PROF. DR. A. LEVAKOVIĆ:

ANALITIČKI OBLIK ZAKONA RASTENJA

(ANALYTISCHE FORM DES WACHSTUMSGESETZES).

SADRŽAJ (INHALT):

A) UVOD.

Visina, debljina i drvna sadržina (drvna masa) pojedinog stabla ili prosječno i cijele sastojine povećava se (raste) tokom vremena, naravski uz izvjesne (zimske i noćne) stanke. Iznos povećanja, koji nastane u izvjesnom intervalu vremena, nazivlje se prirastom.

Rastenje spomenutih dimenzija dotično drvne sadržine traje kod pojedinog individua sve dotle, dok za to postoje biološki uslovi, t. j. u prvom redu potpunost i vitalnost terminalnih i perifernih organa stablovih. S obzirom na ovo povećavanje tokom vremena izlazi (kod pojedinog individua) svaka od spomenutih veličina kao izvjesna, svakako ali kontinuitetna funkcija vremena dotično starosti stabla. Kontinuitetna je ova funkcija zato, što fiziološko rastenje, samo po sebi, nikako ne spada među procese, koji počinju i (bez naprasitog umješavanja u život stabla) prestaju iznenada ili koji bi u svome toku pokazivali iznenadne i oštro prekinute skokove.

Ali kako se rastenje, pa prema tome i priraščivanje mora ipak da mijenja tokom vremena, to ovo svojstvo kontinuitetno-funkcionalne zavisnosti od vremena pripada naravski i prirastu. Tek pri tom između same visine, debljine i drvne mase kao funkcije vremena, t. j.

$$y = f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

i njenog prirasta kao također funkcije vremena, t. j.

$$y' = f'(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

postoji razlika u toliko, što je visina itd. osnovna, a njen prirast derivirana funkcija vremena, koja se (kao što ćemo još vidjeti) izražuje u formi kvocijenta.

Zapravo uzevši, prirast u prvobitnom smislu riječi nije kvocijenat, već sasvim obična diferencija:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

između iznosa y_1 na početku i iznosa y_2 na koncu izvjesne prirasne periode, koja zapravo (najopćenitije uzevši) može da bude sasvim povoljno dugačka dotično kratka, pa naravski i beskonačno kratka. U zadnjem slučaju mora dakako i iznos prirasta da padne ispod svake mjere, t. j. da se beskonačno približuje nuli kao graničnoj vrijednosti. Kako u tom slučaju ne može uopće da bude govora o kakvoj bilo izmjeri prirasta, to se uvijek onda, kad imamo želju da izvjesni konkretni iznos prirasta baš utvrdimo (više manje pouzdano), moramo nužno da ograničimo na konačne intervale vremena.

S obzirom na izvjesne (poznate) okolnosti može kod stabala da kao najmanji, još nekako ustanovljivi, iznos prirasta dođe u obzir redovno samo p u n i j e d n o g o d i š n j i prirasni iznos. Prema tome i kao najmanji interval vremena, koji praktički može kao prirasna perioda još da dođe u obzir, važi redovno tek puna jedna godina. No iz poznatih nekih razloga (i tehničkih i ekonomskih) izlazi u pravilu i puni jednogodišnji interval vremena kao prirasna perioda zapravo nedovoljne još dužine. Stoga smo redovno prisiljeni da i cijeli jednogodišnji iznos prirasta ustanovljujemo ne sam za sebe i u formi spomenute obične diferencije, već kao p r o s j e č n i godišnji iznos unutar izvjesne periode znatno duže od jedne godine, da ga dakle ustanovljujemo u formi kvocijenta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

gdje vremenska diferencija iznosi obično 10 i rijetko kada manje od 5 godina. Praktična provedba ustanovljivanja godišnjeg prirasta u šumarstvu zapravo se dakle tako reći uopće ne osvrće na jednadžbu 3, već samo na jednadžbu 4, pa prema tome i na prirasne periode znatno duže od jedne godine. No ipak ako se radi o tome, da se sam t o k priraščivanja utvrdi a n a l i t i č k i, t. j. u smislu jednadžbe 2, ne možemo a da svaki pojedini interval vremena (Δx) ne skratimo do u beskonačnost, pri čem on dobiva poznatu oznaku dx (diferencijal vremena), dok njemu pripadni (također beskonačno maleni) iznos faktičnog prirasta dobiva sada oznaku dy (diferencijal funkcije, osnovne naravski). Jednadžba 4 poprima uz taj uslov poznati oblik:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

koji zapravo nije drugo, već detaljizirani oblik jednadžbe 2. Kvocijenat sadržan u jednadžbi 5, tzv. diferencijalni kvocijenat (derivacija) osnovne funkcije, ma da je sastavljen samo od beskonačno malenih veličina, može ipak da bude konačan, kao što to redovno i biva (osim u prvom momentu stablova života ili za vrijeme tzv. vegetacione stanke). On stoga može da predstavi puni jednogodišnji iznos prirasta, samo naravski na način obrnut, nego li je to slučaj kod jednadžbe 4. Prema jednadžbi 4 izlazi naime jednogodišnji prirast kao posljedica rastenja tokom vremena znatno dužeg od jedne godine, dok prema jednadžbi 5 izlazi on kao posljedica rastenja tokom vremena beskonačno kraćeg (razmjerno uzevši) od jedne godine. U prvom je slučaju prema tome računski iznos jednogodišnjeg prirasta veličina nepodvržena promjeni tokom izvjesnog broja godina, dok u drugom slučaju izlazi on — sve i unutar granica jedne te iste godine — kao vanredno varijabilan, već prema intenzivnosti (dotično postojanju ili nepostojanju) rastenja u pojedinom diferencijalu vremena.

Prema tome godišnji prirast prema jednadžbi 5 izlazi kao prirast, koji je doduše nastao tek u jednom (ovom ili onom) diferencijalu vremena, ali kojega je iznos p r e r a č u n a n n a j e d i n i c u v r e m e n a (jednu godinu). S obzirom pak na beskonačnu kratkoću pojedinog diferencijala vremena smatra se u duhu diferencijalnog računa, da je taj preračunani iznos prirasta dospio (uslijedio) baš točno u onoj tački vremena (x), iza koje neposredno slijedi dotični diferencijal vremena. Taj na vremenski interval od jedne godine preračunani (povećani) iznos prirasta mijenja se dakle svakog pojedinog momenta. On drugim riječima teče besprekidno, pa mu zato zapravo pripada naziv t e č a j n i g o d i š n j i b e s p r e k i d n i prirast za razliku od t e č a j n o g g o d i š n j e g p r e k i d n o g prirasta, koji se mijenja samo od godine do godine i poznat je pod nepotpunim nazivom »tečajni godišnji prirast«.

Jednostavni matematički izraz ovoga posljednjega sadržan je u jednadžbi 3, dok mu analitički izraz izlazi iz jednadžbe 5 i glasi:

$$\Delta y = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

gdje x_1 označuje starost stabla na početku, a x_2 starost stabla na svršetku pojedine iz života stablova baš u obzir uzete godine.

Ma da, kao što rekoh, zbiljna krivulja rastenja kod pojedinog individua ne može da bude diskontinuitetna, ipak je ona oblikom svojim takova, da se u svim svojim detaljima nikako ne da obuhvatiti ma kakovom analitičkom jednadžbom, koja bi — recimo — visinu stabla u kojojgod tački njegova života sasvim strogo povezivala u funkcionalni odnos sa vremenom kao nezavisnom varijabilom. Nije to moguće iz ovih razloga:

1. Zbiljna krivulja rastenja ima zapravo (radi mirovanja vegetacije u zimsko i noćno doba) stepeničast oblik, i to dvostruko stepeničast, t. j. i sa dnevnim i sa godišnjim stepenicama, kojima su uglovi naravski zaobljeni, a povezne linije između dnevnih horizontala nagnute i krivuljaste.

2. I širina i visina pojedinih tih stepenica (i dnevnih i godišnjih), jednako kao i forma spomenutih poveznih linija, pod uplivom je ogromnog mnoštva raznih i nutarnjih i vanjskih

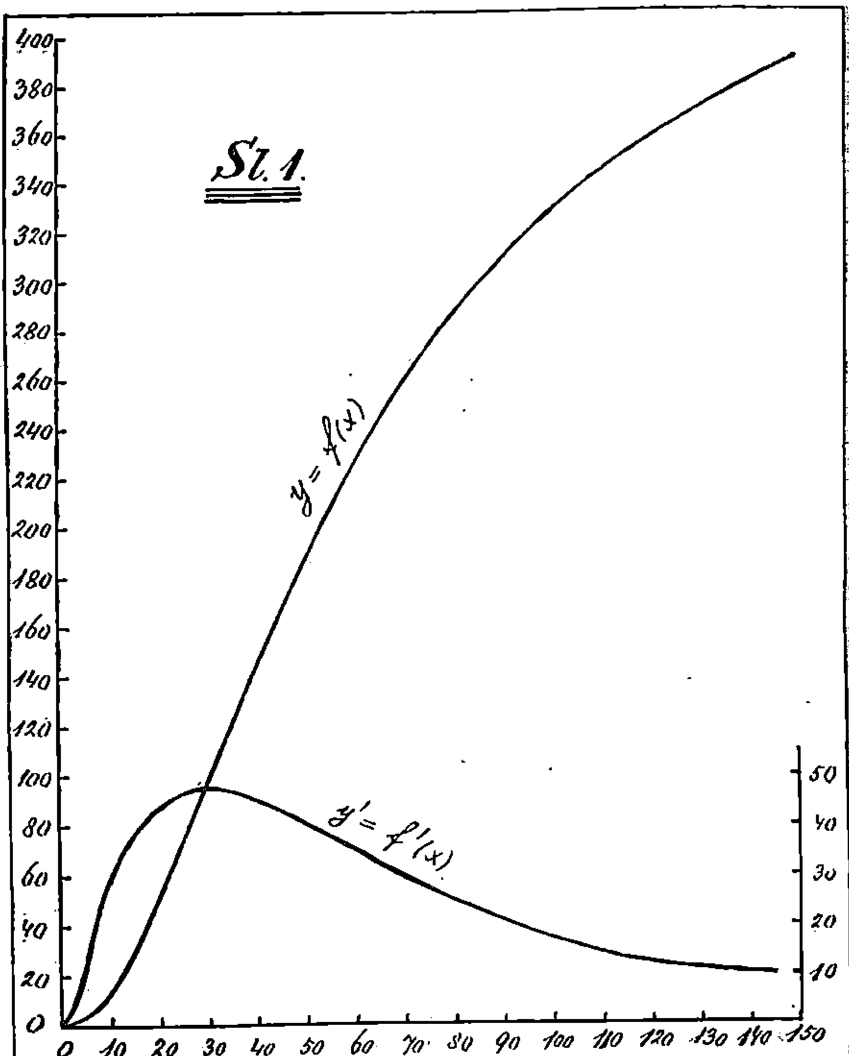
čimbenika (n. pr. sad povoljnijih, sad opet nepovoljnijih atmosferskih i uopće prehrambenih prilika, sad raznih oboljenja i eventualno potom ozdravljenja itd. itd.) kao i raznih njihovih povoljnijih ili nepovoljnijih kombinacija. Radi toga je i širina i visina pojedinih tih stepenica, jednako kao i forma spomenutih poveznih linija, vanredno nestalna, i to tako da se apsolutno ne da uzeti ni u kakav račun.

S obzirom na ove okolnosti, a jednako i s obzirom na neizbježive pogreške mjerenja (kojih je utjecaj skopčan sa sličnim posljedicama), ne može dakako o p r a v o j »jednadžbi (funkciji) rastenja« da bude ni govora. To međutim još ne znači potpunu našu nemoć s obzirom na analitičku definiciju toka rastenja. Nas uostalom sa ekonomskog gledišta ni ne interesuje b a š f a k t i č n i r a z v o j s v a k o g p o j e d i n o g i n d i v i d u a, pa još u intervalima vremena sasvim kratkima. Što nas interesuje, to je p r o s j e č n i individualni razvoj u n u t a r c i j e l i h s k u p i n a stabala dotično cijelih sastojina kao i prema godišnjim prosjecima unutar intervala znatno većih od jedne godine. Za taj je pak razvoj poznato iz iskustva, da se faktično već dade predstaviti prilično jednostavnom *y*- krivuljom, kao što je npr. ona na slici 1, koja predstavlja tok rastenja u visinu i kojoj je krivulja sadržinskog rastenja posve analogna.

Krivulja rastenja na sl. 1 nacrtana je prema — na iskustvu osnovanim — podacima prof. G u t t e n b e r g a (iz pregleda literature vidi br. 16, str. 45). Ona, kao što vidimo, pokazuje, da rastenje visine i sadržine počinje sa iznosom $y=O$ (u starosti $x=O$), da je početni smjer toga rastenja tangencijalan na apscisnu os, da je zatim do izvjesne starosti rastenje ubrzano, da nakon toga prolazi kroz tzv. infleksionu tačku i biva zatim sve više usporeno. Ovaj zadnji dio krivulje mora da se konačno završi u smjeru paralelnom sa apscisnom osi.

Krivulja p r i r a š ć i v a n j a, koja (s obzirom na visinu i sadržinu) izlazi iz prosječne krivulje r a s t e n j a, ima u glavnom oblik krivulje y' na slici 1, nacrtane također prema spomenutim podacima. Ona dakle, kako nam to redovno pokazuje iskustvo, izlazi iz ishodišta koordinata u smjeru tangencijalnom na apscisnu os, teče zatim spočetka konveksno (sa konveksnošću, kod visinskog prirasta, kadšto i sasvim neprimjetljivom), a onda konkavno prema toj osi, pri čem u izvjesnoj vremenskoj tački postigne kulminaciju. Nakon toga iz konkavnog smjera prelazi pomalo opet u konveksni i na kraju krajeva ulazi pomalo u samu apscisnu os — i to u smjeru tangencijalnom na tu os.

Ova krivulja ima prema tome jednu kulminacionu i dvije infleksione tačke (vidi G u t t e n b e r g, isto djelo, str. 17, 18), dok krivulja rastenja nema prave kulminacione tačke, jer se završuje u smjeru paralelnom sa apscisnom osi. Inače krivulja y' pokazuje jednu naročitu karakteristiku, a to je asimetrija prema ordinati kulminacione tačke.



Napomenutim krivuljama bile bi potpuno slične i krivulje, što ih prosječno pokazuje rastenje i priraščivanje debljine, kad bi se ova veličina mjerila baš točno pri zemlji. No kako se iz poznatih važnih razloga debljina mjeri obično u visini prsiju (1.3 m iznad zemlje), to se dotične krivulje ne mogu da odnose na cijeli život stabla (i na najraniju mladost), pa nisu stoga potpune. Ipak i one unutar onoga vremena, za koje uopće mogu da dođu u obzir, pokazuju (kao što je poznato) punu analogiju sa spomenutim već krivuljama (visinskim i visinsko-prirasnim dotično sadržinskim i sadržinsko-prirasnim) izuzevši naravski jedino prvi početak ovih dviju vrsti potpunih krivulja. Toga radi (s obzirom na ovaj izuzetak) analitički zakon, koji može da okarakteriše rastenje visine i sadržine, ne može da se sasvim bez daljnjega protegne i na rastenje debljine, već mora u tu svrhu da se ponešto modificira. O toj modifikaciji bit će govora pri kraju ove radnje, dotle pak ograničit ću se pri istraživanjima o analitičkom obliku zakona rastenja samo na rastenje (i prirašćivanje) visine i sadržine.

Oblik krivulja rastenja i prirašćivanja, kako se on prosječno očituje kod šumskih stabala i sastojina i kako on danas važi kao (u prosječnom pogledu naravski) ispravan, poznat je već pred više od pola stoljeća. Pitanje pak, kakove bi jednadžbe mogle da prosječni tok rastenja i prirašćivanja okarakterišu što potpunije i bolje, interesuje šumarske stručnjake (sa većim ili manjim prekidima) već kojih sto godina. Karl Breymann (br. 1, str. 60 i d.) veli, da su se šumarski stručnjaci već prije 1837. godine bavili s pitanjem zavisnosti prirasta od starosti. Navodeći neke od tih funkcija dokazuje Breymann njihovu neispravnost, te postavlja i obrazlaže novu jednu, danas međutim bespredmetnu funkciju.

Daljnje publikacije šumarskih stručnjaka, koje se bave ovim pitanjem, navedene su pod rednim brojevima 2—23 spomenutog pregleda, koji naravski nema pretenzija na posvemašnju potpunost.

Ni danas još nije spomenuto pitanje sišlo sa dnevnoga reda, a u novije doba počeli su njime da se bave i agronomi, pa čak i čisti biolozi (br. 25—37). Sa izvjesnim prekidima proučavam i ja ovo pitanje već duže vremena, pa sam 1930. godine (br. 24) objelodanio u tom pogledu jedno prethodno saopćenje, u kojem sam (bez izvođenja) priopćio jednu »jednadžbu rastenja« i ujedno demonstrirao njenu prilagodljivost na konkretan jedan tok rastenja. Sada međutim hoću da obuhvatim cijelo ovo pitanje iz temelja, pa ću pri tom morati da se pozabavim i sa poznatim već jednim zakonom, koji sa zakonom, što ću ga ovdje razviti, stoji u izvjesnoj rodbinskoj vezi.

B) FUNKCIJE PRIRAŠĆIVANJA.

I. OSNOVNA FUNKCIJA

1. Izvod.

Krivulja rastenja, kako je prikazuje sl. 1, znatno je jednostavnija od krivulje priraščivanja, a ipak nam za direktan i samostalan izvod njene jednadžbe manjka zapravo svaki oslonac. Naprotiv se jednadžba priraščivanja dade izvesti direktno, strogo i u potpunosti već sama za sebe i to na bazi spomenute činjenice, da krivulja priraščivanja izlazi iz apscisne osi (iz ishodišta koordinatskog) i da se opet u nju potpuno vraća (na kraju života stablovog dotično sastojinskog). Iz te činjenice izlazi naime jedna važna posljedica, t. j. da sve (teoretski uopće moguće) prve derivacije prirasne krivulje, dakle:

$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

koje jedna za drugom slijede počevši od lijevog kraja krivuljinog (od ishodišta koordinatskog) pa sve do njene kulminacije, imaju pozitivan predznak, a sve ostale (t. j. odatle pa do desnog krivuljinog kraja) da imaju negativan predznak. Kad to važi za krivuljine derivacije (diferencijalne kvocijente), onda važi i za njene diferencijale (dy'), pošto svi — međusobno jednaki — diferencijali vremena mogu da budu samo pozitivni. A kako je suma svih pozitivnih diferencijala krivuljnih (kojih naravski, kao beskonačno malenih, ima beskonačno mnogo) isto tako velika kao i suma svih negativnih njenih diferencijala, jer je naime i jedna i druga jednaka maksimalnoj ordinati krivuljinoj, to suma obiju tih suma mora naravski da bude jednaka nuli. Ako prema tome pojedine (međusobno beskonačno blize) ordinate krivuljine, počevši od lijevog pa do desnog njenog kraja, označimo redom sa $y_1'. y_2' \ldots\ldots y'_n$, onda iz rečenoga izlazi jednadžba:

$$\frac{dy_1'}{dx} + \frac{dy'_2}{dx} + \ldots + \frac{dy'_n}{dx} = O \quad \ldots \quad (8)$$

a iz ove i druga, s ovom inače potpuno identična, t. j.

$$\frac{dy_1'}{(y_1')^p\, x_1\, dx}\,(y_1')^p\, x_1\, dx + \ldots + \\ + \frac{dy'_n}{(y'_n)^p\, x_n\, dx}\,(y'_n)^p\, x_n\, dx = O \quad \ldots\ldots \quad (8a)$$

gdje p može da bude ma koji realni i konačni broj (pozitivni ili negativni, cijeli ili slomljeni), uključivši ovamo i nulu.

Obje ove jednadžbe važe bezuslovno za svaku krivulju, koja i izlazi iz apscisne osi i opet se u nju vraća, bez obzira da li je krivulja prema maksimalnoj ordinati (pozitivnoj naravski, jer ovdje može da bude govora samo o pozitivnim ordinatama) simetrična ili asimetrična kao i bez obzira na sam položaj ordinatne osi, t. j. da li ova prolazi baš kroz samo izlazište krivuljino iz apscisne osi ili kroz kojugod drugu tačku krivuljinu (t. j. između oba njena kraja).

Mi ćemo ovdje prethodno suponirati:

1. da je krivulja simetrična prema maksimalnoj svojoj ordinati;

2. da se ova ordinata nalazi baš u samoj ordinatnoj osi.

U tu svrhu podvrći ćemo posljednju jednadžbu uslovu, da svi njeni slomljeni faktori budu međusobno jednaki, t. j. da svaki od njih (označen općenito, bez indeksa) bude jednak izvjesnom od nule različitom, konačnom i konstantnom iznosu k, dakle:

$$\frac{dy'}{(y')^p x \, dx} = k \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (9)$$

U tom slučaju iz jednadžbe 8-a izlazi neposredno jednadžba:

$$(y_1')^p x_1 \, dx + \cdots + (y_n')^p x_n \, dx = 0 \qquad (10)$$

koja faktično i važi strogo u slučaju funkcija (krivulja) simetričnih prema ordinatnoj osi. Uz supstituciju:

$$p = 1 - \frac{1}{r} \qquad (11)$$

slijedi iz jednadžbe 9 jednostavna diferencijalna jednadžba

$$(y')^{\frac{1}{r}-1} \, dy' = kx \, dx \qquad (12)$$

gdje r u smislu spomenutog ograničenja za p iznose može da zauzme kojugod realnu vrijednost (pozitivnu ili negativnu), isključivši jedino nulu. Mi ćemo ipak ograničiti r samo na konačne vrijednosti.

Integracijom zadnje jednadžbe i daljnjim jednostavnim transformacijama dobiva se

$$y' = \left(\frac{c}{r}\right)^{r}\left(1 + \frac{kx^2}{2c}\right) \qquad (13)$$

gdje je c integraciona konstanta. Nju ćemo ograničiti na iznose različite od nule i konačne, ali sa predznakom još neodređenim.

Svi dakle parametri ove zadnje jednadžbe imaju još neodređene predznake, pa bi u tom pogledu mogla a priori da se očekuje mogućnost raznih kombinacija. No kako y' može, kao što rekoh, da bude samo pozitivno, to se iz prvog jednadžbinog faktora vidi već na prvi pogled, da u slučaju pozitivnog r može i c da bude samo pozitivno i obrnuto: u slučaju negativnog r mora da bude negativno i c. Mi ćemo ovdje uzeti samo prvi slučaj, t. j. pozitivne vrijednosti za r i c. Stavi li se sada $x = o$, onda iz zadnje jednadžbe izlazi:

$$y' = \left(\frac{c}{r}\right)^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

t. j. iznos, koji u smislu obiju naših osnovnih supozicija mora da bude veći od ma kojeg drugog y'- iznosa. Otud pak (a s obzirom na jednadžbu 13) slijedi, da k mora svakako da bude negativno. Stavi li se dakle:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{c}{r}\right)^r &= a \\ \frac{2c}{k} &= -g^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

onda jednadžba 13 dobiva sasvim jednostavni oblik:

$$y' = a\left(1 - \frac{x^2}{g^2}\right)^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

prema kojem se x može da giblje između konačnih i jednakih granica $(+g)$ i $(-g)$, dok y' zauzimlje pri tom dva puta sve moguće vrijednosti između o i a.

To bi bila funkcija priraščivanja, kad bi prirasna krivulja bila simetrična prema maksimalnoj svojoj ordinati, što međutim (kao što vidjesmo) nije slučaj. Okolnost, da se maksimalna ordinata prema toj funkciji nalazi baš u samoj ordinatnoj osi, sasvim je sporedna s obzirom na laku mogućnost transformacije funkcijine s pomoću nove ordinatne osi postavljene baš točno na lijevi kraj krivulje.

Jednadžba 16, sama po sebi, nije dakle ono, za čim mi ovdje težimo, ali nam ona daje ipak čvrsto uporište za postignuće cilja, t. j. za dedukciju funkcije, koja o asimetriji prirasne krivulje strogo vodi računa. Ona naime može da se napiše i u obliku:

$$y' = a\left(1+\frac{x}{g}\right)^{r}\left(1-\frac{x}{g}\right)^{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16a)$$

koji uz izvjesne, sasvim neznatne izmjene u pogledu parametara poprima općenitiji oblik, sposoban isto tako za karakterizaciju krivulja asimetričnih kao i krivulja simetričnih. Potrebno je u tu svrhu samo to, da se parametri g i r u drugom binomskom faktoru zadnje jednadžbe označe u principu kao različiti od onih u prvom binomskom faktoru, pri čem zadnja jednadžba poprima formu:

$$y' = a\left(1+\frac{x}{g_1}\right)^{r_1}\left(1-\frac{x}{g_2}\right)^{r_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

općenitiju, kao što rekoh, od forme pređašnje. Općenitija je ona u toliko, što u principu važi za krivulje asimetrične, ali može ujedno da bude primijenjena i na krivulje simetrične, pri čem već eo ipso, t. j. skroz automatski, dolazi do isčeznuća gornjih razlika u istoimenim parametrima.

Smjer i stepen asimetrije, a isto tako i položaj maksimalne ordinate prema ordinatnoj osi može prema jednadžbi 17 da bude vrlo različit. Zavisi to o konkretnim iznosima parametara, koji naravski mogu vrlo da variraju, ali prema dosadanjim pretpostavkama moraju ipak svi da budu pozitivni.

