegen die Kreisbogenlänge verhältnismässig kurz ist empfehlen. Im entgegengesetzten Falle wird man besser tun, wenn man anstatt der langen Übergangskurve und des kurzen Kreisbogens eine andere einfache Kegelschnittkurve z. B. stehende Ellipse, Parabel oder Hyperbel anwendet. Solche einfache Kurven vereinigen die guten Eigenschaften der Übergangskurve und des Kreisbogens, haben gewisse Vorzüge sogar (der Minimalwert des Krümmungshalbmessers tritt nur in einem Punkte auf) und schmiegen sich oft besser dem Gelände an.

10. Beispiele. In diesem Punkte wird der theoretische Teil der Abhandlung an Beispielen erläutert und ergänzt. Diese Beispiele zeigen unter anderen auch dass der Rippenprofil einen grossen Vorzug vor dem Rinnenprofil hat, indem er einen viel kleineren Halbmesser erträgt und besser sich dem Gelände anschmiegt. Es wird überhaupt in der Kurve nur der Rippenprofil, auch im Falle der übrige Teil des Riesweges mit Rinnenprofil versehen ist, empfohlen.

II.

Dieser Teil enthält die Betrachtung über das Gleiten und die Geschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers auf einer, in der Horizontalprojektion einen beliebigen Kegelschnitt aufweisenden Bahn, konstanter Längsneigung. In den Punkten 11.), 12.), 13.) und 14.) werden die Bedingungen untersucht unter welchen ein schwerer Körper auf einer festen Unterlage die Parabel, die Hyperbel, die stehende oder die liegende Ellipse beschreibt, sodann das Geschwindigkeitsänderungsgesetz für jeden einzelnen dieser Fälle abgesondert festgesetzt. Im Punkt 15.) werden die so erhaltenen Resultate für alle möglichen Kegelschnitte über einer gemeinsamen Sehne in Betracht gezogen und verglichen. Im Scheitelpunkte C eines jeden Kegelschnittes ist die Tangentialkomponente der Beschleunigung gleich Null. Aus dieser Tatsache folgt, dass auch $v = \mu$ ist, und weiter noch die Gl. 188.), welche die Querneigung der Unterlage im Scheitelpunkte angibt. Im Scheitelpunkte eines jeden Kegelschnittes gilt auch die Formel 189. Die beiden letzten Formeln ergeben sodann die Gl. 190.), welche die Geschwindigkeit eines gleitenden schweren Körpers im Scheitelpunkte eines jeden Kegelschnittes bestimmt. Ebenso wird festgestellt, dass auch die Gl. 191.) eine allgemeine für alle über gemeinsamer Sehne stehenden Kegelschnitte gültige Form aufweist. (Im Speziellfalle der Parabel nimmt sie die Form der Gl. 191a) an). Desshalb kann man der Gl. 190.) auch die Form der Gl. 192.) geben, welche die Beziehung zwischen der Anfangsgeschwindigkeit, der Bahnkonstante und dem Reibungskoeffizienten angibt. Die Rieswegkonstante k nimmt in dieser Formel eine allgemeinere Form der Gl. 193.) an, die für alle Kegelschnitte gilt. (Im Speziellfalle der Parabel geht sie in die Form der Gl. 193a) über).