Pri izvodu funkcije 16 suponirali smo, da se maksimalna ordinata krivuljina nalazi baš u samoj ordinatnoj osi. Prema tome i ta funkcija sadrži izričito isti taj princip, dok naprotiv funkcija 17 dopušta, kao što rekoh, i drugačiji položaj maksimalne ordinate. Mi ćemo ipak i za nju prihvatiti onaj raniji princip, t. j. koincidenciju maksimalne ordinate sa ordinatnom osi, jer samo uz taj uslov može funkcija 17 da se kasnije transformira sasvim po volji, već prema potrebi pojedinog konkretnog slučaja.

Prije ma kakove transformacije treba dakle gornja funkcija da ima spomenuto kardinalno svojstvo, t. j. da joj se kulminaciona tačka nalazi baš u samoj ordinatnoj osi. No šta otud izlazi u pogledu parametara funkcijinih? Do bismo odgovorili na ovo pitanje, treba najprije da utvrdimo izraz za apscisu kulminacione tačke funkcijine. Utvrditi ovaj izraz znači, kao što je poznato, diferencirati funkciju po x, zatim taj diferencijalni kvocijenat staviti jednakim nuli i onda ovu zadnju jednadžbu riješiti po x. Na taj način, t. j. putem jednadžbe $y'' = o$ izlazi iz funkcije 17 jedno jedino riješenje za x, t. j.

$$x = \frac{r_1 g_2 - r_2 g_1}{r_1 + r_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Stavi li se sada $x = o$, onda odovud izlazi:

$$r_1 g_2 = r_2 g_1 \quad \dots\dots\dots \quad (19)$$

a odovud dalje:

$$\frac{r_1}{g_1} = \frac{r_2}{g_2} \quad \dots\dots\dots \quad (20)$$

Ako dakle kulminaciona tačka funkcijina pada baš u samu ordinatnu os ($x = o$), onda granični i eksponentski parametri funkcijini stoje jedni prema drugima u proporciji određenoj jednadžbom 20. S pomoću ovoga normalnog odnosa između parametara možemo već iz samog pogleda na funkciju 17 (a na osnovi konkretnih iznosa za g_1 i g_2) lako da prosudimo, koji ogranak krivulje ima da bude duži, a koji kraći: da li onaj s lijeva od ordinatne osi ili onaj s desna. Obrnuto pak, već prema obliku krivulje y' na sl. 1 možemo odmah lako da konstatujemo, da bi kod prirasnih krivulja (ako bismo kod njih ordinatnu os postavili baš kroz samu kulminacionu tačku) imalo da bude $g_2 > g_1$, pa prema tome (i to u istom omjeru) također $r_2 > r_1$.

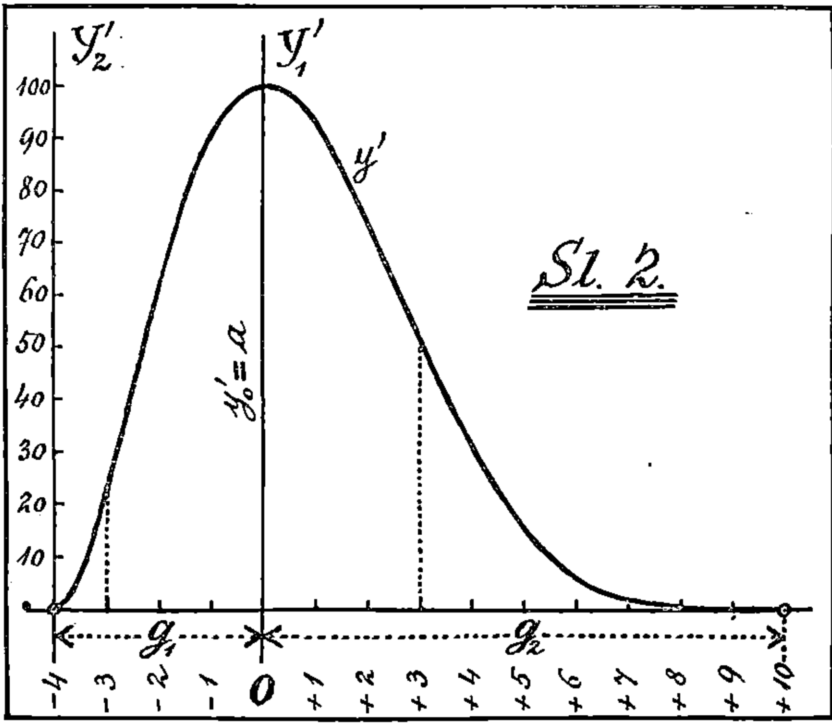
Zornog prikaza radi uzmimo npr. za parametre funkcije 17 iznose: $a = 100$, $r_1 = 2$, $g_1 = 4$, $r_2 = 5$, $g_2 = 10$. U priloženoj tabeli 1 složene su pregledno glavnije koordinate funkcijine, dok sl. 2 daje grafički prikaz njenog toka.

Tabela 1.

x	y'	x	y'	x	y'	x	y'	x	y'
— 4	0·0	— 1	90·6	+ 2	73·7	+ 5	15·8	+ 8	0·3
— 3	23·2	0	100·0	+ 3	51·5	+ 6	6·4	+ 9	0·01
— 2	62·2	+ 1	92·3	+ 4	31·1	+ 7	1·8	+10	0·00

Funkcije 16 i 17 postavio je svojedobno (1895. god) već engleski statističar K. Pearson, ali u sasvim druge svrhe, na sasvim drugoj bazi, pa prema tome i uz sasvim drugačiji način izvođenja. Dotične njegove izvode donosi (jamačno u skraćenoj formi) prof. Czuber na str. 25—29 djela navedenog pod br. 38.

Funkcija 17 može sada lako da se transformira ne samo u prvu narednu formu, koja je za nas ovdje od direktnog interesa, već i u još neke forme, kojih krivulje ne samo da pokazuju asimetriju prema maksimalnoj ordinati, već i izlaze iz



samog ishodišta koordinatskog, pa imaju prema tome punu analogiju sa y'- krivuljom na sl. 1. Uzme li se naime ova funkcija u razmatranje s obzirom na ordinatnu os Y_2' postavljenu lijevo od prvobitne osi (Y_1') i to u udaljenosti g_1 od ove (sl. 2), onda iz nje neposredno izlazi:

$$y' = a\left(1 + \frac{x - g_1}{g_1}\right)^{r_1}\left(1 - \frac{x - g_1}{g_2}\right)^{r_2} \quad . \quad . \quad (21)$$

Odovud pak nakon nekoliko jednostavnih operacija izlazi dalje:

$$y' = \frac{a\,(g_1 + g_2)^{r_2}}{g_1^{\ r_1}\, g_2^{\ r_2}}\, x^{r_1}\left(1 - \frac{x}{g_1 + g_2}\right)^{r_2} \quad . \quad . \quad (22)$$

a odovud uz pojednostavnjenja odnosno zamjene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a\,(g_1+g_2)^{r_2}}{g_1^{\,r_1}\,g_2^{\,r_2}} &= A \\ r_1 &= B \\ g_1+g_2 &= C \\ r_2 &= D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

izlazi napokon:

$$y' = A\,x^{B}\left(1-\frac{x}{C}\right)^{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

To bi dakle u principu bio oblik tražene funkcije priraščivanja. Prema cijelom toku izvoda moraju i njeni paramenti svi da budu pozitivni. Iz nje izlazi odmah na prvi pogled, da y' mora da bude jednako nuli ne samo pri apscisi $x = o$, već i pri apscisi $x = C$. Vremensko područje od O do C imalo bi dakle načelno da uključi u sebi sve karakteristične pojave priraščivanja.

Naravski da ova jednadžba, sasvim formalno uzeto, dopušta za x i iznose veće od C, pa i iznose negativne. No ovi iznosi apscisa ne dolaze za nas uopće u obzir, pošto mi promatramo samo ordinate unutar vremenskih granica O i C. Također bi ordinate ovih besmislenih za nas apscisa bile uostalom (kao što je to već u pogledu jednadžbe 17 istaknuo Czuber, a jamačno već i Pearson) najvećim dijelom imaginarne s obzirom na to, da oba eksponenta jednadžbina moraju u pravilu da budu slomljeni brojevi.

2. Analitička verifikacija.

Da jednadžba 24 može potpuno da okarakteriše prosječni tok priraščivanja, pokazat će nam razmatranja njenih analitičkih svojstava. Ta se razmatranja svode u glavnom na prvu i drugu njenu derivaciju. Prva njena derivacija glasi:

$$y'' = A x^{B-1}\left(1-\frac{x}{C}\right)^{D-1}\left(B-\frac{B+D}{C}\,x\right) \quad \ldots \quad (25)$$

Uvrsti li se ovamo iznos $x = o$, onda odovud izlazi ili $y'' = o$ ili $y'' = \infty$ ili napokon $y'' = A$, već prema tome, da li je B veće od 1 ili manje od 1 ili napokon $= 1$.

U prvom slučaju ($B > 1$) predstavlja funkcija 24 krivulju, koja iz ishodišta koordinata izlazi tangencijalno na apscisnu os, dakle krivulju, o kojoj je bilo govora pri spominjanju krivulje y' na sl. 1. To je dakle slučaj, koji za krivulje priraščivanja faktično i jedini dolazi u obzir.

U drugom slučaju ($B < 1$) izlazila bi krivulja 24 iz ishodišta koordinatskog u smjeru tangencijalnom na ordinatnu os, t. j. pod pravim kutem, dok bi u slučaju $B = 1$ izlaz krivulje 24 iz ishodišta koordinatskog bio pod izvjesnim šiljatim kutem sa iznosom A kao faktorom smjera. No ova dva slučaja, ma da su po jednadžbi još mogući, ne dolaze kod prirasta zapravo u obzir, pa se stoga nećemo na njih više ni osvrtati.

Stavi li se $x = C$, onda uz uslov $D > 1$, koji kod prirasta mora faktično uvijek i da bude, izlazi iz jednadžbe 25 iznos $y'' = O$. U starosti C mora dakle krivulja 24 da se u apscisnu os povrati samo u smjeru tangencijalnom na tu os (radi $y'' = O$), pa se dakle i u ovom pogledu krivulja 24 podudara sa prirasnom krivuljom prema slici 1.

Stavimo li napokon već a priori $y'' = O$, pa riješimo li onda ovu jednadžbu po x, onda iz nje — kao glavno riješenje — izlazi za x izraz:

$$x = \frac{BC}{B + D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

koji predstavlja apscisu jedine kulminacione tačke krivuljine. Ako se naime ova apscisa uvrsti u drugu derivaciju funkcije 24, koja glasi:

$$y''' = \frac{A}{C^2} x^{B-2} \left(1 - \frac{x}{C}\right)^{D-2} \Big[B(B-1)\,C^2 - $$
$$- 2BC(B + D - 1)\,x + (B+D)(B + D - 1)\,x^2 \Big] \quad . \quad (27)$$

onda za y''' izlazi iznos negativan.

Osim spomenutog glavnog riješenja po x dopušta jednadžba $y'' = O$ još dva takova riješenja. To bi (naravski uz spomenute uslove $B > 1$ i $D > 1$, o kojima jedino vodimo i računa) bila riješenja: $x = O$ i $x = C$. Uvrste li se (svaka za sebe) u jednadžbu 27 ove dvije vrijednosti za x, onda (već prema tome, da li je $B < 2$ ili $B = 2$ ili pak $B > 2$ dotično da li je $D < 2$ ili $D = 2$ ili pak $D > 2$) izlaze za y''' na dotičnim mjestima iznosi, prema kojima se u ishodištu koordinatskom dotično pri apscisi C nalazi ili minimum ili pak infleksiona tačka, i jedno i drugo naravski u samoj apscisnoj osi dotično (u slučaju infleksione tačke) sa samom tom osi kao tangentom krivuljinom.

Stavi li se napokon već a priori $y''' = O$, pa riješi li se onda ova jednadžba po x, onda iz nje izlazi za x dvovrijednosni izraz:

$$x_{1,2} = \frac{BC}{B+D}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{B\left(1+\frac{B-1}{D}\right)}}\right) \quad . \quad . \quad (28)$$

koji određuje apscise obiju infleksionih tačaka krivuljinih unutar područja $O < x < C$. Ordinate tih tačaka jednako su (kao što vidimo) udaljene od maksimalne ordinate (sa apscisom prema jednadžbi 26), što međutim ipak ne znači, da bi time krivulja 24 bila prema ordinati kulminacione tačke simetrična. Ako se naime apscise obiju infleksionih tačaka uvrste jedna za drugom u spomenutu jednadžbu (24), dobit će se za y' dva različita iznosa, koji baš i jesu različiti radi asimetrije krivuljine.

Krivulja 24 bila bi prema ordinati kulminacione tačke simetrična samo uz uslov $B = D$, koji ali za nas ovdje nikako ne dolazi u obzir.

3. Gornja vremenska granica priraščivanja.

Funkcija 24 ima dakle, kao što vidimo, sva karakteristična svojstva prirasnih krivulja i može da prosječni tok priraščivanja okarakteriše pod kakvimgod mu drago eventualnostima. S druge strane njezin parametar C označuje, kao što vidjesmo, gornju vremensku granicu prirasne aktivnosti dotično starost, koju šumska stabla — sudeći po cijelom njihovom razvoju motrenom do izvjesne vremenske tačke — mogu vjerojatno još da dožive. Pokušao sam stoga, da na osnovi jednog konkretnog niza prirasnih iznosa i pripadnih im iznosa starosti ispitam, do kojeg poprilici iznosa može uopće da se popne spomenuti parametar.

Za aproksimativno riješenje ovoga zadatka potrebno je, da su nam poznata barem četiri razna y'- iznosa zajedno sa pripadnim im x- iznosima, jer (kao što vidimo) jednadžba 24 sadrži četiri parametra, koji — uzeti kao nepoznanice — mogu da se za konkretan kakav slučaj priraščivanja izračunaju samo na osnovi najmanje četiriju jednadžbi sa poznatim vrijednostima za x i y'.

Izračunavanje ovih četiriju parametara daje naravski mnogo pouzdaniji rezultat, ako se izvodi po metodi najmanjih kvadrata i to dakako na osnovi većega broja koordinatskih parova, nego što u jednadžbi ima parametara. No taj je postupak i mnogo duži, naročito u ovom slučaju, pošto jednadžba 24 nije s obzirom na parametre, a ni uopće, linearna. S druge pak strane meni se ovdje baš i ne radi o e g z a k t n o m izračunanju i k tome još s v i h spomenutih parametara, već tek o tome, da si pribavim približnu orijentaciju o spomenutoj granici. Ja sam dakle u tu svrhu primijenio onu prvu t. j. jednostavniju i bržu metodu, pa ću stoga ovdje da ujedno izvedem formulu za izračunavanje spomenute granice.

Postavimo li četiri jednadžbe sa poznatim već koordinatama($x_1, y_1';x_2, y_2'; \ldots\ldots$), dakle:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= Ax_1^{B}\left(1-\frac{x_1}{C}\right)^{D} \\ y_2' &= Ax_2^{B}\left(1-\frac{x_2}{C}\right)^{D} \\ y_3' &= Ax_3^{B}\left(1-\frac{x_3}{C}\right)^{D} \\ y_4' &= Ax_4^{B}\left(1-\frac{x}{C}\right)^{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

onda iz njih međusobnom divizijom i potom logaritmovanjem izlaze najprije slijedeće tri jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} B\log\frac{x_2}{x_1} + D\log\frac{1-\frac{x_2}{C}}{1-\frac{x_1}{C}} &= \log\frac{y_2'}{y_1'} \\ B\log\frac{x_3}{x_1} + D\log\frac{1-\frac{x_3}{C}}{1-\frac{x_1}{C}} &= \log\frac{y_3'}{y_1'} \\ B\log\frac{x_4}{x_1} + D\log\frac{1-\frac{x_4}{C}}{1-\frac{x_1}{C}} &= \log\frac{y_4'}{y_1'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

Označe li se poznati faktori ovih jednadžbi jednostavnijim izrazima i to:

$$\left.\begin{aligned} \log\frac{x_2}{x_1} &= \beta_2\,; \quad \log\frac{y_2'}{y_1'} = \eta_2 \\ \log\frac{x_3}{x_1} &= \beta_3\,; \quad \log\frac{y_3'}{y_1'} = \eta_3 \\ \log\frac{x_4}{x_1} &= \beta_4\,; \quad \log\frac{y_4'}{y_1'} = \eta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

onda sistem jednadžbi pod 30, uz daljnje pojednostavnjenje, dobiva oblik:

$$\left.\begin{aligned} B\beta_2 + D\log\frac{C-x_2}{C-x_1} &= \eta_2 \\ B\beta_3 + D\log\frac{C-x_3}{C-x_1} &= \eta_3 \\ B\beta_4 + D\log\frac{C-x_4}{C-x_1} &= \eta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

koji dozvoljava laku eliminaciju nepoznanica B i D. Eliminiramo li najprije B, onda izlaze jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} D\left(\beta_2 \log\frac{C-x_3}{C-x_1} - \beta_3 \log\frac{C-x_2}{C-x_1}\right) &= \beta_2\,\eta_3 - \beta_3\,\eta_2 \\ D\left(\beta_2 \log\frac{C-x_4}{C-x_1} - \beta_4 \log\frac{C-x_2}{C-x_1}\right) &= \beta_2\,\eta_4 - \beta_4\,\eta_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33)$$

a odovud međusobnim podjeljenjem konačna jednadžba:

$$\frac{\beta_2 \log\dfrac{C-x_3}{C-x_1} - \beta_3 \log\dfrac{C-x_2}{C-x_1}}{\beta_2 \log\dfrac{C-x_4}{C-x_1} - \beta_4 \log\dfrac{C-x_2}{C-x_1}} = \frac{\beta_2\,\eta_3 - \beta_3\,\eta_2}{\beta_2\,\eta_4 - \beta_4\,\eta_2} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

sa C kao jedinom nepoznanicom. Međutim se C ne da odovud odrediti drugačije, nego tek postepenim kušanjem, pri čem se u jednadžbu uvršćuju razne za C već unaprijed suponirane vrijednosti, pa se na kraju kao najbolja zadrži ona, koja jednadžbu najbolje zadovoljava. Na taj način možemo principijelno da se onoj vrijednosti za C, koja bi strogo odgovarala dadenim koordinatskim parovima, približimo sa tačnošću kojomgod mu drago.

Ja sam ovo izračunavanje izvršio na osnovi izvjesnih iznosa iz toka priraščivanja u visinu, što ga prema podacima prof. G u t t e n b e r g a pokazuju smrekove sastojine I. bonitetnog razreda u Tirolu. Kao što rekoh ranije, na str. 45 spomenutog svoga djela navodi G u t t e n b e r g kao tok rastenja srednje sastojinske visine na tom bonitetu, i to od decenija do decenija i do starosti od 150 godina, visinske iznose sabrane (u decimetrima) u priloženoj tabeli 2. Tok ovih visinskih iznosa (y) u zavisnosti njihovoj od starosti (x) prikazuje (kao što rekoh) krivulja y na sl. 1. Diferencije tih iznosa, podijeljene prema formuli 4 sa 10 i (prema već ustaljenom običaju) pridijeljene sredinama dotičnih perioda, kao da dospijevaju baš u

Tabela 2.

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
10	14	60	228	110	345
20	53	70	260	120	358
30	100	80	287	130	370
40	147	90	310	140	381
50	190	100	329	150	391

Tabela 3.

x	*y'*	*x*	*y'*	*x*	*y'*
5	14	55	38	105	16
15	39	65	32	115	13
25	47	75	27	125	12
35	47	85	23	135	11
45	43	95	19	145	10

tim sredinama, sadržane su (u centimetrima i pod oznakom y') u priloženoj tabeli 3.

Ovaj niz y'- iznosâ trebao sam zapravo u smislu jednadžbe 4 da označim sa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, što je međutim sporedno s obzirom na činjenicu, da on (u apsolutnom pomanjkanju boljega) ima faktično da predstavi y'- niz prema jednadžbi 24. Iz toga empirijskog niza upotrijebio sam za određenje parametra C iznose pripadne apscisama 5, 55, 95, 145. Kao što vidimo, ovi su iznosi na cijelo vremensko područje od 5 do 145 god. porazdijeljeni u podjednakim intervalima (koliko je to u pogledu jednakosti bilo ovdje uopće moguće) počinjući ujedno, kao što to i treba da bude, sa najnižim dadenim vremenskim iznosom. Oni stoga daju najviše izgleda za dovoljnu tačnost parametarskih iznosa izračunanih samo iz četiri para koordinata.

Logaritme potrebne za ovo računanje izvadio sam iz Veginih tabela sa mantisama na 10 decimala (V e g a G e o r g:

Thesaurus logarithmorum completus, Leipzig 1794). Preciznost ovih tabela iskoristio sam, gdje je to bilo potrebno (pri interpolaciji), do krajnjih mogućih granica. Za konstantni izraz na desnoj strani jednadžbe 34 (označimo ga kratko sa K) izlazi prema tome računu, sa zaokruženjem na 6 decimala, iznos $K = 0.529.562$. Veći broj decimala nisam ovdje naveo (ma da sam faktično računao sa mnogo većim brojem decimala), jer to, kao što ćemo odmah vidjeti, nije bilo ni potrebno. Ispravan iznos za C može dakle praktički da bude samo onaj, koji po uvrštenju u varijabilni izraz $F(C)$ na lijevoj strani iste jednadžbe daje za taj izraz vrijednost 0.529.562. U spomenuti varijabilni izraz uvrstio sam za C postepeno svega sedam vrijednosti. One su, zajedno sa pripadnim iznosima za $F(C)$, sadržane u priloženoj tabeli 4. Prvih pet iznosa za $F(C)$ zaokruženo je na šest decimala, a zadnja dva na devet.

Tabela 4.

C	$F(C)$
305	0·356.427
1.005	0·397.576
100.005	0·409.762
200.005	0·409.818
500.005	0·409.852
1,000.005	0·409.863.620
100,,000,000.005	0·409.874.516

Iz tabele izlazi, da sa rastenjem vrijednosti za C raste i vrijednost za $F(C)$, no da ova posljednja — ma da je C prekoračilo već i astronomski iznos od sto milijardi godina — stoji još uvijek daleko ispod navedenog K-iznosa imajući očito tendenciju da mu se sasvim približi tek u beskonačnosti. Tako bi se dakle starost, do koje smrekova stabla dotično sastojine na spomenutom bonitetu mogu prema navedenom toku priraščivanja prosječno još da žive i rastu, protezala sve do u beskonačnost. To uostalom izlazi već i iz samog grafičkog prikaza spomenutog toka (krivulja y' na sl. 1.), koji je pri desnom kraju već skoro paralelan sa apscisnom osi, ma da još nije prekoračena ni starost od 150 godina. Na lošijim stojbinskim bonitetima stvar je još izrazitija, jer, kao što je to poznato, na lošijim je bonitetima visinski prirast u mladosti slabiji, a u starosti jači i izdržljiviji nego na boljim.

Koliko mi je poznato, sličan tok pri desnom kraju visinsko-prirasne, pa naravski i sadržinsko-prirasne krivulje rezultira iz svih novijih prirasno-prihodnih tabela, što očito znači, da bi skrajnja granica, koju prosječno može da dosegne život i rastenje stabla dotično sastojine, imala da se protegne do u beskonačnost. Ali kako da se ovo dovede u sklad sa poznatom činjenicom, da većina stabala u sastojinama prestaje rasti i ugiba čak i rano, pa da i ostala stabla mogu da dožive u najboljem slučaju tek oko pol do jednog milenija ili eventualno i nešto više (i to kod drugih, izdržljivijih vrsta drveća) prestavši naravski već i prije toga da rastu u visinu? Razjašnjenje, držim, nije teško.

Krivulje priraščivanja iz prirasno-prihodnih tabela predstavljaju, kao što je poznato, p r o s j e č a n tok razvoja, a osim toga spomenute tabele sadrže tok rastenja dotično priraščivanja samo do starosti, u kojoj sastojine kao cjelina pokazuju još d o s t a d o b r o uspijevanje. Njihov prirast u toj starosti, ma da je već daleko ispod onoga, što ga one pokazuju u doba najboljeg razvoja, ipak je još uvijek takav, k a o d a će sastojina — sudeći po cijelom dotadanjem toku razvoja — rasti sve do u beskonačnost. No senilna slabost koja nakon toga sve više i sve jače preotimlje maha, djeluje na tok rastenja ne tek sama po sebi, već još i u toliko, što nju neizbježivo i sve više prate razna oboljenja, koja napokon prekinu nit života i razvoja daleko ranije, nego li bi to inače bio slučaj.

Ma da dakle stabla i sastojine mogu da žive i rastu samo do prilično ograničenog broja godina, to je ipak njihov razvoj sve do postignuća izvjesne, ekonomski još dopustive starosti, sa kojom uopće prestaje svako promatranje razvoja, još uvijek takav, k a o d a će — ma i u sve slabijem ritmu — trajati sve do u vječnost. I za nas stoga, kad se radi o analitičkom ograničenju razvoja stabala i sastojina, nije zapravo važno ono, što se f a k t i č n o zbiva po prekoračenju starosti ekonomski još dopustive, već što bi m o g l o da se zbude, kad senilnost ne bi u sve jačoj mjeri bila pomagana i patološkim procesima. Mi dakle bez bojazni za ispravnost analitičkog izraza, kojim prosječni tok priraščivanja ima da se okarakteriše sve do nastupa starosti ekonomski još dopustive, možemo da gornju granicu razvoja protegnemo sve do u vječnost, što naravski ne može da ostane bez utjecaja na samu vanjsku formu osnovne naše jednadžbe (24).

II. FUNKCIJE PRIRAŠĆIVANJA SA BESKONAČNOM GORNJOM VREMENSKOM GRANICOM.

1. Kollerova funkcija.

Prema slici 2 i prema predzadnjoj jednadžbi pod 23 može parametar C da bude beskonačan samo posredstvom beskonačnosti desnog svoga dijela (g_2), dok g_1 kao i $r_1 = B$ može kod prirasnih nizova da bude samo konačno. Ako su dakle veličine g_1 i r_1 konačne, onda to isto važi i za njihov kvocijenat:

$$\frac{r_1}{g_1} = q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

pa prema tome (posredstvom jednadžbe 20 i zadnjih dviju jednadžbi pod 23) takoder za kvocijenat:

$$\frac{r_2}{g_2} = \frac{D}{C - g_1} = q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

otkud za D izlazi izraz:

$$D = q\,(C - g_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Uvrstimo li ovaj izraz u jednadžbu 24, ali uzmemo li pri tom u obzir i prvobitni oblik parametra A, koji izlazi iz prve jednadžbe pod 23, onda (s obzirom i na ostale jednadžbe pod 23) izlazi:

$$y' = \frac{a}{g_1{}^B}\left(\frac{C}{C - g_1}\right)^{q\,(C-g_1)} x^B \left(1 - \frac{x}{C}\right)^{q\,(C-g_1)} \quad . \quad (38)$$

Nakon nekoliko jednostavnih transformacija (pri čem u glavnom dolaze do izražaja operacije sa eksponentima, zatim vertikalna premiještanja i diobe) dobiva se odovud:

$$y' = \frac{a\left(1 - \frac{g_1}{C}\right)^{qg_1}}{g_1{}^B\left(1 - \frac{g_1}{C}\right)^{qC}} \cdot x^B \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{C}\right)^{qC}}{\left(1 - \frac{x}{C}\right)^{qg_1}} \quad . \; . \quad (39)$$

Postane li C beskonačno, onda se u ovoj zadnjoj jednadžbi brojnik prvog glavnog razlomka reducira na a, dok nazivnik drugoga glavnog razlomka (postajući jednakim jedinici) ispada sasvim iz računa. Naprotiv nazivnik prvoga i brojnik drugoga razlomka primaju po poznatom pravilu infinitezimalnog računa oblike:

$$g_1{}^{B} \lim \left(1 - \frac{g_1}{C}\right)^{qC} = g_1{}^{B} e^{-qg_1} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\lim C = \infty$$

dotično:

$$\lim \left(1 - \frac{x}{C}\right)^{qC} = e^{-qx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\lim C = \infty$$

gdje je e baza naravnih logaritama. Jednadžba 39 prima prema tome pod uplivom ovih promjena oblik:

$$y' = \frac{a\, e^{qg_1}}{g_1^{B}}\, x^{B}\, e^{-qx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

iz kojega uz uvrštenje:

$$\frac{a\, e^{qg_1}}{g_1^{B}} = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

izlazi konačno:

$$\underline{y' = A\, x^{B}\, e^{-qx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

gdje naravski nije A identično sa onim pod 24.

Time smo dakle došli do prirasne funkcije, koja već i formalno vodi računa o tome, da kod šumskih stabala i sastojina prirasna krivulja do starosti ekonomski još dopustive izgleda, kao da će rastenje potrajati sve do u vječnost (naravski sa tendencijom neprestanog približavanja prirasta prema nuli). Kao što vidimo, ova funkcija nije ništa drugo, već neposredna posljedica pune prilagodljivosti osnovne funkcije (24) na oblik prirasne krivulje, kako se on kod šumskih stabala i sastojina prosječno očituje do starosti ekonomski još dopustive. Funkcija 24, primijenjena na prirasne krivulje ovakovih oblika, prelazi prema tome već sama po sebi neposredno u funkciju 44 i (pored ove) postaje u takvim slučajevima bespredmetnom.

Na način sličan postupku sadržanom u jednadžbama 21 do 24 izlazi i funkcija 44 iz jedne jednadžbe, koju je izveo već Pearson, a koju Czuber navodi na str. 24 i 29 spomenutog svoga djela. Samo naravski, pošto ova funkcija stoji sasvim postrance od cilja, koji je lebdio pred očima spomenutim autorima, oni je nisu ni izveli, pa ni nikakvom mišlju uopće taknuli (koliko mi je barem poznato).

Izvedemo li u jednadžbi 44 supstituciju:

$$e^q = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

onda iz nje izlazi poznata Kollerova funkcija prirašćivanja:

$$y' = Ax^B Q^{-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

koja, kao što vidimo, nije zapravo ništa drugo, već posebna jedna forma jednadžbe 44.

Koller je ovu funkciju postavio u formi razlomka i drugačijim slovima za parametre (vidi br. 6, str. 34), što međutim ne mijenja na stvari ništa. Postavljajući je bez ikakova izvođenja preuzeo ju je Koller zapravo od Danca Grama, samo s tom razlikom, da ju je Gram preporučio kao jednadžbu rastenja, a Koller kao jednadžbu prirašćivanja, što je svakako ispravnije. Krivulja prirašćivanja opada naime već za života stablova dotično njegova vrha (kod visinskog prirasta razmjerno čak i vrlo rano), dok opadanje krivulje rastenja može da se zamisli samo kao pojav posmrtnog raspadanja, koji u okvir razmatranja o samom rastenju (kao izrazitom pojavu života i životne energije) zapravo ni ne spada. S druge strane već i sam pojam fiziološkog rastenja u očitoj je suprotnosti sa pojmom opadanja, koji je uz jednadžbu 46, pa naravski i 44 i 24, svakako vezan.

Da li je i Gram jednadžbu 46 postavio bez izvođenja ili ju je baš formalno izveo i na kojem principu, nije mi poznato, jer Gyldenfeldt izvješćujući o njoj u časopisu »Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen« od 1880. godine (str. 240) ne navodi u tom pogledu ništa.

2. Piščeva funkcija.

a) Izvod

Kad smo već za funkciju prirašćivanja prihvatili načelo, da gornja njena vremenska granica (barem kod šumskih stabala i sastojina) ima da seže do u beskonačnost, onda sa jednadžbama 44 i 46 nije sasvim iscrpljena zaliha ovakovih funkcija izvedivih strogo iz osnovne funkcije prirašćivanja (24 dotično 22).

Vidjeli smo, da su svi parametri u jednadžbama 17 i 20 pozitivni. No jednadžba 20 ostaje faktično nepromijenjena, ako se npr. pred oba izraza na desnoj njenoj strani stave i negativni predznaci, t. j.

$$\frac{r_1}{g_1} = \frac{-r_2}{-g_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

Uvrste li se u jednadžbu 22 ovi negativni predznaci, dobit će ona oblik:

$$y' = \frac{a(g_1 - g_2)^{-r_2}}{g_1^{r_1}(-g_2)^{-r_2}} x^{r_1} \left(1 - \frac{x}{g_1 - g_2}\right)^{-r_2} \quad . \; . \; . \quad (47)$$

Ako se izraz u zadnjoj zagradi stavi na zajednički nazivnik, onda se brojnik prvoga i nazivnik (novo-nastalog) drugog razlomka krate međusobno, pri čem u brojniku prvog razlomka preostaje samo još izraz a, dok nazivnik drugog razlomka otpada sasvim. Ako se zatim izraz $(-g_2)^{-r_2}$ iz nazivnika prvog razlomka premjesti pod još preostali brojnik spomenutog drugog razlomka, t. j. pod izraz $(g_1 - g_2 - x)^{-r_2}$, onda mogu oba ova izraza da se stave pod zajednički eksponent, te da se zatim (kao brojnik i nazivnik istoga razlomka) izmnože oba sa (—1). Time jednadžba 47 dobiva sada oblik:

$$y' = \frac{a}{g_1^{r_1}} x^{r_1} \left(\frac{g_2 - g_1 + x}{g_2}\right)^{-r_2} \quad . \; . \; . \; . \quad (48)$$

a ako se ovaj transformira s obzirom na negativnost eksponenta, dobiva se dalje:

$$y' = \frac{a\, g_2^{r_2}}{g_1^{r_1}} \cdot \frac{x^{r_1}}{(g_2 - g_1 + x)^{r_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

Kao što vidimo, g_2 mora i ovdje — jednako kao i kod prijašnjih izvoda — da bude veće od g_1 (pa da prema tome, naravski u istom omjeru, bude također i $r_2 > r_1$). Inače bi naime y' moglo eventualno da iziđe i kao negativno, što je pak s obzirom na pozitivni karakter prirasta nedopustivo. Osim toga dovodio bi odnos $g_1 > g_2$ nužno i do toga, da pri izvjesnom (od nule većem) iznosu za x padne nazivnik desnog (varijabilnog) razlomka na samu nulu, posljedicom čega bi bio iznos $y' = \infty$, što bi također bilo u protivnosti sa stvarnošću. Svome teoretskom zadatku može dakle zadnja jednadžba da sasvim udovolji samo uz uslov $g_2 > g_1$, dotično i $r_2 > r_1$, koji je međutim (kao što ćemo odmah vidjeti) i lako ispunjiv.

S druge strane da bi g_2 bilo beskonačno, kao što je to npr. slučaj u jednadžbama 38—41 (s obzirom na predzadnju jednadžbu pod 23), to sada nije nikako potrebno, jer i sada ostaje $y' > o$ sve do u vječnost i tek pri apscisi $x = \infty$ mora y' (radi odnosa $r_2 > r_1$) da padne na nulu. Varijabilni razlomak zadnje jednadžbe može naime da se transformira na oblik:

$$\frac{x^{r_1}}{(g_2 - g_1 + x)^{r_2}} = \left(\frac{g_2 - g_1}{x^{\frac{r_1}{r_2}}} + x^{1 - \frac{r_1}{r_2}}\right)^{-r_2} \quad . \; . \; (50)$$

u kojem za slučaj x $= \infty$ pada prvi sumand na nulu. Da pak drugi sumand uzmogne u tom slučaju da postane beskonačno velikim, pa da prema tome y' uzmogne da padne na nulu, uslov je $r_2 > r_1$. To je dakle osnovni uslov za ispravnost jednadžbe 49 i tome uslovu trebamo, a i možemo da udovoljimo već a priori. Treba naime u tu svrhu samo da se stavi:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = c - 1 \\ r_2 = c + 1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

gdje c nosi parametarski karakter i mora da bude veće od 1.

S obzirom na jednadžbu 20 moraju prednji iznosi da sačinjavaju razmjer:

$$\frac{c - 1}{c + 1} = \frac{g_1}{g_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

iz kojega izlazi:

$$g_1 = \frac{c - 1}{c + 1} g_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

gdje, kao što vidjesmo, g_2 (isto tako kao i g_1 i c) mora da bude k o n a č n a veličina.

Uvrsti li se ovaj zadnji izraz, jednako kao i izrazi pod 51, u jednadžbu 49, onda iz nje nakon izvjesnih stezanja i kraćenja izlazi:

$$y' = a\, g_2^2 \left(\frac{c + 1}{c - 1}\right)^{c - 1} \cdot \frac{x^{c - 1}}{\left(\frac{2\, g_2}{c + 1} + x\right)^{c + 1}} \quad . \; . \; . \; . \quad (54)$$

Stavi li se sada:

$$\left.\begin{array}{l} a\, g_2^2 \left(\frac{c + 1}{c - 1}\right)^{c - 1} = A \\ \frac{2\, g_2}{c + 1} = b \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

gdje A, kao što vidimo, ima drugačije značenje nego dosad, onda tražena funkcija priraščivanja dobiva konačan oblik:

$$y' = \frac{A x^{c-1}}{(b+x)^{c+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

gdje takoder moraju dakako svi parametri da budu pozitivni. Time smo ujedno dobili funkciju sa istim osnovnim svojstvima kao i kod funkcija 44 i 46, ali sa izrazitom jednom prednosti prema dosadanjim funkcijama, koju ćemo upoznati kasnije.

b) *Analitička verifikacija*

Funkcije 44, 46 i 56 razlikuju se, kao što vidjesmo, od osnovne funkcije priraščivanja zapravo samo po tome, što je kod njih gornja granica priraščivanja već a priori pomaknuta do u beskonačnost, dok osnovna funkcija vodi računa i o konačnoj granici. S obzirom na to može s pravom da se predmnijeva, da i ove druge tri funkcije imaju sva ona svojstva, koja su potrebna za punu karakterizaciju toka priraščivanja unutar granica starosti ekonomski još dopustive. Za funkciju 46 dokazao je to u punoj mjeri sam Koller. S obzirom na potpunu stvarnu koincidenciju njegove funkcije sa funkcijom 44 važi njegov dokaz i za ovu funkciju. Meni dakle preostaje da to faktično dokažem samo za funkciju 56, jedno zato što se ta funkcija u formalnom pogledu bitno razlikuje od onih pod 44 i 46, a drugo i radi formulisanja njenih karakterističnih tačaka.

Uvrsti li se u nju za x iznos 0, onda iz nje, doklegod je $c > 1$, slijedi iznos $y' = o$. Kako ovo kod funkcije priraščivanja mora faktično i da bude to otud slijedi, da c mora svakako da bude veće od 1.

Uvrsti li se u nju iznos $x = \infty$, onda iz nje, kao što je to pokazano već na jednadžbi 49, mora opet da izide $y' = o$, a na to nas, kao što vidjesmo, upućuje već i sam tok prirasnih krivulja, kako se on očituje poslije kulminacije prirasta pa do starosti ekonomski još dopustive.

No na koji način izlazi krivulja 56 iz samoga ishodišta koordinatskog i kako se na kraju opet vraća u apscisnu os?

Prvi diferencijalni kvocijenat naše funkcije glasi:

$$y'' = \frac{A x^{c-2}[b(c-1) - 2x]}{(b+x)^{c+2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Uvrsti li se ovamo iznos $x = o$, onda za y'' izlazi ili iznos O ili iznos $\frac{A}{b^3}$ ili pak iznos ∞, već prema tome, da li je $c > 2$ ili pak $c = 2$ ili napokon $c < 2$.

U prvom slučaju, izlazeći iz ishodišta koordinatskog u smjeru tangencijalnom na apscisnu os, odgovara i krivulja 56 krivulji y' na sl. 1, dok drugi i treći slučaj, ma da su po jednadžbi još mogući, ne dolaze kod prirasnih krivulja zapravo u obzir.

Pri primjeni jednadžbe 56 na krivulje priraščivanja mora dakle da za parametar c izide svakako iznos veći od 2.

Uvrstimo li sada u jednadžbu 57 za x iznos ∞, onda iz nje može da izide samo iznos $y'' = o$, jer x u nazivniku stoji pod većim eksponentom nego u brojniku. Otud pak slijedi, da se i krivulja 56 vraća u apscisnu os samo u smjeru tangencijalnom na tu os, kao što to prema toku konkretnih prirasnih krivulja mora zaista i da bude.

Stavimo li napokon već a priori $y'' = o$, pa riješimo li onda ovu jednadžbu po x, onda iz nje — kao glavno riješenje — izlazi za x izraz:

$$x = \frac{b\,(c-1)}{2} \qquad (58)$$

koji predstavlja apscisu jedine kulminacione tačke krivuljine. Ako se naime ova apscisa uvrsti u drugi diferencijalni kvocijenat funkcije 56, koji glasi:

$$y''' = \frac{A\,x^{c-3}\left[b^2(c-1)(c-2) - 6b\,(c-1)\,x + 6x^2\right]}{(b+x)^{c+3}} \qquad (59)$$

onda za y''' izlazi iznos negativan.

Osim spomenutog glavnog riješenja po x dopušta jednadžba $y'' = o$ još dva takova riješenja. Prvo od njih (naravski uz spomenuti uslov $c > 2$, o kojem jedino vodimo i računa) bilo bi: $x = o$, a drugo: $x = \infty$. Uvrsti li se u jednadžbu 59 prva od ove dvije vrijednosti, onda iz te jednadžbe — već prema tome, da li je $c < 3$ ili pak $c = 3$ ili napokon $c > 3$ — izlaze za y''' iznosi, prema kojima se u ishodištu koordinatskom nalazi ili minimum krivulje 56 ili pak njena infleksiona tačka (i to sa samom apscisnom osi kao tangentom u toj tački). Uvrsti li se pak u zadnju jednadžbu iznos $x = \infty$, onda ona radi većeg eksponenta u nazivniku mora svakako da dade samo iznos $y''' = o$, a to isto važi i za sve daljnje derivacije jednadžbine. Krivulja 56 nema dakle pri apscisi $x = \infty$ ni infleksione tačke ni pravog minimuma; ona se tek p r i b l i ž u j e prema apscisnoj osi kao prema svojoj asimptoti, što unutar granica starosti ekonomski još dopustive čine (kao što vidjesmo) i prirasne krivulje.

Stavi li se napokon već unaprijed $y''' = o$ pa riješi li se onda ova jednadžba po x, onda iz nje izlazi za x dvovrijednosni izraz:

$$x_{1,2} = \frac{b\,(c-1)}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{c+1}{3\,(c-1)}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

koji određuje apscise obiju infleksionih tačaka krivuljinih, nalaznih naravski desno od ordinatne osi, pošto vidjesmo, da c mora svakako da bude veće od 2. Jedino je naime uz ovaj uslov izraz pod korijenom manji od 1, tako da obje infleksione tačke moraju da padnu s desna od ordinatne osi: prva lijevo od kulminacione tačke, a druga desno, kako to odgovara i krivulji y' na sl. 1.

Iz svega prednjega vidimo dakle, da i krivulja 56 može da prosječni tok prirašćivanja, kako se on očituje do starosti ekonomski još dopustive, okarakteriše sasvim strogo.

III. PRIMJEDBE K FUNKCIJAMA PRIRAŠĆIVANJA.

Funkcije prirašćivanja, same za sebe, ne mogu za praktičnu primjenu da imaju onakovog značenja, kakovo može da se pripiše funkcijama rastenja. Razlog je tome okolnost, da prirast kao diferencija između dva po dva susjedna y - iznosa ne može u svrhu ispitivanja svoga toka da se mjeri direktno, već tek može da se indirektno izvede iz postepeno izmjerenih y - iznosa. Tako je to barem u ogromnoj većini slučajeva, t. j. kod sadržinskog prirasta uvijek, a kod visinskog prirasta u velikoj većini slučajeva — izuzevši jedino (i to opet samo kadšto) slučajeve, gdje imamo posla sa stablima četinjača, koje se razgranjuju pršljenasto.

Radi toga svakako je naravnije, ako se i p r a v i l n i tok prirašćivanja (u smislu analitičke krivulje) izvodi ne direktno iz samih funkcija prirašćivanja, već indirektno iz funkcija rastenja.

S druge strane iznosi prirasta, izvedeni ovako putem diferencija iz izmjerenih y - iznosa, jače su opterećeni pogreškama mjerenja nego sami y - iznosi. Može doduše da se desi, da dva uzastopna y - iznosa budu izmjerena pogrešno, a da pri tom iznos prirasta (iz njih izveden) ostane ipak bespogrešan, što bi bilo, kad bi kod oba y - iznosa pogreške mjerenja imale i isti predznak i isti iznos. No jednako je vjerojatan i slučaj obrnutih predznakova, u kojem se slučaju obje pogreške mjerenja pri izvođenju prirasta iz izmjerenih y - iznosa kumulišu, pa stoga amplituda pogrešnosti (da se tako izrazim) izlazi kod prirasta duplo većom nego kod same osnovne mu veličine.

To je što se tiče **apsolutnih** iznosa pogrešnosti. **Relativna** pak pogrešnost (izražena u procentima) tereti prirast — u poređenju prema samoj y - veličini — još kud i kamo jače nego apsolutna pogrešnost, i to radi mnogo manjeg iznosa prirasta u poređenju prema iznosu same y - veličine.

Pogreške u izmjeri prirasta umanjuju se doduše, ako y - iznose mjerimo u većim distancijama vremena, recimo svake desete godine. No tako dobiveni iznosi prirasta, kao prosječni godišnji iznosi, udaljuju se već više ili manje od onih iznosa, koji bi prema pravilnoj krivulji priraščivanja imali faktično da padnu vremenski baš u polovice pojedinih perioda. Istina, u mnogo slučajeva može ovakav prosječni iznos prirasta skoro na dlaku tačno da se smatra, kao da je dospio (uslijedio) baš u polovici periode, što biva u doba, kad je krivulja priraščivanja približno pravna. No kad se ona jače savija, onda ovakav prosječni iznos ne spada po svojoj veličini tačno u polovicu svoje periode, već ili nešto prije ili nešto kasnije (t. j. prema smjeru, u kojem se krivulja savija).

Ove diferencije prema sredinama perioda nisu doduše kod 10-godišnjih perioda velike, ali su ipak takove, da u zajednici sa već spomenutom manjkavošću u ustanovljivanju prirasta znatno smanjuju preciznost teoretskih prirasnih krivulja — izvedenih na osnovi ovako manjkavog osnovnog materijala — u poređenju prema preciznosti teoretskih krivulja **rastenja**, izvedenih na osnovi materijala svakako pouzdanijeg.

Radi toga i jer mi direktno mjerimo ne sam prirast, već osnovne mu veličine, imaju jednadžbe rastenja svakako više smisla i praktičnog značenja.

C) FUNKCIJE RASTENJA.

I. KOLLEROVA FUNKCIJA.

Funkcije priraščivanja nisu, kao što znamo, ništa drugo, već prve derivacije funkcija rastenja. Stoga se integracijom pripadnih im diferencijala moraju naravski da dobiju funkcije rastenja. Iz funkcije 44, koja zapravo nije ništa drugo, već analitički podesniji oblik funkcije 46, izlazi kao prethodni, nedovršeni još oblik funkcije rastenja izraz:

$$y = A \int_0^x x^B e^{-qx}\, dx \quad \dots\dots \quad (61)$$

koji može da se dovrši i za primjenu udesi samo putem tzv.

parcijalne integracije. Prije toga nešto ćemo ga ujednostavniti putem supstitucije:

$$-qx = \xi \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

otkud obrnuto izlazi:

$$x = -\frac{\xi}{q}; \; dx = -\frac{d\xi}{q} \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

Uvrstimo li ova tri izraza u jednadžbu 61 i imamo li pri tom u vidu obje integracione granice, zamjenom kojih mijenja se ujedno i predznak integrala, dobit će ta jednadžba oblik:

$$y = \frac{A\,(-1)^B}{q^{B+1}} \int_{-qx}^{0} \xi^B e^\xi \, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

Konstantni izraz, koji se ovdje nalazi pred samim integralom, pustit ćemo prethodno iz vida, a i sam integral uzet ćemo prethodno u neodređenoj formi, t. j. bez obzira na granice, i označit ćemo ga kratko sa:

$$I_0 = \int \xi^B e^\xi \, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

Po poznatoj formuli:

$$\int u \, . \, dv = uv - \int v \, . \, du \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

gdje ima da bude:

$$u = \xi^B; \; dv = e^\xi \, . \, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

izlazi sada za I_0 izraz:

$$I_0 = \xi^B e^\xi - B \int \xi^{B-1} e^\xi \, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

gdje je integral u suptrahendu (označimo ga kratko sa I_1) sasvim analogan integralu pod 65. Zato on uz supstitucije:

$$u = \xi^{B-1}; \; dv = e^\xi \, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

dobiva oblik:

$$I_1 = \xi^{B-1} e^\xi - (B-1) \int \xi^{B-2} e^\xi \, d\xi \quad \ldots \quad (70)$$

Supstituiramo li dalje:

$$u = \xi^{B-2} ; \; dv = e^{\xi} d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

onda integral u suptrahendu jednadžbe 70 dobiva oblik:

$$I_2 = \xi^{B-2} e^{\xi} - (B-2) \int \xi^{B-3} e^{\xi} d\xi \quad . \; . \quad (72)$$

Kad bismo ovako, uz uslov da je B cijeli broj, nastavili sve dotle, dok koeficienat pred integralom u suptrahendu ne padne na iznos $B - B = O$, dobili bismo kao zadnji parcijalni integral izraz:

$$I_B = \xi^{B-B} e^{\xi} = e^{\xi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

Uvrštenjem ovoga zadnjeg integrala u predzadnji $\left(I_{B-1}\right)$, ovoga opet u predidući itd. sve unatrag do I_0 (ovo sve uz istodobno izmnoženje pojedinih parcijalnih integrala sa koeficijentima, koji se pred njima nalaze) bila bi neodređena integracija izraza 64 dovršena, pa bi preostalo samo još da se taj neodređeni integral odredi s obzirom na obje integracione granice. Time bi funkcija rastenja bila dadena u konačnoj formi.