Aus der Gl. 192.) folgt nun weiter: Ändert sich der Reibungskoeffizient auf einer fertigen, im Horizontalprojektion einen beliebigen Kegelschnitt aufweisenden Bahn, konstanter Längsneigung und nach der Gl. 194.) veränderlichen Querneigung, so entspricht einem jeden Werte vom μ nur eine durch die Gl. 192.) ganz bestimmte Anfangsgeschwindigkeit v_a . In diesem Falle ist die Geschwindigkeit in symmetrischen Punkten des Kegelschnittes gleichgross. Vergleicht man die Formeln 188, 189 und 190 mit den Formeln 17.) 13.) und 18.) so sieht man, dass sie in jedem Kreispunkte und nur in dem Scheitelpunkte der übrigen Kegelschnitte gelten. Deshalb lässt sich die Längsneigung, der Minimaldurchmesser sowie das Querprofil auch im Scheitelpunkte eines jeden Kegelschnittes auf die bei der Kreisbahn in der ersten Teile erklärte Weise bestimmen. Im weiteren werden die Kriterien, nach welchen man ein Kegelschnitt von dem über derselben Sehne stehenden anderen Kegelschnitt unterscheiden kann, abgeleitet. Die Anwendung eines anderen Kegelschnittes kommt überall dort zu Tage, wo der Kreisbogen wegen der überlangen Übergangskurve unanwendbar ist, oder wo sich ein anderer Kegelschnitt besser als der Kreisbogen dem Gelände anschmiegt.

16. Über den Riesweg mit konstanter Längsneigung in der mit Rinnenprofil versehenen Kurve, deren Horizontalprojektion einen beliebigen Kegelschnitt aufweist. Das Rinnenprofil wirkt als Führung und der Körper wird gezwungen den bestimmten Kegelschnitt zu beschreiben, auch im Falle die Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 192.) nicht befriedigt. In dem Kreise bewegt sich der Körper in solchem Falle nicht mehr gleichmässig und in den übrigen Kegelschnitten ist die Geschwindigkeit in den symmetrischen Punkten nicht mehr gleichgross. Aus der Abbdg. 20.) geht weiter hervor, dass die Anfangsgeschwindigkeit v_a (in dem Punkte A) gleich der Endgeschwindigkeit v_b (in dem Punkte B) unabhängig von der Form des Kegelschnittes ist, falls die Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 192.) befriedigt. Denn A und B sind gemeinschaftliche und symmetrische Punkte aller über derselben Sehne stehenden Kegelschnitte. Weiter wird gezeigt: im Falle die Anfangsgeschwindigkeit die Gl. 192.) nicht befriedigt, ist die Endgeschwindigkeit v_b von der Anfangsgeschwindigkeit v_a zwar verschieden, aber von der Form des Kegelschnittes unabhängig. Gleitet nun ein schwerer Körper von A nach B tatsächlich in Form eines bestimmten Kegelschnittes, so wird man rechnerisch annehmen, dass er einen über derselben Sehne stehenden Kreisbogen beschreibt und man wird die Endgeschwindigkeit im Punkte B nach den Formeln Punkt 8 berechnen können. In dem tatsächlichen Scheitelpunkte C berechnet sich sodann die Geschwindigkeit v_c aus der Formel 214.) in welcher c_c die Scheitelgeschwindigkeit des virtuellen Kreisbogens bedeutet. Die Geschwindigkeit in den übrigen Kurvenpunkten ist für die Berechnung des Riesweges ohne Belang.

17. Über den Riesweg mit konstanter Längsneigung in der mit Rippenprofil versehenen Kurve, deren Horizontalprojektion einen beliebigen Kegelschnitt aufweist. Geringer Einfluss der Querneigung wird vernachlässigt. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden. a) Die Geschwindigkeit in den symmetrischen Kurvenpunkten ist gleichgross. Die Scheitelpunktgeschwindigkeit berechnet sich aus der allgemeinen Formel 216.), denn in diesem Falle genügt die Anfangsgeschwindigkeit der Gl. 192.). Die Längsneigung wird nach der kleinsten noch in Betracht kommenden Geschwindigkeit durch die Gl. 218.) bestimmt. b) Die Geschwindigkeit ist in den symmetrischen Kurvenpunkten ungleichgross. Man wird analog wie bei Rinnenprofil verfahren und rechnerisch annehmen, dass sich der Körper in einem über derselben Sehne gedachten Kreisbogen bewegt und sodann die Endgeschwindigkeit mittels Formeln Punkt 7 berechnen können.

Im Punkt 18.) wird schliesslich die theoretische Seite des zweiten Teiles auf einem Beispiele erörtert und ergänzt.