Za integraciju izraza 64 potrebno je dakle, da nam je parametar B poznat već a priori, t. j. moramo ga ustanoviti već iz funkcije 44, a na način ili elementarni ili po metodi najmanjih kvadrata. Kako pri tom izlazi B u ogromnoj većini slučajeva kao razlomak (s obzirom na beskonačnu množinu razlomaka mogućih teoretski između dva po dva susjedna cijela broja), to bi rješavanje integrala pod 64 imalo u pravilu da dovede do beskonačnog reda, neupotrebivog naravski za izvod funkcije, o kojoj se radi. Da bismo ipak mogli pri tom svakako da dođemo do reda konačnog, mora B da se zaokruži na cijeli broj. Uz taj uslov, a na opisani način, izlazi za I_0 izraz:

$$I_0 = e^{\xi} \Big[\xi^{B} - B \xi^{B-1} + B(B-1) \xi^{B-2} -$$

$$- B(B-1)(B-2) \xi^{B-3} + \cdot \cdot \cdot + (-1)^{B} B(B-1) \ldots 3.2.1 \Big] \quad (74)$$

S obzirom na laku uočljivost pravila, po kojem jedan iza drugog slijede predznaci pojedinih članova u ovoj alternativnoj sumi, može ona da se napiše i ovako:

$$I_0 = e^{\xi} \Big[(-1)^0 \xi^{B} + (-1)^1 B \xi^{B-1} + (-1)^2 B(B-1) \xi^{B-2} +$$

$$+ (-1)^3 B(B-1)(B-2) \xi^{B-3} + \cdot \cdot \cdot + (-1)^{B} B! \Big] \quad (75)$$

Izvrši li se određenje ovoga neodređenog još integrala s obzirom na spomenute (pod 64) integracione granice, onda jednadžba 64 dobiva oblik:

$$y = \frac{A(-1)^B}{q^{B+1}} \Big\{ (-1)^B B! - e^{-qx} \Big[(-1)^0 (-qx)^B + $$
$$+ (-1)^1 B (-qx)^{B-1} + (-1)^2 B (B-1)(-qx)^{B-2} +$$
$$+ (-1)^3 B (B-1)(B-2)(-qx)^{B-3} + \cdots + (-1)^B B! \Big] \Big\} \tag{76}$$

Ako se suptrahend izraza u vitičastoj zagradi i podijeli i pomnoži sa $(-1)^B B!$, onda se ovaj izraz, pošto dolazi i u minuendu, može da stavi pred vitičastu zagradu, čime se brojnik razlomka pred tom zagradom oslobađa od izraza $(-1)^B$. Istodobno se svaki sumand iz uglate zagrade mijenja u toliko, što svagdje ispred qx ispada negativan predznak, te što se ujedno izraz $B!$ iz svakog nazivnika (osim prvoga) krati djelomice ili i sasvim (kod zadnjega) sa brojnikom. Ako se još i sam slijed sumandâ iz uglate zagrade obrne, onda iz gornje jednadžbe izlazi konačno:

$$y = \frac{A\,B!}{q^{B+1}} \Big\{ 1 - e^{-qx} \Big[1 + qx + \frac{(qx)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{(qx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(qx)^B}{B!} \Big] \Big\} \quad \ldots\ldots \tag{77}$$

To bi dakle bio definitivni oblik jednadžbe 64 uz rečeni uslov, da se naime B zaokruži na cijeli broj.

Prof. Guttenberg (spomenuto djelo, str. 61) veli o jednadžbi 77, koja prema Kollerovom načinu pisanja izgleda kompliciranijom, da je preveć komplicirana, a da bi mogla da nađe primjenu u praksi. Osim ovog čisto praktičnog prigovora može toj jednadžbi da ih se stavi i nekoliko čisto teoretskih. Jedan od njih bio bi taj, da ona posredstvom svojih parametara — koji ili svi (po Kollerovom predlogu) ili barem djelomice (B) moraju da se izračunaju iz jednadžbe 44 — stavlja svoje y - iznose u zavisnost od pronađenih (empirijskim putem) y' - iznosa, t. j. iznosa koji su iz razloga malo prije spomenutih svakako manje pouzdani od samih pronađenih y - iznosa. Osim toga samo zaokruživanje parametra B uzrokom je izvjesnoj pogrešnosti te Kollerove funkcije, pogrešnosti koja to jače mora da dođe do izražaja što je manji sam po sebi taj parametar i što jače u pojedinom slučaju mora on da se zaokruženjem promijeni.

Po mojem gornjem izvodu, koji se u mnogočem razlikuje od Kollerovog, izlazi ova Kollerova funkcija u čisto formalnom pogledu znatno jednostavnijom nego po Kollerovom izvodu i po originalnim njegovim oznakama, jer ju je on izveo iz jednadžbe 46, koja je (kao što rekoh) analitički nepodesnija od jednadžbe 44, od koje sam pri gornjem izvodu pošao ja. No ni sada još ne gubi jednadžba 77 nikako onaj nepovoljni karakter, što joj ga spomenutom izjavom pripisuje Guttenberg.

Ako bi se od parametara jednadžbe 77 samo B računao iz jednadžbe 44, onda bi se konstantni, ali sastavljeni izraz pred glavnom zagradom morao da zamijeni jednim jedinim parametarskim izrazom (novim naravski).

II. PIŠČEVE FUNKCIJE.

1. Osnovna funkcija.

Ako se i brojnik i nazivnik na desnoj strani jednadžbe 56 podijeli sa:

$$x^{c-1} = x^{c+1-2} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

onda iz nje jednostavnom daljnjom transformacijom izlazi diferencijal:

$$dy = Ax^{-2}\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{-c-1} dx \quad \ldots \quad (79)$$

a odovud:

$$y = A\int_0^x x^{-2}\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{-c-1} dx \quad \ldots \quad (80)$$

Stavimo li sada:

$$\frac{b}{x} = \xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

otkud obrnuto izlazi:

$$x = b\xi^{-1}\ ;\ dx = -\,b\xi^{-2}\, d\xi \quad \ldots \quad (82)$$

pa uvrstimo li sva ova tri izraza u jednadžbu 80, onda iz nje stezanjem i s obzirom na nove integracione granice u smislu jednadžbe 81 kao i s obzirom na poznato pravilo, da se međusobnom zamjenom integracionih granica mijenja ujedno i predznak integrala, izlazi:

$$y = \frac{A}{b}\int_{\frac{b}{x}}^{\infty}\left(1+\xi\right)^{-c-1} d\xi \quad . . . . \quad (83)$$

Stavimo li nadalje:

$$1 + \xi = \eta \quad . . . . \quad (84)$$

otkud obrnuto izlazi:

$$\xi = \eta - 1; \; d\xi = d\eta \quad . . . . . . \quad (85)$$

pa uvrstimo li sve ovo u jednadžbu 83, onda iz nje izlazi:

$$y = \frac{A}{b}\int_{1+\frac{b}{x}}^{\infty} \eta^{-c-1}\, d\eta = \frac{A}{bc}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-c} \quad . \quad (86)$$

Izvedemo li napokon u zadnjoj jednadžbi supstituciju:

$$\frac{A}{bc} = a \quad . . . . \quad (87)$$

onda iz nje izlazi konačni oblik tražene funkcije rastenja t. j.

$$y = \frac{a}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{c}} \quad . . . . \quad (88)$$

koji bi u formi analognoj jednadžbi 56 glasio također:

$$y = a\left(\frac{x}{b+x}\right)^{c} \quad . . . . \quad (88a)$$

Kao što vidimo, ovaj zadnji oblik funkcije razlikuje se od funkcije 56 samo po tome, što je ovdje i u brojniku i u nazivniku eksponent jedan te isti. Prema tome je dakle ova funkcija r a s t e n j a jednostavnija od pripadne joj funkcije p r i r a š ć i v a n j a, što je sasvim u suglasju sa oblicima pripadnih im krivulja. Dok naime veći iznos eksponenta u nazivniku jednadžbe 56 vuče krivulju prirašćivanja nakon kulminacije sve više prema apscisnoj osi, to jednakost eksponenta u jednadžbi 88-a ne dopušta kod krivulje rastenja nigda i nikakovog opađanja. Iznos naime u zagradi, koji je pri $x = o$ također jednak nuli, nakon toga neprestano raste konvergirajući (sa rastenjem apscise do u beskonačnost) prema iznosu 1, što se još bolje vidi iz prvog funkcijinog oblika (pod 88).

Kao granični iznos y - veličine prema gore izlazi dakle konačni i asimptotički iznos a, dok iz verifikacije jednadžbe 56 izlazi, da y - veličina (rastući neprestano od iznosa o do iznosa a) prolazi kroz jednu jedinu infleksionu tačku određenu (u pogledu apscise) jednadžbom 58.

Osim toga iz verifikacije jednadžbe 56 izlazi, da krivulja 88 izlazi iz ishodišta koordinata u smjeru tangencijalnom na apscisnu os, te da na isti način konvergira i prema (paralelnoj sa apscisnom osi) asimptoti a, što je sve u suglasju sa oblikom y - krivulje na sl. 1.

Prednja jednadžba ima dakle sva svojstva potrebna za karakterizovanje rastenja, kako je ono predočeno na slici 1. Krivulja, koja izlazi iz te jednadžbe, mora prema tome da se dovoljno priljubljuje uz konkretne krivulje rastenja (nacrtane na osnovi podataka izmjere). No poznato je s druge strane, da stepen prilagodljivosti, s kojim se izvjesna teoretska krivulja priljubljuje uz daden kakav niz y - iznosâ, ne zavisi samo od općeg karaktera dotične funkcije, već i od broja parametara u njoj. Što je veći broj tih parametara, to — kod principijelno ispravnog karaktera funkcije — mora da bude veća i priljubljivost.

Broj parametara u jednadžbi 88 može da se poveća samo još s jednim, i to onim koji može da se postavi direktno iznad samoga x. To bi onda bila jednadžba, koju sam na spomenutom mjestu priopćio i u pogledu priljubljivosti demonstrirao 1930. godine. Na kraju ove studije izvest ću posebno ovaj općenitiji oblik zakona rastenja, no moram ujedno već sada da istaknem, da njegova praktična primjena zadaje razmjerno mnogo više posla nego primjena funkcije 88, premda se ni kod ove funkcije ne izračunavaju parametri baš udobno i brzo. Ni ona naime (jednako kao i K o l l e r o v a) ne spada u red funkcija linearnih, radi čega je i kod nje pri izračunavanju parametara potrebno dosta logaritmovanja i antilogaritmovanja i osim toga pri izračunavanju po metodi najmanjih kvadrata mora cijeli posao da se bar još par puta ponovi. Toga radi podvrći ćemo je izvjesnoj modifikaciji, kako bi se od nje dobila funkcija, kod koje je nepotrebno i ovo ponavljanje računa, a i bilo kakav posao sa logaritmima — razmjerno najveći i najmučniji dio cijeloga posla.

2. Pojednostavnjeni oblik funkcije.

Nazivnik funkcije 88 može lako da se razvije u tzv. binomski red, obično beskonačan, pošto c samo sasvim izuzetno može da bude cijeli broj. Na taj način iz spomenute funkcije izlazi funkcija:

$$y = \frac{a}{1 + \binom{c}{1}\frac{b}{x} + \binom{c}{2}\frac{b^2}{x^2} + \binom{c}{3}\frac{b^3}{x^3} + \cdots\cdots \textit{in inf.}} \quad . \quad (89)$$

koja uz supstitucije:

$$\left.\begin{array}{l} a = A\,;\binom{c}{1}\,b = B\,; \\ \binom{c}{2}\,b^2 = C;\binom{c}{3}\,b^3 = D;\,\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

prima ujednostavnjeni oblik:

$$y = \frac{A}{1 + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \quad . \quad .} \quad . \quad . \quad (91)$$

sa A, B, C, ... kao parametrima. Što je više u funkciji tih parametara dotično u nazivniku članova (počevši od lijeva pa na desno), to se ona dadenom kakvom nizu y - iznosâ prilagođuje sve bolje.

Kao što vidimo, ova funkcija — pri ograničenom broju članova u nazivniku — predstavlja samo p r i b l i ž n o funkciju 88. Što je broj spomenutih članova manji, to se ona više udaljuje (s principijelnog gledišta) od funkcije 88. Ipak međutim vidimo iz nje već na prvi pogled, da pri kolikomgod broju članova u nazivniku (počevši od 2 pa prema gore) mora za slučaj $x = 0$ da izide i $y = 0$, dok pri $x = \infty$ izlazi $y = A$. U ovom je dakle pogledu funkcija 91 bezuvjetno suglasna sa funkcijom 88. Što se pak tiče ostalih karakteristika, one kod funkcije 91 (uzevši ovdje u obzir i njenu derivaciju) zavise o broju članova u nazivniku dotično o broju parametara. Kod izvjesnih brojeva parametara može i ova funkcija da ima sva ona karakteristična svojstva, što ih kao funkcija rastenja treba da ima. Kod izvjesnih pak brojeva parametara manjkaju joj ili neka ili i sva ta svojstva (osim onih dvaju, što smo ih baš vidjeli malo prije). Svakako međutim broj parametara (dotično članova u nazivniku) ne bi smio da bude manji od 4, no s druge strane ni kod najvećih zahtjeva u pogledu prilagodljivosti uz dadene y-nizove nije potrebno da bude veći od 6. Pri tom bi — koliko mi je to moguće već sada prosuditi — ona donja granica u broju parametara imala da važi za tok rastenja visine, a ova gornja za tok rastenja drvne mase.

Funkcija 91 ne predstavlja međutim — po izravnoj formi svojoj — još uvijek ono, za čim se ovdje ide. Kao što naime vidimo, ni ona sama nije još linearna. No zato je (s obzirom na parametre kao nepoznanice) potpuno linearna njoj recipročna funkcija:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{B}{A}x^{-1} + \frac{C}{A}x^{-2} + \frac{D}{A}x^{-3} + \cdots \quad (92)$$

koja uz supstitucije:

$$\frac{1}{A} = \alpha ; \frac{B}{A} = \beta ; \frac{C}{A} = \gamma ; \frac{D}{A} = \delta ; \cdots \quad (93)$$

dobiva definitivan oblik:

$$y^{-1} = \alpha + \beta x^{-1} + \gamma x^{-2} + \delta x^{-3} + \varepsilon x^{-4} + \cdots \quad (94)$$

---

sa $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ kao novim parametrima. Ova dakle funkcija dopušta udobno i razmjerno brzo izračunavanje parametara, bilo to po metodi elementarnoj ili pak po metodi najmanjih kvadrata. Iz poznatih pak parametara funkcije 94 dobivaju se parametri funkcije 91 uz jednostavno obrnuće pojedinih izraza pod 93 t. j. po pormulama:

$$A = \frac{1}{\alpha} ; B = A\beta ; C = A\gamma ; \cdots \quad (95)$$

No taj postupak nije baš ni potreban, jer na osnovi poznatih iznosa za α, β itd., pa prema tome i za y^{-1} izlazi y - iznos za kojugod starost kao jednostavna recipročna vrijednost iznosa y^{-1}. Na ovaj način dolazimo dakle do y - niza prema funkciji 91 bez potrebe da uopće poznajemo same parametre te funkcije. Njihovu zadaću vrše naime indirektno parametri funkcije 94.

D.) IZRAČUNAVANJE PARAMETARA.

Primjena funkcija rastenja nije moguća bez poznavanja konkretnih iznosa za njihove parametre. Stoga moram da za funkcije 88 i 94 razložim u glavnim linijama i princip izračunavanja tih iznosa. Kao što rekoh, parametri mogu da se izračunaju ili po metodi elementarnoj ili pak po metodi najmanjih kvadrata.

I. IZRAČUNAVANJE PO METODI ELEMENTARNOJ.

Za izračunavanje po ovoj metodi potrebno je, kao što vidjesmo, da nam je poznato samo onoliko koordinatnih parova, koliko u funkciji ima parametara (nepoznanica). Po uvrštenju ovih parova (svakoga zasebno) u dotičnu funkciju dobiva se isto tolik broj »posredovnih« jednadžbi, iz kojih onda mogu više ili manje lako da se izračunaju nepoznanice.

Kako je funkcija 94 (s obzirom na parametre kao nepoznanice) sasvim jednostavna linearna jednadžba, to je kod nje ovaj postupak sasvim jednostavan, pa se na njega neću uopće ni osvrtati. Moram međutim da ga u glavnom pokažem za funkciju 88, iz koje s pomoću tri poznata koordinatska para izlaze posredovne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a\left(1+\frac{b}{x_1}\right)^{-c} \\ y_2 &= a\left(1+\frac{b}{x_2}\right)^{-c} \\ y_3 &= a\left(1+\frac{b}{x_3}\right)^{-c} \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Eliminacijom nepoznanice a izlaze odovud jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= \left(\frac{x_2\,(b+x_1)}{x_1\,(b+x_2)}\right)^c \\ \frac{y_3}{y_1} &= \left(\frac{x_3\,(b+x_1)}{x_1\,(b+x_3)}\right)^c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

čijim logaritmovanjem i međusobnim podjeljenjem biva eliminirana i nepoznanica c, pa preostaje samo još jednadžba:

$$\frac{\log\frac{x_3}{x_1} + \log\frac{b+x_1}{b+x_3}}{\log\frac{x_2}{x_1} + \log\frac{b+x_1}{b+x_2}} = \frac{\log\frac{y_3}{y_1}}{\log\frac{y_2}{y_1}} \quad \ldots \quad (98)$$

sa b kao nepoznanicom. Slično kao jednadžba 34 može i ova jednadžba da se riješi samo postepenim kušanjem sa raznim za b već unaprijed suponiranim iznosima, čime možemo da se onom iznosu za b, koji bi dadenim koordinatskim parovima odgovarao sasvim strogo, približimo sa tačnošću kojomgod mu drago. S pomoću iznosa utvrđenog ovako za b dade se onda iz kojegod jednadžbe pod 97 izračunati iznos za c, a s pomoću poznatih iznosa za b i c iz kojegod jednadžbe pod 96 iznos za a.

Ovaj način izračunavanja parametara imao bi sam za sebe smisla samo onda, kad bi svi izmjerom dobiveni y - iznosi u zajednici sa pripadnim x - iznosima bili članovima pravilne jedne krivulje i to pravilne baš u smislu dadene funkcije, što međutim ne može nigda da se desi. Kako dakle konkretne krivulje rastenja mogu samo — više ili manje — da budu nepravilne (radi pogrešaka u mjerenju, a i radi zbiljnih individualnih nepravilnosti, koje ne mogu da se sasvim uklone ni putem aritmetičkih sredina od velikog broja iznosâ), to rezultat ovakovog računanja parametara daje za jedan te isti parametar iznose različite, pa i vrlo različite, već prema tome, koja su tri para koordinata uzeta za bazu računanja. Pojedini iznosi jednoga te istoga parametra izračunani ovako s pomoću raznih sistema od tri po tri koordinatska para moraju dakle jedni drugima da protuslove (pa i vrlo jako), a što je još gore, mi ne možemo na ovaj način da ustanovimo, koji je od tih međusobno protuslovnih parametarskih sistema najvjerojatniji.

Ove neprilike mogu da se uklone samo ako se parametri izračunavaju po metodi najmanjih kvadrata, u koju svrhu trebaju da se kao baza za računanje uzmu istodobno svi raspoloživi koordinatski parovi, a ne samo toliko njih, koliko u funkciji ima parametara.

II. IZRAČUNAVANJE PO METODI NAJMANJIH KVADRATA.

Kao što spomenuh, u slučaju funkcije 94 ovo je izračunavanje jednostavnije nego u slučaju funkcije 88, pa ću stoga da započnem s njime.

1. Izračunavanje za funkciju 94.

Jednostavnosti radi suponirat ću ovdje samo 4 parametra u funkciji. Za više od 4 parametra postupak je sasvim analogan. Također ću već sada (daljnjeg pojednostavnjenja radi) izvesti u jednadžbi 94 supstitucije:

$$x^{-1} = b;\ x^{-2} = c;\ x^{-3} = d \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (99)$$

čime ona dobiva oblik:

$$y^{-1} = a + b\beta + c\gamma + d\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (100)$$

Izmjerom y - veličinâ $(y_1, y_2, \ldots y_n;\ n > 4)$, koje odgovaraju raznim x - iznosima, dobivaju se više manje nepravilni, a i pogrešni iznosi $h_1, h_2, \ldots. h_n$, koji, ako se nanesu kao ordinate k pripadnim apscisama, daju jednu više manje nepravilnu krivulju. Isto tako nepravilna krivulja dobit će se, ako se k pojedinim x - iznosima kao apscisama nanesu kao ordinate recipročni iznosi $h_1^{-1}, h_2^{-1}, \ldots h_n^{-1}$. Između ovih iznosa i pripadnih im y^{-1}-iznosa prema jednadžbi (koji kao teoretski imaju — u formi sasvim pravilne krivulje — da teku što bolje kroz sredinu sistema tačaka određenog spomenutim nepravilnim h^{-1}- iznosima) moraju da postoje izvjesne, prethodno još nepoznate diferencije:

$$\left.\begin{aligned} \chi_1^{-1} &= y_1^{-1} - h_1^{-1} = \alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - h_1^{-1} \\ \chi_2^{-1} &= y_2^{-1} - h_2^{-1} = \alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta - h_2^{-1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \chi_n^{-1} &= y_n^{-1} - h_n^{-1} = \alpha + b_n\beta + c_n\gamma + d_n\delta - h_n^{-1} \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (101)$$

od kojih svaka može jednako da bude pozitivna kao i negativna. Pojednostavnjenja radi staviti ćemo ovdje:

$$\left.\begin{aligned} \chi_1^{-1} &= \lambda_1 ;\ \chi_2^{-1} = \lambda_2 ;\ \ldots\ \chi_n^{-1} = \lambda_n \\ h_1^{-1} &= l_1 ;\ h_2^{-1} = l_2 ;\ \ldots\ h_n^{-1} = l_n \end{aligned}\right\} \quad . \ . \qquad (102)$$

pa time gornji sistem diferencija dobiva formu:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1 \\ \lambda_2 &= \alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta - l_2 \\ &\ldots\ldots \\ \lambda_n &= \alpha + b_n\beta + c_n\gamma + d_n\delta - l_n \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \qquad (103)$$

Očito je, da iznosi ovih diferencija zavise od toga, kakove konkretne iznose imaju parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Svakom drugačijem sistemu tih konkretnih parametarskih iznosa odgovara naime drugačiji sistem λ- iznosa i obrnuto. Najvjerojatnijim pak parametarskim sistemom smatra se po teoriji najmanjih kvadrata onaj sistem, koji kao posljedicu ima jednadžbu:

$$S = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = Minim. \quad . \ . \qquad (104)$$

dotično s obzirom na sistem pod 103 jednadžbu:

$$\begin{aligned} S = {} & (\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1)^2 + \\ & + (\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta - l_2)^2 + \cdots \\ & \cdots + (\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + d_n\delta - l_n)^2 = Minim. \quad . \qquad (105) \end{aligned}$$

Medutim ova suma diferencijskih kvadrata može da dade minimum samo uz poznate uslove:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = O; \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = O; \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = O; \quad \frac{\partial S}{\partial \delta} = O \quad . \quad . \qquad (106)$$

t. j. ako se parcijalne derivacije ove sume po pojedinim nepoznanicama (α, β, . . .) stave jednakima nuli. Po izvršenju ovih operacija dobivaju se iz nje jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l}
(\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1) + (\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \\
+ d_2\delta - l_2) + \cdots\cdots + (\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + d_n\delta - l_n) = O \\
(\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1)\, b_1 + (\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \\
+ d_2\delta - l_2)\, b_2 + \cdots\cdots + (\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + d_n\delta - l_n)\, b_n = O \\
(\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1)\, c_1 + (\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \\
+ d_2\delta - l_2)\, c_2 + \cdots\cdots + (\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + d_n\delta - l_n)\, c_n = O \\
(\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta - l_1)\, d_1 + (\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \\
+ d_2\delta - l_2)\, d_2 + \cdots\cdots + (\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + d_n\delta - l_n)\, d_n = O
\end{array}\right\} (107)$$

njih (kao što vidimo) samo 4 na broju, premda su u njima pored nepoznanica α, β, γ, δ sadržani podaci svih n pojedinačnih izmjera dotično svi tim izmjerama dobiveni koordinatski parovi.

S obzirom na sistem pod 103 mogu ove 4 jednadžbe da se istim redom kratko napišu i u formi:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \cdots\cdots + \lambda_n \quad = O \\
\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \cdots\cdots + \lambda_n\, b_n = O \\
\lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2 + \cdots\cdots + \lambda_n\, c_n = O \\
\lambda_1\, d_1 + \lambda_2\, d_2 + \cdots\cdots + \lambda_n\, d_n = O
\end{array}\right\} \quad . \qquad (108)$$

dotično (prema načinu pisanja običajnom u teoriji najmanjih kvadrata) još kraće u formi:

$$\left.\begin{array}{l}
[\lambda] = O \\
[\lambda b] = O \\
[\lambda c] = O \\
[\lambda d] = O
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (109)$$

Jednadžbe pod 107 mogu međutim (po izmnoženju izrazâ u zagradama sa faktorima izvan tih zagrada) da se stegnu i ujednostavne i na drugi jedan način i to u glavnom prema samim nepoznanicama (α, β, ...) kao zajedničkim sumandskim faktorima. Na taj način izlaze iz njih tzv. normalne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} n\,\alpha + [b]\,\beta + [c]\,\gamma + [d]\,\delta &= [l] \\ [b]\,\alpha + [bb]\,\beta + [bc]\,\gamma + [bd]\,\delta &= [bl] \\ [c]\,\alpha + [bc]\,\beta + [cc]\,\gamma + [cd]\,\delta &= [cl] \\ [d]\,\alpha + [bd]\,\beta + [cd]\,\gamma + [dd]\,\delta &= [dl] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (110)$$

koje mogu da se po nepoznanicama α, β, γ, δ riješe po metodi sasvim jednostavne eliminacije. Po izračunanju tih nepoznanica mogu da se izračunaju i pojedini λ- iznosi iz sistema pod 103, pa da se onda s pomoću jednadžbi pod 108 prekontroliše ispravnost cijeloga posla, t. j. da li se nije gdjegod uvukla kakva gruba računska pogreška. U slučaju grube pogreške ne mogu naime ove jednadžbe da budu zadovoljene ni izdaleka. Sasvim strogo međutim ne mogu one da budu zadovoljene nikada, i to iz razloga neizbježivih sitnih pogrešaka pri zaokruživanju zadnjih decimala.

Izračunavanje nepoznanica iz sistema pod 110 može da se učini još jednostavnijim, ako se te jednadžbe formalno riješe već unaprijed t. j. ako se za pojedine njihove nepoznanice već unaprijed postave baš izričite formule. U tu svrhu eliminirat ćemo iz njih najprije prvi član (nepoznanicu α), nakon čega imamo:

$$\left.\begin{aligned} &([b][b] - n[bb])\,\beta + ([b][c] - n[bc])\,\gamma + \\ &\quad + ([b][d] - n[bd])\,\delta = [b][l] - n[bl] \\ &([b][c] - n[bc])\,\beta + ([c][c] - n[cc])\,\gamma + \\ &\quad + ([c][d] - n[cd])\,\delta = [c][l] - n[cl] \\ &([b][d] - n[bd])\,\beta + ([c][d] - n[cd])\,\gamma + \\ &\quad + ([d][d] - n[dd])\,\delta = [d][l] - n[dl] \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Stavimo li sada pojednostavnjenja radi:

$$\left.\begin{aligned} [b][b] - n[bb] &= B_1 \\ [b][c] - n[bc] &= B_2 = C_1 \\ [b][d] - n[bd] &= B_3 = D_1 \\ [c][c] - n[cc] &= C_2 \\ [c][d] - n[cd] &= C_3 = D_2 \\ [d][d] - n[dd] &= D_3 \\ [b][l] - n[bl] &= L_1 \\ [c][l] - n[cl] &= L_2 \\ [d][l] - n[dl] &= L_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (112)$$

onda sistem pod 111 dobiva oblik:

$$\left.\begin{aligned} B_1\,\beta + C_1\,\gamma + D_1\,\delta &= L_1 \\ B_2\,\beta + C_2\,\gamma + D_2\,\delta &= L_2 \\ B_3\,\beta + C_3\,\gamma + D_3\,\delta &= L_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (113)$$

Eliminacijom nepoznanice β dobiva se odovud dalje:

$$\left.\begin{aligned} (B_1\,C_2 - B_2\,C_1)\,\gamma + (B_1\,D_2 - B_2\,D_1)\,\delta &= B_1\,L_2 - B_2\,L_1 \\ (B_1\,C_3 - B_3\,C_1)\,\gamma + (B_1\,D_3 - B_3\,D_1)\,\delta &= B_1\,L_3 - B_3\,L_1 \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Tu ćemo opet pojednostavnjenja radi staviti:

$$\left.\begin{aligned} B_1\,C_2 - B_2\,C_1 &= C_4 \\ B_1\,C_3 - B_3\,C_1 &= C_5 = D_4 \\ B_1\,D_3 - B_3\,D_1 &= D_5 \\ B_1\,L_2 - B_2\,L_1 &= L_4 \\ B_1\,L_3 - B_3\,L_1 &= L_5 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (115)$$

pa onda sistem pod 114 dobiva oblik:

$$\left.\begin{aligned} C_4\,\gamma + D_4\,\delta &= L_4 \\ C_5\,\gamma + D_5\,\delta &= L_5 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (116)$$

Eliminira li se napokon γ, preostaje još samo jednadžba:

$$(C_4\,D_5 - C_5\,D_4)\,\delta = C_4\,L_5 - C_5\,L_4 \quad . \quad . \qquad (117)$$

iz koje izlazi:

$$\delta = \frac{C_4\,L_5 - C_5\,L_4}{C_4\,D_5 - C_5\,D_4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (118)$$

Time nam je dakle na osnovi poznatih već iznosa daden konkretni iznos za δ. Kad znamo njega, onda iznos za γ izlazi iz kojegod jednadžbe pod 116. Iz nje naime izlaze za γ formule:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{L_4 - D_4\,\delta}{C_4} \\ \gamma_2 &= \frac{L_5 - D_5\,\delta}{C_5} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (119)$$

od kojih može da se upotrijebi ili jedna ili druga, a najbolje obje, jer se u tom slučaju može već sada da otkrije eventualno postojanje kakove grube računske pogreške. U najmanju ruku pokazat će nam rezultati obiju tih formula, sa koliko decimala trebamo dalje da radimo. Ne vrijedi naime računati dalje recimo sa 10 decimala, ako se rezultati obiju tih formula ne podudaraju već u devetoj ili osmoj decimali. Na temelju poznatih iznosa za γ i δ izlazi sada konkretni iznos za β iz kojegod jednadžbe pod 113. Iz prve od tih jednadžbi dobiva se naime:

$$\beta = \frac{L_1 - (C_1\,\gamma + D_1\,\delta)}{B_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

a slično i iz ostalih. Kad su nam napokon poznata ova tri parametra, onda iznos za α izlazi iz kojegod jednadžbe pod 110. Iz prve od njih izlazi napr. izraz:

$$\alpha = \frac{[l] - ([b]\,\beta + [c]\,\gamma + [d]\,\delta)}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Svi ovi računi mogu s pomoću računske mašine da se sasvim mehaniziraju i još znatno ubrzaju, ako se u tu svrhu već unaprijed pripreme podesni tabelarni pregledi. Time međutim nije cijeli posao sasvim gotov, jer ako već izračunavamo konkretne parametarske iznose po metodi najmanjih kvadrata, onda po toj istoj metodi možemo i da utvrdimo stepen pouzdanosti tih računom dobivenih iznosa. O načinu toga utvrđivanja ne mogu međutim ovdje da govorim, jer bi to već prešlo granicu određenu direktnom svrhom ove radnje. O njemu govore gotovo sva bolja djela o izjednačivanju po metodi najmanjih kvadrata.

2. Izračunavanje za funkciju 88.

Kao što sam već u prednjem slučaju rekao, izmjerom y-veličinâ, koje odgovaraju raznim x-iznosima, ne dobivaju se ni izdaleka iznosi, koji bi dadenoj funkciji odgovarali strogo. Mjesto njih dobivaju se iznosi $h_1, h_2, \ldots . h_n$ (općenito h_i), koji su već i sami po sebi nepravilni, a i opterećeni su pogreškama mjerenja, tako da između svakog teoretskog y-iznosa (prema jednadžbi) i pripadnog mu konkretnog (opažanjem dobivenog) y-iznosa, što smo ga označili sa h_i, mora da postoji izvjesna, pozitivna ili negativna diferencija:

$$\chi_i = y_i - h_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Obrnuto, ako s tom (prethodno još nepoznatom) diferencijom korigiramo pripadni joj h_i - iznos, izlazi:

$$y_i = \frac{a}{\left(1 + \frac{b}{x_i}\right)^c} = f_i\,(a, b, c) = h_i + \chi_i \quad . \quad . \quad (123)$$

Prednja jednadžba sadrži (u trećem svome dijelu) i formalnu aluziju na to, da y_i zavisi funkcionalno ne samo od argumenta (x_i), već i od parametara, koji se naravski od slučaja do slučaja (npr. od stojbine do stojbine) mijenjaju. Međutim, kao što vidimo, ova funkcija nije linearno zavisna od svojih parametara, pa se stoga za omogućenje postupka po metodi najmanjih kvadrata mora tek specijalno da preudesi u ovom smjeru, a to može da se izvede s pomoću tzv. T a y l o r o v o g reda. No kako opet iz tehničkih razloga mora ovaj red da se prekine već nakon članova sa prvim parcijalnim derivacijama, pa da se dakle kvadrati i produkti tzv. dopunjaka zanemare, to u našu funkciju moraju već a priori da se za parametre uvrste izvjesni aproksimativni iznosi (a_0, b_0, c_0), koji po mogućnosti trebaju da budu takovi, kako bi im bili potrebni samo još sasvim neznatni pozitivni ili negativni dopunjci (α, β, γ), pa da se po formulama

$$a = a_0 + \alpha; \; b = b_0 + \beta; \; c = c_0 + \gamma \quad \cdot \; \cdot \quad (124)$$

dobiju traženi (najvjerojatniji) parametarski iznosi. Aproksimativni iznosi a_0, b_0, c_0 mogu da se ustanove po spomenutoj elementarnoj metodi (iz jednadžbi 96—98). Najsigurnije dotično najtočnije dadu se oni na taj način ustanoviti, ako se raspoloživi koordinatski iznosi nanesu grafički, pa se onda ta nepravilna krivulja približno izjednači od oka.

Jednadžba 123 izražena na spomenut način s pomoću najnižih članova T a y l o r o v o g reda, t. j.

$$\begin{aligned} h_i + \chi_i &= f_i\,(a_0 + \alpha,\; b_0 + \beta,\; c_0 + \gamma) = \\ &= f_i\,(a_0, b_0, c_0) + \frac{\partial f_i}{\partial a_0}\,\alpha + \frac{\partial f_i}{\partial b_0}\,\beta + \frac{\partial f_i}{\partial c_0}\,\gamma \quad \cdot \; \cdot \quad (125) \end{aligned}$$

glasila bi dakle:

$$\left.\begin{aligned} h_i + \chi_i = a_0 \left(1 + \frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} + \left(1 + \frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} \alpha - \\ - \frac{a_0 c_0}{x_i} \left(1 + \frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0 - 1} \beta - a_0 \left(1 + \frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} \cdot \\ \cdot \left[Log\left(1 + \frac{b_0}{x_i}\right)\right] \gamma \end{aligned}\right\} \quad (126)$$

Ovdje možemo pojednostavnjenja radi da stavimo:

$$\left.\begin{aligned}
\left(1+\frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} &= A_i \\
-\frac{a_0 c_0}{x_i}\left(1+\frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0-1} &= -\frac{a_0 c_0 A_i^{1+\frac{1}{c_0}}}{x_i} = B_i \\
-a_0\left(1+\frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} Log\left(1+\frac{b_0}{x_i}\right) &= -a_0 A_i Log A_i^{-\frac{1}{c_0}} = C_i \\
h_i - a_0\left(1+\frac{b_0}{x_i}\right)^{-c_0} &= h_i - a_0 A_i = H_i
\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

Iznosi, što ih predstavljaju ovi izrazi, dadu se izračunati, čim su nam poznati iznosi a_0, b_0, c_0. Izrazi A_i, B_i, C_i, H_i predstavljaju dakle poznate već koeficijente, s pomoću kojih sistem od n jednadžbi, što izlaze iz jednadžbe 126, prelazi u sistem sasvim jednostavnih jednadžbi oblika:

$$\chi_i = A_i \alpha + B_i \beta + C_i \gamma - H_i \quad . \; . \; . \quad (128)$$

Iz ovog pak sistema izlaze na poznat već način normalne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned}
[AA]\,\alpha + [AB]\,\beta + [AC]\,\gamma &= [AH] \\
[AB]\,\alpha + [BB]\,\beta + [BC]\,\gamma &= [BH] \\
[AC]\,\alpha + [BC]\,\beta + [CC]\,\gamma &= [CH]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (129)$$

u kojima, kao što vidimo, fungiraju kao nepoznanice **ne** sami parametri (kao što je to bio slučaj pod 110, gdje su grčka slova imala drugo značenje), već dopunjci spomenutih približnih parametarskih iznosa. Oni se po izračunanju (analognom onome, što ga predočuju jednadžbe 111—121) uvršćuju u formule pod 124. No gotovo nigda ne dobivaju se time odmah definitivni parametarski iznosi, jer ti dopunjci nakon ovog prvog računskog procesa obično su toliki, da se njihovi kvadrati i produkti ne smiju da zanemare. Toga radi iznosi izrazâ pod 124 (dobiveni ovako prvi puta) smiju da se upotrijebe tek kao novi približni iznosi, s kojima se onda cijeli opisani proces ponavlja. Time dobiveni novi iznosi za α, β, γ moraju da budu manji nego prvi puta (u koliko naravski ne predleži kakva znatnija računska pogreška i u koliko računamo sa dovoljnim brojem decimala), no još uvijek ne moraju da zadovolje ni oni. Ponavljati se stoga mora sve dotle, dok dopunjski iznosi ne padnu u tolikoj mjeri, da se njihovi kvadrati i produkti zaista već mogu da zanemare. Da li je taj slučaj već nastupio, možemo da se osvjedočimo kontrolom, što nam je pružaju jednadžbe

$$[\chi A] = O; \; [\chi B] = O; \; [\chi C] = O \quad . \; . \; . \quad (130)$$

dobivene na sličan način kao one pod 108 dotično 109. Ako je taj slučaj nastupio, onda imamo ne samo najvjerojatnije iznose parametara, već ujedno možemo da na najjednostavniji način definitivno izračunamo sve potrebne nam y - iznose. Oni naime izlaze onda s dovoljnom tačnošću već iz same jednadžbe 122.

III. REZULTATI RAČUNANJA ZA JEDAN KONKRETNI PRIMJER.

Primjer, o kojem se ovdje radi, sadržan je u tabeli 2. Iznosi te tabele predstavljaju, kao što rekoh, srednje sastojinske visine (u decimetrima), što ih je Guttenberg za krajeve pojedinih decenija (do 150. godine) postavio za smrekove sastojine I. bonitetnog razreda u Tirolu. Kao što vidimo iz sl. 1, to su već izjednačeni iznosi, no ne po metodi najmanjih kvadrata, već u glavnom grafički i od oka.

1. Za prethodno izračunanje aproksimativnih iznosa a_0, b_0, c_0 po jednadžbama 96—98 upotrijebio sam ordinate, koje odgovaraju apscisama 10, 80 i 150. Nakon kojih desetak pokušaja po jednadžbi 98 zadržao sam, kao već prihvatljiv, iznos $b_0 = 14 \cdot 773.54$, s pomoću kojega sam dalje dobio $c_0 = 4 \cdot 094.228$, $a_0 = 574 \cdot 3874$. S pomoću ovih iznosa dobio sam iz sistema jednadžbi pod 129 iznose: $\alpha = + 13 \cdot 019.9496$, $\beta = - 2 \cdot 5498.0949$, $\gamma = + 0 \cdot 837.605.347$, tako da su sami parametri dobili sada iznose: $a = 587 \cdot 407.3496$, $b = 12 \cdot 2237.3051$, $c = 4 \cdot 931.833.347$. Naravski morao sam da izvedem ponovljenje cijeloga postupka sa ovim novim iznosima kao aproksimativnim. Sada sam pak za dopunjke dobio iznose: $\alpha = - 1 \cdot 1473.5573$, $\beta = - 0 \cdot 440.782.986$, $\gamma = + 0 \cdot 317.830.715$, koji su dakle kud i kamo manji nego prvi puta, ali još uvijek sasvim osjetljivi. Potrebno bi dakle bilo svakako još jedno ponovljenje, no ja sam se ovdje zadovoljio i sa ovim rezultatom. Radi toga nisam naravski pojedine konačne y - iznose računao iz jednadžbe 122, već sam u tu svrhu morao da izračunam nove produkte $a_0 A_i$, jednake, kao što vidimo iz jednadžbi pod 125—127, iznosima za $f_i\,(a_0, b_0, c_0)$. Ti iznosi složeni su pregledno u trećem stupcu priložene tabele 5, dok su u drugi stupac radi lakšeg upoređivanja ponovno uvršteni Guttenbergovi iznosi iz tabele 2. Četvrti stupac sadrži diferencije između podataka drugoga i trećega stupca, t. j. iznose za H_i prema zadnjoj jednadžbi pod

127. Ove diferencije, kao što vidimo, ma da je račun obustavljen već nakon prvog ponovljenja, nisu velike. Krivulja na slici 3 predstavlja grafički samu funkciju, a tačke pokraj nje Guttenbergove visinske iznose.

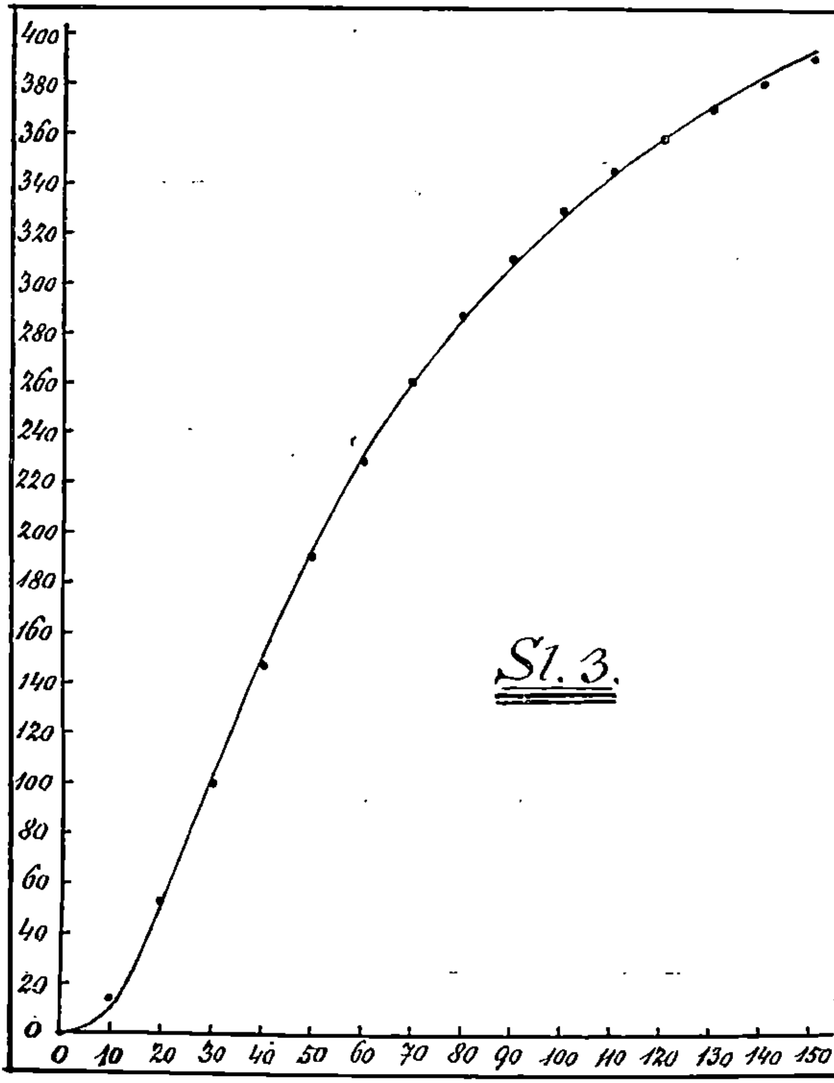
Tabela 5.

x_i	h_i	$a_0 A_i$	H_i
10	14	9·8	+ 4·2
20	53	51·5	+ 1·5
30	100	103·0	— 3·0
40	147	151·2	— 4·2
50	190	193·0	— 3·0
60	228	228·7	— 0·7
70	260	259·1	+ 0·9
80	287	285·0	+ 2·0
90	310	307·3	+ 2·7
100	329	326·7	+ 2·3
110	345	343·6	+ 1·4
120	358	358·5	— 0·5
130	370	371·8	— 1·8
140	381	383·6	— 2·6
150	391	394·2	— 3·2

Logaritmovanja i antilogaritmovanja potrebna ovdje izveo sam s pomoću napomenutih već Veginih tabela na 10 decimala. Uopće sve račune i ovdje i u slijedećim slučajevima izveo sam sa brojevima od najmanje 10 efektivnih cifara.

2. Iz jednadžbe 94 uzeo sam pri izračunavanju parametara u obzir najprije prva 4, a zatim i prvih 5 članova (parametara). Na osnovi njih izračunao sam zatim po formulama pod 95 parametre jednadžbe 91. Svi ti parametri složeni su pregledno u tabeli 6. Parametri za prvi slučaj nalaze se u prva 4 retka.

Kao što vidimo, svi parametri za prvi slučaj pozitivni su, dok je za drugi slučaj jedan od njih negativan. To je naravna



posljedica činjenice, da funkcija 91, makar je proizišla iz funkcije 88, nije s ovom identična.

Iz priložene tabele 7, koja je inače sasvim jednako raspoređena kao i tabela 5, vidi se, da se krivulja y_{91} pri primjeni sa 4 parametra nešto bolje priljubljuje uz Guttenbergovu empirijsku krivulju, nego li je to bio slučaj sa krivuljom y_{88}. To je i shvatljivo s obzirom na veći broj parametara u njoj, ma

Tabela 6.

a)	$\alpha = + 0{\cdot}001.814.217.37$	$A = + 551{\cdot}201.865$
	$\beta = + 0{\cdot}078.439.399.2$	$B = + 43{\cdot}235.943.1$
	$\gamma = + 4{\cdot}352.150.86$	$C = + 2.398{\cdot}913.67$
	$\delta = + 18{\cdot}247.424.3$	$D = + 10.058{\cdot}014.3$
b)	$\alpha = + 0{\cdot}002.027.830.12$	$A = + 493{\cdot}137.956$
	$\beta = + 0{\cdot}037.830.875.8$	$B = + 18{\cdot}655.840.8$
	$\gamma = + 6{\cdot}554.101.34$	$C = + 3.232{\cdot}076.14$
	$\delta = - 23{\cdot}069.609.1$	$D = - 11.376{\cdot}499.9$
	$\varepsilon = + 231{\cdot}462.548$	$E = + 114.142{\cdot}968$

da ona (kao što vidjesmo) predstavlja tek izvjesnu približnost prema funkciji 88.

Još mnogo bolje podudaranje sa Guttenbergovim iznosima pokazuje funkcija 91 pri primjeni sa 5 parametara (tabela 6, zadnjih 5 redaka). To podudaranje izlazi iz iznosâ tabele 8, koja je s obzirom na prva 4 stupca sasvim jednako raspoređena kao i tabele 5 i 7. Diferencije između iznosâ u drugom i trećem stupcu tabele tako su naime malene, da ako bismo oba ova visinska niza nanijeli grafički u jednom te istom sustavu i u jednom te istom, običajnom za to mjerilu (za apscise: 1 cm = 10 god., za ordinate 1 m/m = 2 dm), onda se dotične krivulje ne bi već mogle uopće da razluče jedna od druge. Da li međutim okolnost, da se one ipak ne podudaraju sasvim, treba da se pripiše na teret samo teoretičkoj krivulji?

Da bih u tom pogledu mogao da stvorim izvjestan zaključak, obrazovao sam između pojedinih konsekutivnih iznosa u 2. tabelinom stupcu diferencije (Δ), a između ovih i na isti način opet diferencije (Δ', vidi iznose 5. i 6. stupca). Ove druge diferencije nanio sam potom grafički u mjerilu 1 cm = 2 dm.

Tabela 7.

x	y_G	y_{91}	$y_{91} - y_G$
10	14	14·00	+ 0·00
20	53	52·92	— 0·08
30	100	100·60	+ 0·60
40	147	147·48	+ 0·48
50	190	189·76	— 0·24
60	228	226·50	— 1·50
70	260	257·99	— 2·01
80	287	284·87	— 2·13
90	310	307·87	— 2·13
100	329	327·65	— 1·35
110	345	344·75	— 0·25
120	358	359·62	+ 1·62
130	370	372·66	+ 2·66
140	381	384·14	+ 3·14
150	391	394·32	+ 3·32

Pokazalo se, da ove druge diferencije počevši od 50. godine čine jednu izričito nepravilnu krivulju (sl. 4), kojoj je očito razlogom samo okolnost, da je faktično nepravilan i G u t t e n b e r g o v visinski niz iz 2. stupca tabelinog. Ta je okolnost napokon i lako shvatljiva s obzirom na sam način postanka toga G u t t e n b e r g o v o g niza. Naprotiv krivulja drugih diferencija obrazovanih za funkciju 91 (vidi zadnji stupac tabele) teče i nakon 50. godine sasvim pravilno i to baš kroz sredinu sistema tačaka pripadnih onoj drugoj (nepravilnoj) krivulji izjednačujući ujedno time ovu posljednju.

Neću time nikako da kažem, da je funkcija 91 u primjeni sa 5 parametara upravo savršena. To ona nije već radi spomenute teoretske manjkavosti prema osnovnoj svojoj funkciji (88), od koje se ona uz dadeni y - niz mnogo bolje priljubljuje samo radi znatne premoćnosti u broju parametara. Uza sve to, a radi spomenute svoje manjkavosti, može ona za područje iz-

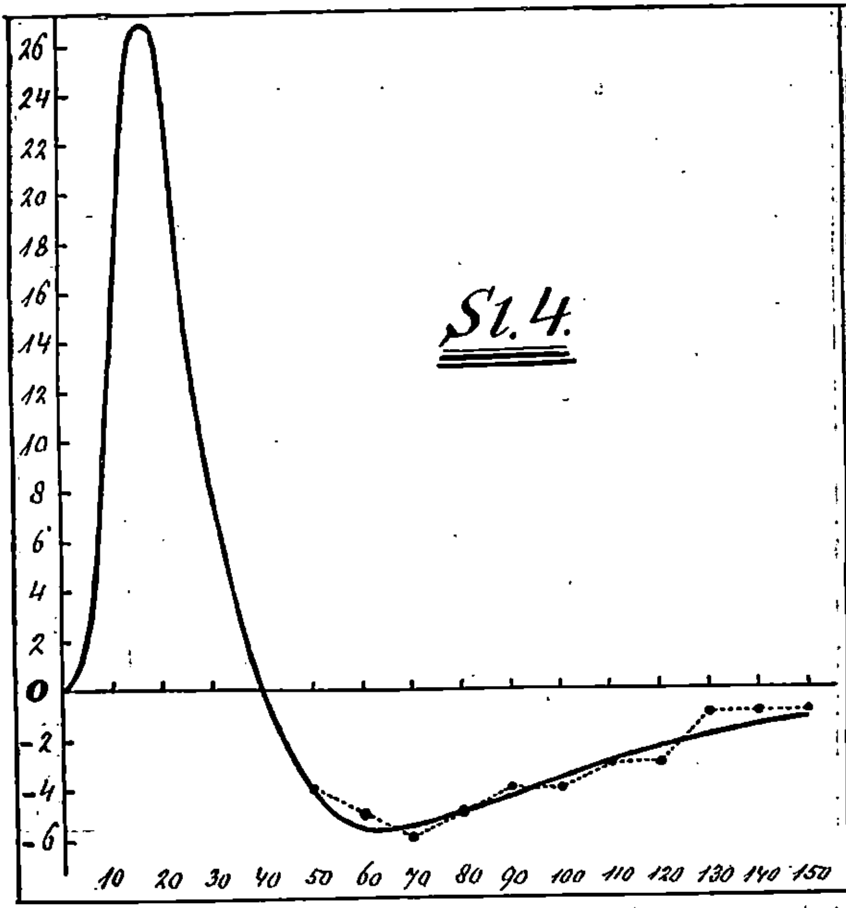
Tabela 8.

x	y_G	y_{91}	$y_{91}-y_G$	Δ_G	Δ'_G	Δ_{91}	Δ'_{91}
10	14	14·00	0·00	14	+14	14·0	+14·0
20	53	53·00	0·00	39	+25	39·0	+25·0
30	100	99·98	— 0·02	47	+ 8	47·0	+ 8·0
40	147	147·06	+ 0·06	47	0	47·1	+ 0·1
50	190	190·17	+ 0·17	43	— 4	43·1	— 4·0
60	228	227·79	— 0·21	38	— 5	37·6	— 5·5
70	260	259·86	— 0·14	32	— 6	32·1	— 5·5
80	287	286·91	— 0·09	27	— 5	27·0	— 5·1
90	310	309·67	— 0·33	23	— 4	22·8	— 4·2
100	329	328·86	— 0·14	19	— 4	19·2	— 3·6
110	345	345·11	+ 0·11	16	— 3	16·2	— 3·0
120	358	358·94	+ 0·94	13	— 3	13·8	— 2·4
130	370	370·79	+ 0·79	12	— 1	11·9	— 1·9
140	381	381·00	+ 0·00	11	— 1	10·2	— 1·7
150	391	389·87	— 1·13	10	— 1	8·9	— 1·3

među ishodišta koordinatskog i prve desne x- tačke (ako je ovo područje još uvijek dosta veliko) da dade eventualno i y-iznose sasvim nemoguće. Takav slučaj može da nastupi, ako bi predznak zadnjega parametra (E) bio negativan. No to bi onda bio — izgleda — znak, da broj upotrijebljenih parametara nije dovoljan, pa da treba uzeti još jednoga.

E) MODIFIKACIJA S OBZIROM NA RASTENJE U DEBLJINU.

Poznato je, da za rastenje i prirašćivanje u debljinu, kako se ono očituje baš na najnižem poprečnom prerezu debla, t. j. ondje gdje deblo baš izlazi iz zemlje, važe krivulje analogne krivuljama na slici 1. Stoga za rastenje i prirašćivanje debljine na ovoj najnižoj tački osi deblove moraju (približno barem) da važe i zakoni sadržani u jednadžbama 56 i 88. No zakon sadržan



u jednadžbi 56 važi za priraščivanje u debljinu čak i onda, ako se ono očituje na k o j e m g o d poprečnom prerezu debla, pa tako i na poprečnom prerezu u v i s i n i p r s i j u (13 dm nad zemljom). Samo u ovom slučaju važi taj zakon tek počevši od one starosti (t), u kojoj je stablo baš izraslo do te visine. Ako se u jednadžbu 56 uvrsti sama ova starost t, onda izraz za p o č e t n i iznos debljinskog prirasta u visini prsiju (tečajnog godišnjeg besprekidnog) glasi:

$$y' = \frac{A\,t^{c-1}}{(b+t)^{c+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (131)$$

Kao što je poznato, taj početni iznos nije baš sasvim malen, čak zna da bude i razmjerno vrlo velik.

Starost t predstavlja dakle ovdje d o n j u granicu x - iznosâ. Kad se stoga radi o tome, da se izvede f u n k c i j a r a s t e n j a u v i s i n i p r s i j u, moramo u jednadžbu 80 da kao donju integracionu granicu uvrstimo tu starost, čega radi kao polazna tačka za izvod ove funkcije važi izraz:

$$y = A\int_{t}^{x} x^{-2}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-c-1} dx \quad \ldots \quad (132)$$

Uvrstimo li ovamo izraze pod 81 i 82, onda odovud stezanjem i s obzirom na nove integracione granice u smislu jednadžbe 81 izlazi izraz:

$$y = -\frac{A}{b}\int_{\frac{b}{t}}^{\frac{b}{x}} (1 + \xi)^{-c-1} d\xi \quad \ldots \quad (133)$$

koji opet po uvrštenju izrazâ pod 84 i 85 prelazi dalje u izraz:

$$y = -\frac{A}{b}\int_{1+\frac{b}{t}}^{1+\frac{b}{x}} \eta^{-c-1} d\eta \quad \ldots \quad (134)$$

Po izvršenju integracije dobiva se odovud izraz:

$$y = \frac{A}{bc}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{c}} - \frac{1}{\left(1+\frac{b}{t}\right)^{c}}\right] \quad \ldots \quad (135)$$

odnosno dalje, s obzirom na supstitucionu jednadžbu pod 87, izraz:

$$y = \frac{a}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{c}} - \frac{a}{\left(1+\frac{b}{t}\right)^{c}} \quad \ldots \quad (136)$$

Pošto je t kod jednog te istog individua (odnosno skupine individua) konstantno, to i cijeli suptrahend zadnje jednadžbe za taj isti individuum izlazi kao konstantan, dakle:

$$\frac{a}{\left(1+\frac{b}{t}\right)^{c}} = k \quad \ldots \quad (137)$$

pa se prema tome zadnja jednadžba pojednostavnjuje na izraz:

$$y = \frac{a}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^c} - k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

To bi dakle bila funkcija rastenja debljine u visini prsiju. Ona se, kao što vidimo, razlikuje od funkcije 88 samo po još jednom daljnjem parametru (k).

Kao što to pokazuje jednadžba 136, u slučaju $x = t$ minuend je funkcije 138 jednak suptrahendu, pa stoga za taj slučaj izlazi $y = o$. U starosti t promjer stabla u prsnoj visini baš je dakle još jednak nuli, dok odmah nakon toga biva on većim od nule i raste neprestano dalje, sve do iznosa $y = a - k$, koji bi rezultirao za nedostiživu (naravski) starost $x = \infty$.

Kad bismo konzekutivne debljine stabla mjerili sasvim pri zemlji ili (strože rečeno) baš na samom dnu nekadanje primarne stabljike, onda bismo u jednadžbu 136 dotično 137 morali za t da uvrstimo iznos o, jer za postignuće (nikakove još) visine spomenutog dna nije bila potrebna niti kakova starost. Posljedicom toga uvrštenja bio bi iznos $k = o$, tako da bi jednadžba rastenja u debljinu dobila sada opet jednostavniji oblik pod 88, koji — kao što rekoh — važi za rastenje debljine na najnižem poprečnom prerezu debla.

Parametar k otešćava naravski praktičku primjenu jednadžbe 138 prema onoj pod 88. Od praktične smetnje on je još i u toliko, što modifikacija jednadžbe 138 analogna onoj, po kojoj smo došli do jednadžbe 91, ne može radi njega da znači nikakovo ujednostavnjenje i ubrzanje posla, pošto se jednadžba 138 ne može na spomenut način da svede na linearnu jednadžbu analognu jednadžbi 94.

F) OPĆENITIJI OBUHVAT PROBLEMA.

Jednadžbe 8-a, 9 i 10 dadu se napisati još općenitije, ako se i iznad svakoga x postavi izvjestan eksponent različit od 1, recimo izraz $2s + 1$, gdje ipak ne može s da zauzme makar koju vrijednost. Da bi naime jednadžba, koja na taj način nastaje iz jednadžbe 10, mogla da bude zadovoljena, potrebno je da taj eksponent ili bude neparan cijeli broj (pozitivan naravski) ili pak u slučaju razlomka (nepravog dakako i opet samo pozitivnog) da to bude razlomak sa neparnim i brojnikom i nazivnikom. Brojnik sam ne smije da bude paran, jer bi inače (jednako kao i kod parnog cijelog broja) bio izraz x^{2s+1} uvijek samo pozitivan (i kod negativnog iznosa za x), te bi time bilo nemoguće međusobno ukidanje sumandâ na lijevoj jednadžbinoj strani. Sam pak nazivnik ne smije da bude paran, jer bi inače svi sumandi sa negativnim x - iznosima bezuvjetno bili imaginarni.

Da bi spomenuti eksponenti mogli da budu ovakovi razlomci, mogu (prethodno) da fungiraju kao s samo oni pravi ili nepravi razlomci, kojima je nazivnik (po razdjeljenju i brojnika i nazivnika sa najvećim eventualnim zajedničkim faktorom) neparan broj, dok im brojnik može da bude i paran. Takovih pak razlomaka, od kojih neki (manji od $\frac{1}{2}$) mogu da budu i negativni, ima zajedno sa pozitivnim cijelim brojevima zapravo beskonačno mnogo, tako da u pogledu raznih za s dopustivih iznosa postoji vanredno široka mogućnost. Uz taj uslov iz proširene (na spomenut način) jednadžbe 9 dotično 12 izlazi integracijom jednadžba:

$$y' = \left(\frac{c}{r}\right)^r \left[1 + \frac{kx^{2s+2}}{c\,(2s+2)}\right]^r \quad \dots \quad (139)$$

koja se u slučaju $s = o$ opet reducira sasvim na jednadžbu 13.

Na način posve analogan onome, po kojem smo došli do jednadžbe 17, dolazi se sada do jednadžbe:

$$y' = a\left(1 + \frac{x^{s+1}}{g_1^{\,s+1}}\right)^{r_1}\left(1 - \frac{x^{s+1}}{g_2^{\,s+1}}\right)^{r_2} \quad \dots \quad (140)$$

koja uz supstituciju

$$s + 1 = t \quad \dots \dots \quad (141)$$

poprima oblik:

$$y' = a\left(1 + \frac{x^t}{g_1^{\,t}}\right)^{r_1}\left(1 - \frac{x^t}{g_2^{\,t}}\right)^{r_2} \quad \dots \quad (142)$$

Kao posljedica koincidencije maksimalne ordinate krivulјine sa samom ordinatnom osi izlazi ovdje na opisan način razmjer:

$$\frac{r_1}{g_1^{\,t}} = \frac{r_2}{g_2^{\,t}} \quad \dots \dots \quad (143)$$

prema kojem u omjeru $r_1 : r_2$ stoje sada ne više sami linearni izrazi g_1 i g_2, već njihove potencije, dok iz jednadžbe 142 izlazi, da te potencije mogu sada da se shvate i kao same granice varijabilnosti. No one i moraju da se tako shvate, ako funkcija 142 ima svakako da bude samo asimetrična (što se ovdje od nje faktično i traži). Stoga sada i kao argumenat funkcije može zapravo da važi ne više prijašnji argumenat (x), već njegova potencija. S obzirom na to ne mora sada (kao što se to tražilo kod funkcija simetričnih) da bude t ograničeno baš na iznose, koji bi odgovarali spomenutim ograničenjima za s. Dovoljno je, ako su njegovi iznosi pozitivni.

Pod ovim okolnostima može transformacija jednadžbe 142, koja bi bila analogna onoj pod 21, da se izvede po jednostavnoj jednadžbi:

$$y' = a\left(1 + \frac{x^t - g_1^t}{g_1^t}\right)^{r_1}\left(1 - \frac{x^t - g_1^t}{g_2^t}\right)^{r_2} \quad (144)$$

iz koje dalje izlazi:

$$y' = \frac{a\,(g_1^t + g_2^t)^{r_2}}{g_1^{tr_1}\,g_2^{tr_2}}\,x^{tr_1}\left(1 - \frac{x^t}{g_1^t + g_2^t}\right)^{r_2} \quad (145)$$

Odovud pak uz supstitucije analogne onima pod 23 izlazi:

$$\underline{y' = A\,x^B\left(1 - \frac{x^C}{D}\right)^E} \quad (146)$$

t. j. općenitiji oblik jednadžbe 24. Iz njega dalje na način sličan prijašnjem izlazi jednadžba:

$$\underline{y' = A\,x^B\,e^{-q\,x^C}} \quad (147)$$

koja, kao što vidimo, predstavlja općenitiji oblik jednadžbe 44. Ako se ona napiše u formi

$$y' = \frac{A\,x^B}{e^{q\,x^C}} \quad (147a)$$

onda iz nje s pomoću poznate jednadžbe

$$e^{q\,x^C} = \left(1 + \frac{x^C}{D}\right)^{q\,D} \quad (148)$$

koja važi uz uslov $D = \infty$, izlazi:

$$y' = \frac{A\,x^B}{\left(1 + \frac{x^C}{D}\right)^{q\,D}} \quad (149)$$

dotično (uz sasvim jednostavnu transformaciju) dalje:

$$y' = \frac{A\,D^{q\,D}\,x^B}{(D + x^C)^{q\,D}} \quad (150)$$

Doklegod postoji uslov $D = \infty$, dotle je jednadžba 149 (pa prema tome i ova zadnja) potpuno identična sa jednadžbom 147-a dotično 147, koja osim pri $x = o$ daje iznos $y' = o$ tek još pri $x = \infty$. No spomenuti uslov nije jedini, koji kod ovih apscisa dovodi do istog ovog y' - iznosa. Isti efekt izlazi naime i kod sasvim konačnih D- iznosa, samo treba u tu svrhu pored sasvim običnih supstitucija

$$A D^{qD} = A'; \; D = b; \; C = d \quad \cdots \quad (151)$$

da se (u duhu izlaganja kod 49 do 51) još naročito stavi:

$$\left. \begin{aligned} B &= cd - 1 \\ qD &= c + 1 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \quad (152)$$

nakon čega jednadžba 150 dobiva konačan oblik:

$$y' = \frac{A' x^{cd-1}}{(b + x^d)^{c+1}} \quad \cdots \cdots \quad (153)$$

To bi, kao što vidimo, bio općenitiji oblik funkcije 56, u koju on uz uslov $d = 1$ direktno i prelazi.

Općenitiji oblik funkcije 88 izlazi na osnovi toga ovako: Ako se i brojnik i nazivnik funkcije 153 podijeli sa

$$x^{cd-1} = x^{cd+d-d-1} \quad \cdots \cdots \quad (154)$$

dobiva se nakon par jednostavnih operacija izraz:

$$y = A' \int_0^x x^{-d-1} \left(1 + \frac{b}{x^d}\right)^{-c-1} dx \quad \cdots \quad (155)$$

Stavi li se ovdje:

$$\frac{b}{x^d} = \xi \quad \cdots \cdots \quad (156)$$

otkud obrnuto izlazi:

$$\left. \begin{aligned} x &= b^{\frac{1}{d}} \, \xi^{-\frac{1}{d}} \\ dx &= -\frac{b^{\frac{1}{d}}}{d} \, \xi^{-\frac{1}{d}-1} \, d\xi \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \quad (157)$$

pa uvrsti li se ovo u jednadžbu 155, onda iz nje s obzirom na integracione granice u smislu jednadžbe 156, zatim zamjenom tih granica i jednostavnim kraćenjem izlazi:

$$y = \frac{A'}{b\,d} \int_{\frac{b}{x^d}}^{\infty} (1 + \xi)^{-c-1}\, d\xi \quad \dots \quad (158)$$

Odavde pak na način analogan onome pod 84 do 87 izlazi konačno funkcija:

$$y = \frac{a}{\left(1 + \frac{b}{x^d}\right)^c} \quad \dots \dots \quad (159)$$

koja se uz uslov $d = 1$ poklapa sa jednostavnijom funkcijom 88.

Na sličan način izlazi za općenitiji oblik funkcije 138 izraz:

$$y = \frac{a}{\left(1 + \frac{b}{x^d}\right)^c} - k \quad \dots \dots \quad (160)$$

koji uz uslov $d = 1$ prelazi natrag u funkciju 138.

Što se tiče izračunavanja parametara za predzadnju funkciju, ono je analogno onome kod funkcije 88, samo je naravski (s obzirom na veći njihov broj) sporije i mučnije nego za spomenutu jednostavniju funkciju. Zato je ali veća (i to mnogo veća) priljubljivost funkcije 159 uz dadene y - nizove, nego li je to slučaj kod funkcije 88.

Za spomenuti već primjer iznose parametri ove funkcije: a = 487·701.0464, b = 473·327.3355, d = 1·569.983.831, c = 1·338.810.808. Za izračunanje njihovo bilo mi je potrebno 5 ponovljenja — jamačno i s razloga što sam kod prvih 5 obračuna upotrebljavao logaritamske tabele samo sa 7 decimala, tako da mi kod tih 5 obračuna oštrina računanja nije bila dovoljna. U priloženoj tabeli 9 složeni su pregledno za nas ovdje najvažniji rezultati ovoga izjednačivanja. Prema iznosima 4. stupca ne dosiže diferencija H nigdje ni iznos od 9 cm. Prosječno su pak ovi rezultati slični onima iz tabele 8, dok je računski posao bio ondje, sve i kod većeg broja parametara (5), kud i kamo kraći i udobniji nego ovdje.

Tabela 9.

x_i	h_i	$a_0 A_i$	H_i
10	14	14·61	— 0·61
20	53	52·43	+ 0·57
30	100	99·84	+ 0·16
40	147	147·34	— 0·34
50	190	190·52	— 0·52
60	228	228·01	— 0·01
70	260	259·90	+ 0·10
80	287	286·80	+ 0·20
90	310	309·48	+ 0·52
100	329	328·66	+ 0·34
110	345	344·95	+ 0·05
120	358	358·86	— 0·86
130	370	370·82	— 0·82
140	381	381·15	— 0·15
150	391	390·14	+ 0·86

Tabela 10

x_i	h_i	$a_0 A_i$	H_i
—	—	—	—
20	13	13·18	— 0·18
30	28	27·75	+ 0·25
40	44	44·16	— 0·16
50	61	60·84	+ 0·16
60	77	76·95	+ 0·05
70	92	92·11	— 0·11
80	106	106·17	— 0·17
90	119	119·11	— 0·11
100	131	130·98	+ 0·02
110	142	141·84	+ 0·16
120	152	151·79	+ 0·21
130	161	160·91	+ 0·09
140	169	169·28	— 0·28
150	177	176·97	+ 0·03

U tabeli 10 donosim još rezultate izjednačivanja, što mi ga je za visinski niz V. Guttenbergovog stojbinskog razreda (vidi spomenuto djelo, str. 47), a na osnovi iznosâ a = 334·241.3228, b = 90·378.343.14, d = 1·126.763.791, c = 2·295.009.752 (po njemu i izračunanih) izveo bivši moj asistent g. Dr. N. Neidhardt. Kao što vidimo, ovdje diferencija H_i ne doseže nigdje ni iznos od 3 cm, što je ujedno znak, da su dotični Guttenbergovi y- iznosi bolje izjednačeni nego u prvom slučaju. Uporedimo li pak ove parametarske iznose sa predašnjima (za I. stojbinski razred), vidjet ćemo, da promjena stojbine utječe naravski na sve parametre, ali daleko najjače na parametar b.

Time dakako nije rečeno, da bi se svojstvo »indikatora stojbine« imalo da pripiše samo ovom parametru, jer sa stojbinskim prilikama stoje u vezi (kao što vidjesmo) sva 4 navedena parametra, a ne samo b. Svi su oni dakle, ako se izuzmu ispod upliva sastojinske gustoće (kao što bi to imao ovdje i da bude slučaj), karakteristični za samu stojbinu, pa prema tome kao indikator stojbine može najbolje da posluži zajednički jedan parametarski izraz, na jednak način sastavljen od sva 4 navedena parametra. Koji bi to mogao da bude izraz?

Iz prednjega izvoda počevši od jednadžbe 153 pa do jednadžbe 159 možemo lako da konstatujemo, od kojih je svesastavnih dijelova sastavljen parametar a iz ove posljednje jednadžbe. Potpuni izraz ovoga parametra glasi naime:

$$a = \frac{A'}{bcd} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (161)$$

a odovud obrnuto izlazi izraz:

$$A' = abcd \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (162)$$

t. j. multiplikacioni parametar jednadžbe 153, za koju vidjesmo da važi kao općenitiji oblik funkcije prirašćivanja. O identičnosti ovog multiplikacionog parametra sa produktom $abcd$ (nazovimo ga značajnijim nazivom »koeficijenat prirašćivanja«) možemo uostalom da se lako osvjedočimo i samom diferencijacijom jednadžbe 159.

Traženi zajednički parametarski izraz predstavljen je dakle po koeficijentu prirašćivanja, koji kao sinteza svih navedenih parametara predstavlja najbolje snagu prirašćivanja pod dadenim okolnostima. Njemu prema tome može svojstvo indikatora stojbine da pripadne bolje nego ikojem od navedena 4 parametra uzetá izolirano, a bolje i nego ikojem produktu od samo 2 ili 3 ova parametra, jer nijedan od ovih parcijalnih produkata ne može sam za sebe da bude bolji izražaj stojbinskih prilika, nego li je to produkt pod 162.

Iz prednjih računa izlazi, da koeficijenat prirašćivanja za V. Guttenbergov stojbinski razred iznosi okruglo 78118. Naprotiv on za I. stojbinski razred iznosi okruglo 485230, dakle nešto preko šest (točnije 6·2) puta više nego za V. razred. Kako se prema ovom koeficijentu odnosi — kao indikator stojbine — srednja sastojinska visina?

Ako pojedini h- iznos iz tabele 9 podijelimo sa pojedinim po starosti mu pripadnim h- iznosom iz tabele 10, onda za dotične kvocijente počevši od 20. pa do 150. godine starosti izlaze redom iznosi: 4·08, 3·57, 3·34, 3·11, 2·96, 2·83, 2·71, 2·61, 2·51, 2·43, 2·36, 2·30, 2·25, 2·21, dakle iznosi i varijabilni sa starošću i znatno manji od navedenog konstantnog iznosa 6·2. Osim toga može za pojedini A'- iznos da se po metodi najmanjih kvadrata izračuna i stepen nesigurnosti uvjetovan većom ili manjom nepravilnošću dadene (originalne) h- krivulje kao i pogreškama mjerenja, dok to kod bonitiranja s pomoću srednje sastojinske visine nije moguće.

Bonitiranje s pomoću prirasnog koeficijenta može dakle svakako da se označi pouzdanijim, a i naravnijim od bonitiranja s pomoću srednje sastojinske visine, varijabilne tokom vremena sve i kod nepromijenjenih stojbinskih prilika. U koliko bi se pak stojbinske prilike tokom vremena zaista bitno izmijenile, onda ta činjenica mora da se do izvjesne mjere odrazi i na visini spomenutog koeficijenta.

Praktična provedba ovakovog bonitiranja tražila bi za početak visinsku analizu izvjesnog broja najjačih stabala (radi izlučivanja upliva sastojinske gustoće), no ako bi se visine najjačih stabala mjerile povremeno i opetovano u osovnom stanju (uz uslov da im je ujedno poznata i starost), otpala bi potreba tih analiza.

Radi potrebe vrlo opsežnog računanja nije dakako upotrebivost funkcije 159 laka i račun po njoj brz, ali nam je zato dadena s njome mogućnost bonitiranja sasvim neprijepornog, dok se to za funkciju 91 ne može da rekne. Osim toga pri izračunavanju parametara s pomoću jednadžbe 94 ne izjednačuju se u suštini same visine (dotično sadržine), već tek njihove recipročne vrijednosti, što zapravo može kadšto da nam i ne konvenira.

Za bonitiranje može eventualno (radi skraćenja posla) da nam posluži i funkcija

$$y = \frac{ax^{d}}{b + x^{d}} \qquad (163)$$

koja iz funkcije 159 izlazi uz uslov $c = 1$. Ona je naravski od ove svoje osnovne funkcije mnogo praktičnija u upotrebi. Nešto je praktičnija i od funkcije 88, a bit će od ove u spomenutu svrhu bolja jamačno i s čisto teoretskog gledišta.

G.) LITERATURA

1. Breymann K.: Anleitung zur Waldwertrechnung sowie zur Berechnung des Holzzuwachses und nachhaltigen Ertrages der Wälder, Wien 1855.
2. Breymann K.: Anleitung zur Holzmesskunst, Waldertragsbestimmung und Waldwertberechnung, Wien 1868.
3. Riniker Hans: Ueber Baumform und Bestandesmasse, Aarau 1873.
4. Gyldenfeldt W.: Dr. I. P. Gram, Ueber die Konstruktion von Normal-Zuwachsübersichten (Zeitschrift für Forst- und Jagdwessen 1880, S. 240—246).
5. Piccioli Francesco: Anfangsgründe der endlichen Differenzen, Wien 1881.
6. Koller E. L.: Analytische Untersuchung über die Zuwachscurven (Oesterr. Vierteljahresschrift für Forstwesen 1886, S. 31—51, 132—140).
7. Endres Max: Ueber die mathematische Interpretation der Ertragstafelkurven (Allgem. Forst- und Jagdzeitung 1889, S. 88—93).

8. W e b e r R u d o l f: Lehrbuch der Forsteinrichtung mit besonderer Berücksichtigung der Zuwachsgesetze der Waldbäume, Berlin 1891.
9. W e b e r R.: Gesetzmässigkeit im Zuwachsgange der Waldbestände (Allgem. Forst- und Jagdzeitung 1893, S. 402—408).
10. S i v é n A l b e r t: Grundsätze zur Berechnung des Höhenwachstums der Nadelhölzer (Forstwissenschaftliches Centralblatt 1896, S. 91—94).
11. W e b e r R.: Ueber die Gesetzmässigkeit im Zuwachsgange einiger Holzarten auf Grund neuerer Ertragstafeln (Allgem. Forst- und Jagdzeitung 1897, S. 185—195; 1898, S. 1—14).
12. U r s t a d t K. F.: Kritische Betrachtung der Weberschen Formeln über die Wachstumsgesetze des Einzelstammes, Darmstadt 1906 (Dissertation).
13. U r s t a d t K. F.: Ueber die Theorie des Höhenwachstums der Waldbäume (Allgemeine Forst- und Jagdzeitung 1909, S. 225—238).
14. W i m m e n a u e r K.: Zur mathematischen Interpretation der Zuwachskurven (Allgemeine Forst- und Jagdzeitung 1909, S. 238—239).
15. G l a s e r T h e o d o r: Zur mathematischen Interpretation der Zuwachskurven (Allgemeine Forst- und Jagdzeitung 1911, S. 6—10, 48—53).
16. G u t t e n b e r g A.: Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge, Wien-Leipzig 1915.
17. T e r a z a k i W a t a r u: Notes on the analytical interpretation of growth curves for single tree and stands and on application for the construction of yield table for sugi (Extracts from the Bulletin of the Forest Experiment Station, Meguro, Tokyo, 1915, S. 151—202).
18. T i s c h e n d o r f W.: Gesetzmässigkeit des Höhen- und Stärkenzuwachses unserer Nadelhölzer während ihrer Vollkraft (Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1925, S. 69—90, 217—237).
19. T i s c h e n d o r f W.: Numerische Ausgleichung forstlicher Zuwachskurven insbesondere bei der Aufstellung von Ertragstafeln (Forstwissenschaftliches Centralblatt 1926, S. 349—360, 383—390).
20. Y o s h i d a M.: Untersuchungen über die Zuwachskurve eines Stammes und Bestandes im gleichaltrigen reinen Walde (Mitteilungen der kaiserl. Universität zu Tokyo 5—1928. Referat von Prof. N i i j i m a in »Forstliche Rundschau« 1929, S. 90).
21. K ö v e s s i F r.: Die die aperiodisch gedämpfte harmonische Schwingungsbewegung darstellende Kurve (Erdészeti Kisérletek 1929, S. 265 bis 299, Deutsches Referat).
22. K ö v e s s i F r.: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen (Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Band 36 ff., Budapest 1929, S. 29—98).
23. P e t t e r s o n H.: Bonität und Produktion (Verhandlungen des Internationalen Kongresses forstlicher Versuchsanstalten, Stockholm 1929, S. 287—291).
24. L e v a k o v i ć A.: Jedna nova jednadžba rastenja. Prethodno saopćenje u »Spomenici o 150-godišnjici drž. gimnazije u Vinkovcima« 1930, str. 120—128 (Eine neue Wachstumsgleichung. Vorläufige Mitteilung. Gedenkbuch anlässlich der Jubelfeier des 150-jährigen Bestehens des kgl. Obergymnasiums in Vinkovci, 1930, S. 120—128).
25. R o b e r t s o n T. B.: On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance (Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen, 25. Band, 1908, S. 581 ff.)
26. E n r i q u e s P.: Wachstum und seine analytische Darstellung. Biologisches Centralblatt, 29. Bd, 1909, S. 331 ff).
27. F r i e d e n t h a l H.: Experimentelle Prüfung der bisher aufgestellten Wachstumsgesetze (Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin, 1910, S. 93—98).

28. Schuepp O.: Wachstum und Formwechsel des Sprossvegetationspunktes der Angiospermen (Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft, Bd 32, 1914, S. 328—339).
29. Mitscherlich E. A.: Das Gesetz des Pflanzenwachstums (Landwirtschaftliche Jahrbücher, 53. Bd, 1919, S. 167 ff).
30. Mitscherlich E. A.: Ein Beitrag zum Gesetze des Pflanzenwachstums (Fühlings Landwirtschaftliche Zeitung 1919, S. 130—133).
31. Mitscherlich E. A.: Zum Gesetze des Pflanzenwachstums (Fühlings Landwirtschaftliche Zeitung 1919, S. 419 ff).
32. Rippel A.: Die Wachstumskurve (Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft, Bd. 37, 1919, S. 169 ff).
33. Rippel A.: Die Wachstumskurve der Pflanzen und ihre mathematische Behandlung durch Robertson und Mitscherlich (Fühlings Landwirtschaftliche Zeitung 1919, S. 201 ff).
34. Baule B.: Prinzipielle Ueberlegungen zum Wachstumsgesetze der Pflanzen (Landwirtschaftliche Jahrbücher, 54. Bd, 1920, S. 493 ff).
35. Baule B.: Wirkungsgesetz und Wachstumsgesetz (Landwirtschaftliche Jahrbücher, 59. Bd. 1924, S. 341 ff).
36. Brody Sam: Growth and development with special reference to domestic animals (University of Missouri, College of Agriculture, Research bulletin 97, Columbia 1927).
37. Willcox O. W.: Principles of agrobiology or the laws of plant growth in relation to crop production, New York 1930.
38. Czuber Em.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2. Bd, Leipzig — Berlin 1921.

H) ZUSAMMENFASSUNG.

A.) Die Höhe, die Stärke sowie auch die Holzmasse eines Waldbaumes oder durchschnittlich auch eines Waldbestandes nimmt im Laufe der Zeit zu (sie wächst), ausser natürlich während der sogen. Nacht- und Winterpausen. Dieser Wachstumsprozess dauert bekanntlich so lange, als (bezüglich der einzelnen Individuen) äussere und innere Bedingungen dafür bestehen, d. h. in erster Linie die Vollständigkeit und Lebensfähigkeit aller diesbezüglich wichtigen Baumorgane. Eine jede der genannten wachsenden Grössen (wir wollen sie alle kürzlich als »primäre Grössen« bezeichnen) erscheint mit Rücksicht darauf als eine gewisse, jedenfalls aber stetige (kontinuierliche) Funktion der Zeit (Gleichung 1). Stetig muss diese Funktion aus dem Grunde sein, weil das physiologische Wachsen nicht zu den Prozessen gehören kann, die, an sich, ganz schroffen Aenderungen und scharfeckigen Sprüngen unterworfen wären.

Natürlich wird dieselbe Eigenschaft auch auf den innerhalb je eines konstant genommenen Zeitabschnittes erfolgenden Zuwachs übertragen (Gleichung 2). Nur besteht hierbei zwischen der primären Grösse als Zeitfunktion und ihrem Zuwachse als ebenfalls Zeitfunktion ein Unterschied insoferne, als die primäre Grösse eine ursprüngliche Funktion der Zeit ist, während der Zuwachs zu sogen. derivierten (abgeleiteten)

Zeitfunktionen gehört und in Form eines Quotienten ausgedrückt wird.

Im ursprünglichen Sinne des Wortes ist eigentlich der Zuwachs kein Quotient, sondern eine ganz gewöhnliche Differenz (Gleichung 3) zwischen dem Betrage y_1 am Anfange und dem Betrage y_2 am Ende einer sogen. Zuwachsperiode, die natürlich von ganz beliebiger Dauer sein kann, auch von unendlich kurzer selbstverständlich. In diesem Falle muss dann natürlich auch der betreffende Zuwachsbetrag unter jedes Maass herabsinken und müssen wir uns daher, wenn es sich um eine Aufnahme des Zuwachses überhaupt handelt, auf endliche Zeitintervalle beschränken.

Mit Rücksicht auf gewisse (bekannte) Umstände kommt nun bei Bäumen und Beständen als der kleinste, noch irgendwie ermittelbare Zuwachsbetrag in der Regel nur der volle Jahreszuwachs in Betracht. Demzufolge gilt auch eine volle Jahresperiode in der Regel als die kleinste den Zuwachs einbeziehende Zeitspanne. Meist wird jedoch aus bekannten wohlberechtigten Gründen (sowohl technischen als auch wirtschaftlichen) auch diese Zeitspanne als eigentlich von ungenügender Länge erachtet und sind wir daher in der Regel genötigt, auch den ganzen Jahreszuwachsbetrag nicht direkt für sich allein, sondern aus dem mehrjährigen, meist zehnjährigen Zuwachsbetrage d u r c h s c h n i t t s w e i s e (nach Gleichung 4) zu ermitteln. Die praktische Durchführung der Jahreszuwachsermittlung kennt also in bezug auf Bäume und Bestände fast überhaupt nicht die Gleichung 3, sondern fast nur die Gleichung 4 und somit auch Zeitperioden von der Dauer jedenfalls bedeutend längerer als 1 Jahr.

Nichtsdestoweniger, wenn es sich um den G a n g des Zuwachses nach Gleichung 2 handelt, können wir nicht umhin, als die den Zuwachs einbeziehenden Zeitintervalle auf unendlich kleine Beträge (*dx*, d. h. Zeitdifferentiale) herabzudrücken. Dadurch übergeht nun die Gleichung 4 in die bekannte Gleichung 5, d. h. in die detailisierte Form der Gleichung 2. Der in Gleichung 5 enthaltene Quotient — der sogen. Differentialquotient (Derivation) der primären Funktion — obwohl nun aus zwei unendlich kleinen Beträgen bestehend, ist jedoch imstande, den Jahreszuwachsbetrag (als eine endliche Grösse) tatsächlich wiederzugeben, nur natürlich in umgekehrter Weise, als es bei der Gleichung 4 der Fall ist. Nach Gleichung 4 erscheint nämlich der einjährige Zuwachs als Folge des Wachstums, welches vielfach länger dauert als 1 Jahr, nach Gleichung 5 dagegen erscheint er als Folge des Wachstums nur innerhalb je eines unendlich kurzen Zeitabschnittes. Im ersten Falle daher bleibt der rechnungsmässige Jahreszuwachsbetrag während eines mehrjährigen Zeitabschnittes konstant, in zweiten dagegen erscheint er, selbst auch innerhalb ein und desselben Jahres, als sehr unbeständig, je nach der Intensität bezw. nach dem Bestehen oder Nichtbestehen des Zuwachses im einzelnen Zeitdifferentiale.

Der einjährige Zuwachsbetrag nach Gleichung 5 erscheint demnach als der auf die Zeiteinheit (1 Jahr) umgerechnete bzw. erhöhte Betrag desjenigen Zuwachsquantums, welches produziert wurde in einem Zeitdifferentiale und erfolgte (mit Rücksicht auf dessen unendliche Kürze) genau in demjenigen Zeitpunkte (x), nach welchem das betreffende Zeitdifferential eben folgt. Dieser umrechnungsweise entstehende (oder besser als entstehend gedachte) Jahreszuwachsbetrag ändert sich also unaufhörlich, er läuft ohne Unterbrechung (stetig) und passt ihm daher am besten die Bezeichnung »laufend-jährlicher stetiger Zuwachs« zum Unterschiede vom »laufend-jährlichen unstetigen Zuwachs«, der sich nur von Jahr zu Jahr ändert und bekannt ist unter dem Namen »laufend-jährlicher Zuwachs«. Der einfache mathematische Ausdruck dieses letzteren ist in der Gleichung 3 enthalten, seinen analytischen Ausdruck dagegen enthält die aus der Gleichung 5 sich ergebende Gleichung 6 (mit x_1 und x_2 als den das einzelne Lebensjahr einschliessenden Zeitgrenzen).

Obwohl nun, wie gesagt, die wirkliche »Wachstumskurve« nicht unstetig sein kann, so zeigt sie jedoch solche Eigenschaften, dass sie in allen ihren Details durchaus nicht durch einen (welchen auch immer) analytischen Ausdruck erfasst werden kann, uzw. aus folgenden Gründen: 1.) Wegen der Nacht- und Winterpausen hat die wirkliche Wachstumskurve eigentlich eine stufenförmige Form, indem sie aus zwei Kategorien von Stufen (Tagesstufen und Jahresstufen) besteht, deren Ecken abgerundet und die aufgerichteten Bindelinien geneigt und kurvenförmig sind. 2.) Sowohl die Höhen und Breiten dieser Stufen als auch die Bindelinienformen stehen unter dem Einflusse einer ganz enormen Menge von inneren und äusseren Faktoren, die sich mit der Zeit auch vielfach ändern. Dies bringt es nun mit sich, dass die Stufenhöhen und die Stufenbreiten ebenso wie die Bindelinienformen, alle äusserst unbeständig, nicht im mindesten durch irgend eine mathematische Regel erfasst werden können.

Aus diesen Gründen, sowie auch mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Messungsfehler, deren Wirkung ähnliche Folgen hervorruft, kann selbstverständlich von einer Aufstellung der wahren Wachstumsfunktion nicht überhaupt Rede sein. Und doch sind wir nun in bezug auf die analytische Wachstumsdefinition nicht gänzlich macht- und hilflos. Vom wirtschaftlichen Standpunkte aus sind wir übrigens auch nicht gar interessiert eben an der Kenntnis der wirklichen Entwicklung und dazu auch eines jeden Individuums sowie auch in ganz kurzen

Intervallen. Was uns hier eigentlich interessiert, ist die durchschnittliche Entwicklung innerhalb grösserer Gruppen von Individuen als auch nach Jahresdurchschnitten innerhalb der Zeitintervalle, die ein Jahr vielfach übertreffen. Und diese Entwicklung, wie es die Erfahrung lehrt, lässt sich schon darstellen durch eine bereits ziemlich einfache y - Kurve, z. B. diejenige, die unter der Bezeichnung Sl. 1. abgebildet ist und das durchschnittliche Höhenwachstum der Fichte an den besten Standortsbonitäten sowie bis zum 150. Jahre darstellt. Die aus dieser Wachstums-Kurve sich ergebende Zuwachs-Kurve ist an derselben Abbildung mit y' bezeichnet. Sie zeigt, wie ersichtlich, eine Kulmination mit zwei entgegengesetzten Wendepunkten und was namentlich hier charakteristisch ist, das ist die Asymmetrie der Kurve zur Maximalordinate. Der letzte Kurvenpunkt ist noch ziemlich entfernt von der Abszissenaxe, was nun bezeigen sollte, dass in diesem Falle die Höhenentwicklung bis zum 150. Jahre noch eine verhältnissmässig ganz ziemliche ist. Nachdem nun doch einmal die Absterbezeit kommen muss, so muss natürlich auch die Zuwachskurve zulezt doch ganz in die Abscissenaxe herabsinken. Nur ist hier, wie ersichtlich, dieser Zeitpunkt noch gar sehr entfernt.

Die Wachstums- und Zuwachskurven der Holzmasse sind bekanntlich den unter der Bezeichnung Sl. 1. abgebildeten Kurven ganz analog gebaut. Was nun die Wachstums- bzw. Zuwachskurven der Stärke anbelangt, so ist hier eine Unterscheidung je nach der Schaftstelle notwendig, an welcher die Baumstärke gemessen wird. Wird diese nicht eben im Bodenniveau gemessen, so ist die Wachstums- bezw. Zuwachskurve nicht ganz vollständig, indem sie sich nicht eben auf das ganze bisherige Baumleben (auch auf dessen früheste Jugend) bezieht. Bekanntlich zeigt jedoch auch sie nach demjenigen Alter, in welchem der Baum die betreffende Messpunktshöhe eben erreicht, volle Analogie mit der Wachstums- bzw. Zuwachskurve der Höhe und der Holzmasse, mit Ausnahme natürlich nur des allerersten Anfanges dieser zwei Arten vollständiger Kurven. Und eben diese Ausnahme bringt es nun mit sich, dass das für das Wachsen der Höhe und der Holzmasse in Betracht kommende analytische Gesetz nicht ohne gewissen Modifikationsvorgang auf das Wachstum der Stärke übertragen werden darf. Ueber diese Modifikation wird am Ende der vorliegenden Studie noch speziell Rede sein, vorderhand aber beschränke ich mich bei den Untersuchungen über die analytische Form des Wachstumsgesetzes nur auf das Wachsen und Zuwachsen der Höhe und der Holzmasse.

Es besteht schon eine ganz ziemliche Anzahl von Publikationen (nicht nur forstlichen Herkommens), die sich mehr oder weniger mit der analytischen Definition der Wachstums- und

Zuwachskurven befassen. Die Forstleute dürften hierbei einen grossen zeitlichen Vorsprung vor den Vertretern anderer Fächer haben, da sie ja (nach Breymann, siehe Nr. 1, S. 60 ff) das vorgelegte Problem bereits etwa vor 100 Jahren ins Auge fassten. In neuerer Zeit befassen sich hiermit auch die Landwirte und sogar auch die Biologen von Fach. Auch ich publizierte hierüber im Jahre 1930 eine kleine Mitteilung vorläufigen Charakters (Nr. 24), wo ich eine »Wachstumsgleichung« veröffentlichte (ohne Herleitung jedoch) und bezüglich ihrer Anschmiegsamkeit an eine konkrete Wachstumsreihe demonstrierte. Jetzt aber will ich die analytische Form des Wachstumsgesetzes von Grund aus behandeln, wobei ich nicht umhin kann, auch ein anderes, seit langem bereits bekanntes, mit dem meinigen jedoch in einer gewissen verwandschaftlichen Beziehung stehendes Zuwachs- und Wachstumsgesetz, theoretisch wenigstens, zu behandeln.

B.) I. 1. Die Wachstumskurve ist, wie gesehen, bedeutend einfacher gestaltet als die Zuwachskurve und haben wir doch für die selbstständige Herleitung ihrer Gleichung keine einzige einwandfreie Stütze. Die Zuwachsgleichung dagegen lässt sich herleiten ganz für sich allein, uzw. aus der Tatsache, dass die Zuwachskurve sowohl einen A u s g a n g s-Punkt a u s der Abszissenaxe hat (im Ursprunge selbst) als auch, entsprechend dem Lebensende der Individuengruppe, einen R ü c k k e h r-Punkt i n dieselbe. Diese Tatsache hat nämlich eine andere wichtige Tatsache zur Folge, d. h. dass alle — theoretisch überhaupt möglichen — ersten Derivationen der Zuwachskurve (Gleichung 7), die sich vom linken Kurvenende bis zum Kulminationspunkte aneinander anschliessen, p o s i t i v bezeichnet sind, alle übrigen dagegen (von da ab bis zum Punkte der Kurvenrückkehr in die Abszissenaxe) n e g a t i v e Vorzeichen haben. Gilt dies nun für die Differential-Q u o t i e n t e n der Kurve, so muss natürlich gelten auch für ihre Differentiale selbst (dy'), da alle — einander selbstverständlich gleiche — Differentiale der Zeit nur positiv sein können. Nachdem aber die Summe aller positiven Kurvendifferentiale gleich sein muss der Summe aller negativen Differentiale dieser selben Kurve, indem nämlich jede der beiden Summen gleich ist der Maximalordinate, so muss die Summe beider dieser Partialsummen gänzlich verschwinden. Bezeichnet man also die einzelnen einander unendlich naheliegenden Kurvenordinaten vom linken bis zum rechtem Ende vorgehend mit $y_1', y_2', \ldots . y_n'$, so folgt aus dem Gesagten unmittelbar die Gleichung 8 und aus dieser auch die mit ihr vollkommen identische Gleichung 8-a, wo p irgendwelche reelle und endliche (positive oder negative, ganze oder gebrochene) Zahl sein kann, die Null mit eingeschlossen.

Beide diese Gleichungen gelten unbedingt für jede Kurve, die sowohl aus der Abszissenaxe herauskommt als auch in dieselbe wieder zurückkehrt, gleichwohl ob nun die Kurve zur Maximalordinate symmetrisch oder asymmetrisch liegt und ob sich diese Ordinate eben in der Ordinatenaxe befindet oder irgendwo anders. Wir wollen vorläufig supponieren: 1.) dass die Kurve symmetrisch liegt zur Maximalordinate; 2.) dass sich diese Ordinate eben in der Ordinatenaxe befindet. Dementsprechend wollen wir der Gleichung 8-a die Bedingung auferlegen, dass alle ihre quotientartig angeschriebenen Einzelausdrücke einander gleich werden, d. h. dass ein jeder derselben, allgemein (indexlos) ausgedrückt, gleich werde (nach Gleichung 9) einem von Null verschiedenen, endlichen und konstanten Betrage k. In diesem Falle folgt aus der Gleichung 8-a ganz unmittelbar die Gleichung 10, die natürlich auch volle Geltung hat im Falle der zur Ordinatenaxe eben symmetrischen Funktionen. Führt man in die Gleichung 9 den Ausdruck 11 ein, so folgt aus ihr die Gleichung 12, wo r im Sinne der für p gemachten Einschränkungen irgend einen reellen und von Null verschiedenen Betrag annehmen kann. Wir wollen jedoch für r nur endliche Beträge voraussetzen. Wird nun die Gleichung 12 integriert, so folgt aus ihr nach einigen einfachen Umformungen die Gleichung 13 mit c als Integrationskonstante. Für diese setzen wir ebenfalls voraus, dass sie nur reelle, endliche und von Null verschiedene Werte annimmt.

Wie gesehen, alle drei Parameter der Gleichung 13 haben also noch unbestimmte Vorzeichen, woraus man nun a priori schliessen könnte, dass diesbezüglich verschiedene Kombinationen möglich seien. Nachdem jedoch y' offenbar nur positiv sein kann, so zeigt uns der erste Multiplikationsfaktor der Gleichung an, dass im Falle eines positiven r ebensowohl auch c nur positiv, im konträren Falle dagegen auch c nur negativ sein kann. Wir nehmen hier bloss den ersten Fall an, d. h. positive Werte für beide diese Parameter. Nimmt man jetzt für x den Betrag Null an, so folgt aus 13 die Gleichung 14, d. h. ein Betrag, der im Sinne unserer beiden Hauptsuppositionen grösser sein muss als irgend ein anderer y' - Betrag. Daraus folgt nun weiters (mit Rücksicht auf Gleichung 13), dass k jedenfalls negativ sein muss. Unter dieser Bedingung und mit Rücksicht auf die Substitutionsgleichungen 15 gelangt man schliesslich zur ganz einfachen Gleichung 16, wonach sich x bewegen kann zwischen endlichen und gleichen Grenzwerten $-g$ und $+g$, während gleichzeitig y' zweimal alle möglichen Werte zwischen Null und a annimmt.

Dies wäre nun die gesuchte Zuwachsfunktion, wenn die Zuwachskurve symmetrisch wäre zur Maximalordinate, was jedoch (wie gesehen) nicht der Fall ist. Der Umstand, dass die Maximalordinate dieser Funktion sich eben in der Ordinatenaxe befindet, ist ganz nebensächlich mit Rücksicht auf die sehr leichte Umformungsmöglichkeit dieser Funktion unter Annahme einer neuen, linksseitig stehenden Ordinatenaxe, uzw. in der Entfernung g von der ursprünglichen. Die Gleichung 16 ist also nicht das, was wir tatsächlich erstreben, sie gibt uns jedoch eine feste Stütze für die Erreichung des Zieles, d. h. für die deduktive Aufstellung einer wirklich asymmetrischen Funktion. Sie kann nämlich auch in der Form 16-a angeschrieben werden, die nach gewissen ganz unbedeutenden Aenderungen bezüglich der Parameter die allgemeinere Form 17 annimmt. Allgemeiner ist diese letztere insoferne, als sie gleich fähig ist für die Charakterisierung sowohl der asymmetrischen als auch der symmetrischen Kurven. Prinzipiell gilt sie nämlich für asymmetrische Kurven, kann dabei jedoch auch an symmetrische Kurven angewendet werden, wobei dann selbstverständlich jeder Unterschied zwischen gleichnamigen Parametern der beiden binomischen Ausdrücke ganz von selbst verschwindet.

Die Richtung und der Grad der Asymmetrie sowie auch die Lage der Maximalordinate im Koordinatensystem kann nach Gleichung 17 sehr variieren — je nach konkreten Parameterwerten, die jedoch, den bisherigen Voraussetzungen gemäss, alle positiv sein müssen.

Die Funktion 16 enthält, wie gesehen, das Prinzip der Koinzidenz zwischen der Maximalordinate und der Ordinatenaxe. Obwohl nun die Funktion 17, wie gesagt, auch eine andere Lage der Maximalordinate im Koordinatensystem prinzipiell zulässt (je nach konkreten Parameterwerten), so wollen wir doch auch für sie dasselbe Koinzidenzprinzip annehmen, da sie nur unter dieser Bedingung ganz beliebige nachträgliche Umformungen zulässt. Vor jeder Umformung dieser Funktion muss sie somit, prinzipiell genommen, die gesagte Kardinaleigenschaft besitzen, dass sich nämlich ihr Kulminationspunkt eben in der Ordinatenaxe befindet. Was ist jedoch daraus zu folgern bezüglich ihrer Parameterbeträge? Um darauf eine Antwort zu bekommen, müssen wir vorerst den allgemeinen Ausdruck für die Abszisse ihres Kulminationspunktes festsetzen, d. h. wir müssen die Funktion nach x differenzieren, sodann diesen Differentialquotienten gleich Null setzen und die auf diese Weise erhaltene Gleichung nach x auflösen. Nach Anwendung dieser Regel auf die Funktion 17 erscheint für x (als einzige Lösung) die Gleichung 18. Wird jetzt $x = o$ gesetzt, so resultiert aus 18 die Gleichung 19 und daraus weiter die Gleichung 20.

Wenn also der Kulminationspunkt der Funktion 17 sich eben in der Ordinatenaxe bedinden soll ($x = o$), so müssen ihre Grenz- und Exponentparameter die Proportionalitätsgleichung

20 bilden. Mit Hilfe dieser normalen Beziehung zwischen den gesagten Parametern sind wir nun in der Lage, schon durch blossen Anblick der Funktion 17 (uzw. auf Grund der gegebenen, bekannten, Beträge für beide Grenzparameter) leicht zu beurteilen, welcher der beiden Kurvenäste länger bezw. kürzer sein muss: ob der linksseitige (der auf die linke Seite der Ordinatenaxe kommende) oder der rechtsseitige. Umgekehrt, schon nach der Form der y'- Kurve auf Abbildung 1 sind wir in der Lage zu konstatieren, dass bei den Zuwachskurven (wenn bei ihnen die Ordinatenaxe eben auf den Kulminationspunkt hingelegt wäre) $g_2 > g_1$ sein sollte und demzufolge, proportionsgemäss, auch $r_2 > r_1$.

Nehmen wir beispielsweise für die Parameter der Funktion 17 die Beträge an: $a = 100$, $r_1 = 2$, $g_1 = 4$, $r_2 = 5$, $g_2 = 10$. In der beigelegten Tabelle 1 sind nun einige Koordinatenpaare derselben Funktion zusammengestellt, während die Abbildung 2 (Sl. 2) den zugehörigen Kurvenverlauf zur Anschauung bringt.

Die Funktionen 16 und 17 wurden schon von K. Pearson aufgestellt (im J. 1895), jedoch zu ganz anderen Zwecken, auf einer ganz anderen Grundlage und demzufolge auch mit Hilfe ganz anderartiger Herleitung. Czuber bringt dieselben samt Herleitungen auf S. 25—29 eines seiner bekannten Werke (Nr. 38).

Die Gleichung 21 repräsentiert nun die erste Stufe für die Umformung der Funktion 17 mit Zuhilfenahme der im Abstande g_1 linksstehenden neuen Ordinatenaxe Y_2' (Abbildung 2). Nach einigen einfachen Operationen ergibt sich hieraus die Gleichung 22 und aus dieser, mit Hilfe der Substitutionsgleichungen 23, schliesslich die Gleichung 24. Dies wäre prinzipiell die gesuchte Zuwachsfunktion, deren Parameter (dem ganzen Herleitungsgange gemäss) alle natürlich positiv sein müssen. Aus ihr ergibt sich gleich auf den ersten Blick, dass $y' = o$ sein muss nicht nur bei der Abszisse Null, sondern auch bei der Abszisse C. Das Zeitgebiet von O bis C schliesst also alle charakteristischen Entwicklungserscheinungen in sich ein. Selbstverständlich lässt diese Gleichung, ganz formell genommen, auch Abszissenbeträge grössere als C und sogar auch negative x- Werte zu. Jedoch können diese nicht hier in Betracht kommen, da wir hier nur die Ordinaten zwischen O und C ins Auge nehmen. Auch wären übrigens die diesen für uns sinnlosen Abszissenwerten entsprechenden Ordinaten, wie es schon Czuber (und sicherlich auch Pearson) bezüglich der Gleichung 17 hervorgehoben hat, meist imaginär, in Anbetracht dessen dass die beiden in der Gleichung auftretenden Exponenten zumeist gebrochene Zahlen sein müssen.

B.) I. 2. Der Raumersparnis halber muss ich den die analytische Verifikation der Gleichung 24 betreffenden Haupttextinhalt nur ganz summarisch resümieren. Es wird dort analytisch nachgewiesen, dass die Kurve 24 alle charakteristischen Eigenschaften einer beliebigen (durchschnittlich jedoch genommenen) Zuwachskurve besitzt. Namentlich wird nachgewiesen: 1) dass die gesagte Kurve fähig ist, aus dem Koordinatenursprunge unter verschiedensten Winkeln bezw. Richtungen auszugehen: sowohl unter dem Winkel *O*, d. h. tangential an die Abszissenaxe, als auch unter grösseren und selbst bis zu 90 Grad aufsteigenden Winkeln, wobei jedoch dieser letztere Fall, obwohl von der Gleichung noch zugelassen, beim Zuwachse eigentlich nicht in Rücksicht kommen kann; 2.) dass sich dieselbe Kurve (ebenso wie alle wirklichen Zuwachskurven) an ihrem rechten Ende nur tangential an die Abszissenaxe anschliesst; 3.) dass sie innerhalb des besagten Gebietes nur ein einziges Maximum besitzen kann, uzw. bei der durch die Gleichung 26 ausgedrückten Abszisse; 4.) dass sie ausserhalb der Abszissenaxe und zugleich rechts von der Ordinatenaxe nur zwei Wendepunkte haben kann, uzw. bei den durch die Gleichung 28 ausgedrückten Abszissen.

B.) I. 3. Die Gleichung 24 besitzt, wie gesehen, einen Parameter (*C*), der die obere Zeitgrenze der Zuwachsaktivität angibt d. h. das Alter, welches die Waldbäume (nach Maassgabe ihres bis zu einem gewissen Zeitpunkte eben noch beobachteten Entwicklungsganges) wahrscheinlich noch erleben können. Auf Grund einer konkreten Reihe von Zuwachsbeträgen versuchte ich nun beiläufig zu bestimmen, bis zu welchem Betrage der erwähnte Parameter überhaupt ansteigen kann. Zu diesem Behufe muss man bekanntlich wenigstens 4 verschiedene Koordinatenpaare kennen, da die Gleichung 24 vier Parameter enthält, die (als vorläufige Unbekannten) ermittelt bezw. ausgerechnet werden können nur mit Hilfe von wenigstens 4 Gleichungen mit bereits bekannten Koordinatenpaaren. Viel sicherer fällt diese Berechnung selbstverständlich aus, wenn sie nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt wird, natürlich auf Grund einer grösseren Anzahl von Koordinatenpaaren, als in der Gleichung eben Parameter enthalten sind. Doch ist dieses exakte Verfahren selbst in den leichtesten Fällen wesentlich langwieriger, hier aber, wo wir es mit nichtlinearer Gleichung zu tun haben, ist es noch ganz unvergleichlich langwieriger. Anderseits mir handelte es sich hier nicht gar um volle Exaktheit, sondern bloss um eine eben noch erträgliche Approximation. Es war ausserdem nur die gesagte Zeitgrenze, die mich hier interessierte, nicht aber auch die übrigen Gleichungsparameter. Ich wendete also die einfachere und rascher zum Ziele führende Methode der teilweisen Auflösung von 4 Bestimmungsgleichungen an. Der Weg nun, welcher zur Formel für die Berechnung von C führt, ist bezeichnet durch die Gleichungen 29—34. Die betreffende, nicht geschlossene Formel für die Berechnung von C ist in der Gleichung 34 enthalten, aus welcher sich C nur durch schrittweises Probieren mit verschiedenen dafür im vorhinein angenommenen Werten ermitteln lässt. Als beste Lösung gilt sodann derjenige C- Betrag, für welchen sich der linksseitige, als $F(C)$ erscheinende, also veränderliche Teil der Gleichung am meisten nähert dem rechtsseitigen (konstanten) Gleichungsteile. Selbstverständlich können wir uns auf diese Weise demjenigen C- Werte, der den gegebenen Koordinatenpaaren vollkommen streng entspricht, mit einer ganz beliebigen, selbst auch äussersten Genauigkeit nähern, sofern dazu in rein technischer Hinsicht überhaupt Möglichkeit besteht.

Auf diese Weise erledigte ich nun die C- Berechnung mit Hilfe gewisser Koordinatenwerte, die sich mittelbar aus den Angaben der Tabelle 2 ergeben. Diese Angaben stammen von Prof. Guttenberg her (Nr. 16, S. 45) und beziehen sich auf den Wachstumsgang der mittleren Bestandeshöhe für die Fichtenbestände der I. Standortsbonität in Tirol, uzw. in Decimetern ausgedrückt und innerhalb der Altersgrenzen vom 10. bis zum 150. Jahre. Graphisch wurde dieser Wachstumsgang dargestellt durch die y- Kurve der Abbildung 1. Die Differenzen dieser aufeinander folgenden y- Beträge, nach Formel 4 je durch 10 geteilt und (dem allgemeinen Gebrauche gemäss) den betreffenden Periodenmitten als Abszissen zugewiesen, als wenn erfolgten sie eben in diesen Mitten, sind (in Centimetern) enthalten in der Tabelle 3. Diese Reihe von Zuwachswerten sollte eigentlich (im Sinne der Gleichung 4) mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezeichnet werden, nicht aber (wie hier) mit y'; doch ist dies ganz nebensächlich in Anbetracht des Umstandes, dass sie hier (in völliger Ermangelung einer besseren) doch faktisch die y'- Reihe nach Gleichung 24 repräsentieren soll.

Aus dieser empirischen Reihe von Zuwachsbeträgen nahm ich nun für die gesagte Berechnung diejenigen heraus, die den Abszissen 5, 55, 95, 145 entsprechen. Dieselben sind nämlich auf das ganze vom 5. bis 145. Jahre reichende Zeitgebiet derart verteilt, dass man daraus schon mit einer ganz ziemlichen Berechtigung eine genügende Genauigkeit des (mit Hilfe von nur 4 Koordinatenpaaren) errechneten C- Betrages erwarten darf. Die für die Rechnung notwendigen Logarithmen entnahm ich den 10-stelligen Logarithmentafeln von Vega (Vega Georg: Thesaurus logarithmorum completus, Leipzig 1794). Die Präzision dieser Tafeln nützte ich, wo es eben notwendig war (bei Interpolationen), bis zur äussersten Grenze aus. Der konstante Ausdruck auf der rechten Gleichungsseite beträgt nun nach dieser Rechnung 0.529.562. Obwohl ich mit einer viel grösseren Anzahl von Decimalen rechnete, führe ich hier nur deren sechs an, da (wie wir gleich sehen werden) eine grössere Anzahl derselben hier auch nicht notwendig ist.

Der richtige *C*- Betrag kann somit, praktisch genommen, nur derjenige sein, der — in den linksseitigen variablen *F (C)*-Ausdruck eingeführt — für diesen letzteren den eben angeführten Betrag 0.529.562 ergibt. In den eben erwähnten variablen Ausdruck führte ich nun nacheinander die sieben in der Tabelle 4 angegebenen *C*- Werte ein. Die entsprechenden *F(C)*- Werte, ebenfalls in der Tabelle angeführt, zeigen nun mit anwachsenden *C*- Werten jedenfalls auch eine Zunahme, jedoch eine äusserst langsame. Obwohl der letzte *C*- Betrag bereits die astronomische Zahl von 100 Milliarden von Jahren überschritten hat, hält sich der ihm entsprechende *F(C)*- Betrag noch gar sehr weit unter der angegebenen konstanten Zahl. Offenbar zeigt also *F(C)* die Tendenz an, sich dieser konstanten Zahl erst in der Unendlichkeit vollkommen zu nähern. So sollte denn das Alter, bis zu welchem — dem angegebenen Zuwachsgange gemäss — die Fichtenstämme an der gesagten Bonität durchschnittlich noch leben und wachsen könnten, sich eigentlich in die Unendlichkeit erstrecken. Dies kommt übrigens auch schon aus der graphischen Darstellung desselben Zuwachsganges heraus, wie es die darnach konstruierte y'- Kurve (Abbildung 1) zeigt. Bei ihrem rechten Ende zeigt sie nämlich schon eine zur Abszissenaxe beinahe parallele Richtung an, obwohl nicht einmal das Alter von 150 Jahren noch überschritten ist. Sofern mir bekannt, ähnlich stehen die Verhältnisse bei allen aus neueren Ertragstafeln resultierenden Zuwachskurven.

Wie verträgt sich jedoch dies mit der bekannten Tatsache, dass die grosse Mehrzahl von bestandbildenden Bäumen aufhört zu wachsen und abstirbt sogar sehr früh und dass auch die übrigen Individuen nicht länger leben und wachsen können als höchstens ein halbes bis ein ganzes Jahrtausend oder vielleicht auch noch etwas mehr (dies jedoch bei anderen, noch länger lebensfähigen Holzarten). Die Erklärung scheint nicht schwer zu sein. Die Ertragstafelkurven geben bekanntlich den d u r c h s c h n i t t l i c h e n Entwicklungsgang an uzw. nur bis zum Alter, in welchem die Bestände verhältnissmässig noch ein ziemlich gutes Gedeihen zeigen. Ihr Zuwachs in diesem Alter, obwohl nun schon weit unter demjenigen, den sie zur Zeit ihrer besten Entwicklung zeigen, ist ja immerhin noch ein solcher, a l s o b der Bestand — dem ganzen Gange seiner bisherigen Entwicklung gemäss — noch eben bis in die Ewigkeit leben und wachsen werde. Doch die Altersschwäche, die nachher fortwährend und immer mehr Platz greift, übt auf den Entwicklungsgang nicht nur direkten Einfluss aus, sondern auch insoferne, als sie unvermeidlich und immer mehr von Erkrankungen aller Art begleitet wird, die nun zuletzt den Lebens- und Entwicklungsfaden weit früher abbrechen, als es sonst der Fall wäre.

Obwohl also die Bäume und Bestände nur ein ganz begrenztes Dasein haben können, so ist doch ihre Entwicklung bis zur Erreichung eines gewissen, wirtschaftlich noch zulässigen Alters (nach welchem die Entwicklungsbeobachtungen überhaupt aufhören) noch immer eine solche, a l s o b sie — wenn auch in je schwächerem Rythmus — bis eben in die Ewigkeit andauern werde. Und für uns daher, wenn es sich darüber handelt, eine analytische Grenze ihrer Entwicklung festzusetzen, ist eigentlich nicht das maassgebend, was tatsächlich stattfindet nach Ueberschreitung des wirtschaftlich noch zulässigen Alters, sondern das, was voraussichtlich stattfinden k ö n n t e, wenn die Altersschwäche nicht unterstützt wäre (und dazu in einem fortwährend zunehmenden Maasse) von pathologischen Prozessen aller Art. Es ist demnach durchaus nicht zu befürchten, dass der analytische Ausdruck, der den durchschnittlichen Zuwachsgang bis zum wirtschaftlich noch zulässigen Alter charakterisieren soll, irgend einen Schaden dadurch erleiden werde, wenn man die obere Entwicklungsgrenze bereits im vorhinein bis in die Unendlichkeit versetzt.

B.) II. 1. Nach Abbildung 2 und in Anbetracht der vorletzten Gleichung unter 23 kann C unendlich werden nur vermittelst seines rechten Teils g_2, während die Grössen g_1 und $r_1 = B$ bei irgend welcher Zuwachsreihe nur endlich sein können. Dasselbe gilt natürlich auch für deren Quotienten (Gleichung 35) und demzufolge — vermittelst der Gleichung 20 als auch der letzten zwei Gleichungen unter 23 — auch für den Quotienten 36, woraus sich dann unvermittelt der Ausdruck 37 ergibt. Wird dieser in die Gleichung 24 eingeführt, jedoch mit Rücksicht auf die unter 23 ersichtliche ursprüngliche Form von A, so folgt (mit Beachtung auch der übrigen Substitutionsgleichungen unter 23) die Gleichung 38, woraus dann nach einigen einfachen Umformungen die Gleichung 39 resultiert. Wird C unendlich, so reduziert sich hier der Zähler des ersten Hauptbruches auf a, während der Nenner des zweiten Hauptbruches (als der Einheit gleich werdend) aus der Rechnung verschwindet. Vom Nenner des ersten und vom Zähler des zweiten Bruches dagegen gelangt man nach bekannter Regel der Infinitesimalrechnung zu den Ausdrücken 40 und 41 mit e als Basis des natürlichen Logarithmensystems. Die Gleichung 39 verwandelt sich also unter dem Einflusse dieser Aenderungen in die Gleichung 42 und vermittelst der Substitutionsgleichung 43 zuletzt in die Gleichung 44, wo natürlich A nicht identisch ist mit demselben Zeichen unter 24.

Damit sind wir nun zur Zuwachsfunktion gelangt, die auch schon ganz formell davon Rechnung trägt, dass bei Waldbäumen und bis zum wirtschaftlich noch zulässigen Alter die durchschnittliche Zuwachskurve derartiges Aussehen zeigt, als ob das Wachstum — mit unaufhörlichem Sinken des Zuwachses natürlich — bis in die Ewigkeit andauern werde. Die Funktion 24, an derartige Zuwachskurven angewandt, nimmt sozusagen ganz automatisch die Form 44 an und wird sodann, neben dieser, ganz von selbst gegenstandslos.

In einer dem Verfahren, welches enthalten ist in den Gleichungen 21—24, ganz ähnlichen Weise ergibt sich auch die Funktion 44 aus einer Gleichung, welche bereits von Pearson hergeleitet wurde und welche von Czuber angeführt wird an den Seiten 24 und 29 seines erwähnten Buches. Nur wurde natürlich diese Funktion, als von den Zielen, die diesen Autoren vorschwebten, gänzlich abseits stehend, nicht von ihnen hergeleitet und (sofern mir bekannt) auch gar hindeutungsweise nicht berührt.

Nach Einführung des Ausdruckes 45 nimmt die Funktion 44 ohne weiteres die Form 46 an, die als Zuwachsgleichung von Koller bekannt ist (Nr. 6, S. 34). Koller hat sie jedoch nicht hergeleitet, sondern sie einfach von Gram übernommen, nur mit dem Unterschiede, dass sie von Gram als Wachstums- Funktion vorgeschlagen und angewandt, von Koller dagegen als Zuwachs-Funktion ins Auge gefasst wurde, was selbstverständlich richtiger ist. Die Zuwachs-Kurve nimmt nämlich schon bei Lebzeiten des Baumes vielfach ab (die Höhenzuwachskurve sogar sehr früh), während eine etwaige Abnahme der Wachstums-Kurve nicht anders ins Auge gefasst werden kann, als ein Prozess der postmortalen Zersetzung, welcher aber mit dem Wachstum (als einer ausdrücklichen Lebenserscheinung) bereits nichts mehr gemeinsam hat. Anderseits auch schon der blosse Begriff des physiologischen Wachsens verträgt sich durchaus nicht mit dem Begriffe des Sinkens, welcher nun an die Gleichungen 46, 44 und 24 jedenfalls gebunden ist.

Ob nun auch Gram die Funktion 46 ohne Herleitung aufgestellt oder sie wirklich hergeleitet hatte und auf welchem Prinzipe, ist mir nicht bekannt, da Gyldenfeldt, berichtend von ihr in der »Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen« (1880, S. 240), nichts sagt in dieser Hinsicht.

B.) II. 2. a) Wenn wir schon für die Zuwachsfunktion das Prinzip angenommen haben, dass ihre obere Zeitgrenze (bei Waldbäumen und Waldbeständen wenigstens) ins Unendliche reichen soll, so ist hiermit der Vorrat solcher aus Gleichung 24 bezw. 22 herleitbarer Funktionen nicht ganz erschöpft. Die Gleichung 20 bleibt nämlich in sich selbst unverändert, wenn man z. B. vor ihre beiden rechtsstehenden Ausdrücke negative Vorzeichen setzt, d. h. wenn man diese Gleichung anschreibt in der Form 20-a. Werden nun diese negativen Vorzeichen in die Gleichung 22 eingeführt, so erhält sie die Form 47. Wird deren letztangeschriebener (eingeklammerter) Ausdruck auf gemeinsamen Nenner $(g_1 - g_2)$ gebracht, so kürzen sich miteinander der Zähler des ersten und der Nenner dieses nun neuentstandenen zweiten Bruches, wobei im Zähler des ersteren nur noch δ übrigbleibt, während der gesagte Nenner des letzteren ganz wegfällt. Wird hierauf der zweite Ausdruck aus dem Nenner des ersten Bruches unter den noch übrig bleibenden Zähler des letzteren versetzt, so können dann beide diese Ausdrücke unter den gemeinsamen Exponenten $- r_2$ gesetzt und sodann, als Zähler und Nenner ein und desselben Bruches, mit (-1) multipliziert werden. Hierdurch nimmt nun die Gleichung 47 die Form 48 an. Transformiert man jetzt diese letztere mit Rücksicht auf die Negativität des Exponenten, so ergibt sich weiterhin die Gleichung 49.

Wie hieraus ersichtlich, g_2 muss auch hier, ebenso wie früher, grösser sein als g_1 (und demzufolge auch $r_2 > r_1$), da sonst y' eventuell (ab und zu) auch negativ sein könnte, was jedoch mit Rücksicht auf den unbedingt positiven Charakter des Zuwachses nicht statthaft ist. Ausserdem müsste die Relation $g_1 > g_2$ es mit sich bringen, dass bei einem gewissen von Null verschiedenen (positiven) x - Betrage der Nenner des rechtsstehenden (veränderlichen) Bruches auf Null herabsinkt, was nun den naturwidrigen und daher unmöglichen Betrag $y' = \infty$ zur Folge hätte. Ihrer theoretischen Aufgabe kann somit diese letztere Gleichung genügen nur unter der (wie wir noch sehen werden) ganz leicht erfüllbaren Bedingung $g_2 > g_1$.

Damit nun anderseits g_2 unendlich werde, wie dies z. B. in den Gleichungen 38—41 der Fall ist (mit Rücksicht auf die vorletzte Gleichung unter 23), dies ist hier durchaus unnötig, da auch hier y' grösser bleibt als o bis selbst in die Unendlichkeit und erst alsdann (wegen $r_2 > r_1$) auf Null herabsinken muss. Der variable Bruch in 49 kann nämlich auf die Form 50 (rechterhand) gebracht werden, deren erster Summand bei $x = \infty$ offenbar verschwindet. Damit nun ihr zweiter Summand bei demselben x - Betrage unendlich werde und demzufolge auch y' verschwinde, Vorbedingung dafür ist $r_2 > r_1$.

Dies ist also die Grundbedingung für die Richtigkeit der Gleichung 49 und dieser Bedingung sollen wir Genüge leisten bereits a priori. Dies ist jedoch auch ganz leicht möglich, wenn von den Substitutionsgleichungen 51 Gebrauch gemacht wird, wo c als ein neuer Parameter eingeführt wurde, der grösser sein muss als 1. Mit Rücksicht auf die Gleichung 20 besteht jetzt die ihr konforme Gleichung 52 und hieraus ergibt sich nun der Ausdruck 53. Wird dieser letztere (ebenso wie die Ausdrücke unter 51) in die Gleichung 49 eingeführt, so ergibt sich hieraus nach einigen Zusammenziehungen der Ausdruck 54. Hieraus wiederum, uzw. mit Rücksicht auf die Abkürzungen unter 55, ergibt sich schliesslich die erstrebte Funktion 56, wo ebenfalls alle Parameter positiv sein müssen (A natürlich mit einer anderen Bedeutung als in den Gleichungen 24, 44, 46). Hierdurch erhielten wir nun eine Zuwachsfunktion, die (bei denselben Grundeigenschaften) einen wesentlichen Vorteil hat den bereits angeführten gegenüber. Wir werden ihn noch kennen lernen.

B.) II. 2. b) Auch für diese letzthergeleitete Funktion wird im Haupttexte analytisch nachgewiesen, dass sie alle charakteristischen Eigenschaften der Zuwachskurven besitzt, ganz so wie die Funktion 24. Namentlich wird festgestellt, dass unbedingt $c > 2$ sein muss, da sonst die Kurve 56 nicht entsprechen könnte den wirklichen Zuwachskurven sowohl in bezug auf die Richtung ihres Ausganges aus dem Ursprunge als auch in bezug auf die Position ihrer Wendepunkte. Als wesentlichste Resultate dieser Verifikation sind Gleichungen 58 und 60 hervorzuheben, deren erste die Abszisse des einzigen Kulminationspunktes repräsentiert, die zweite dagegen die beiden Wendepunktsabszissen. Die Verifikation der Funktionen 44 und 46 wurde hier unterlassen, da es bezüglich der letzteren bereits K o l l e r getan hatte (a. a. O., S. 35—37) und da die erstere eigentlich nichts anderes ist, als eine analytisch brauchbarere Form der letzteren.

B.) III. Die Zuwachsfunktionen für sich allein können für die praktische Anwendung nur von einer mehr untergeordneten Bedeutung sein den Wachstumsfunktionen gegenüber. Dies kommt daher, dass der Zuwachs, als Differenz je zweier aufeinander folgender y - Beträge, behufs Prüfung seines Ganges nicht direkt gemessen, sondern nur indirekt ermittelt werden kann, uzw. aus den nacheinander gemessenen y - Beträgen. So ist es wenigstens in der ganz gewaltigen Mehrzahl von Fällen, d. h. beim Massenzuwachs stets und beim Höhenzuwachs meist (nur hie und da Fälle ausgenommen, wo wir es mit quirltreibenden Nadelhölzern zu tun haben). Deshalb erscheint es jedenfalls als naturgemässer, wenn auch der r e g e l m ä s s i g e Gang des Zuwachses (im Sinne der analytischen Funktion) ausgeführt wird nicht direkt aus einer der Zuwachsgleichungen selbst, sondern erst indirekt, d. h. aus einer der Wachstumsgleichungen.

Anderseits die Zuwachsbeträge, als Differenzen zwischen gemessenen y - Beträgen, sind von Messungsfehlern stärker behaftet als die y - Beträge selbst. Es kann allerdings stattfinden, dass, obwohl zwei aufeinanderfolgende y - Beträge mit Messungsfehlern behaftet, der daraus resultierende Zuwachsbetrag trotzdem fehlerlos bleibt, was z. B. der Fall wäre, wenn beide y - Beträge mit zahlenmässig gleichen und dazu auch mit gleich bezeichneten Messungsfehlern behaftet wären. Es ist jedoch auch der Fall entgegengesetzter Vorzeichen möglich, dem vorigen sogar auch gleich wahrscheinlich. Da haben wir dann eine Kumulierung von Fehlern im erhaltenen Zuwachsbetrage, weshalb eben die Amplitude der Fehlerhaftigkeit (um mich so auszudrücken) beim Zuwachse doppelt so gross erscheint als bei der Primärgrösse selbst.

Dies musste hervorgehoben werden bezüglich der absoluten Fehlerbeträge. Was nun die relative Fehlerhaftigkeit (in Prozenten ausgedrückt) anbelangt, so steht es in dieser Hinsicht mit dem Zuwachse noch ärger, da nämlich seine Beträge in der Regel viel geringer sind als die Primärgrössenbeträge.

Die Zuwachsfehler kommen zwar nicht eben arg zum Vorschein, wenn die Primärgrössen gemessen werden in grösseren Zeitabschnitten, z. B. jedes zehnte Jahr. Doch die so erhaltenen Zuwachsbeträge, als durchschnittlich-jährliche, unterscheiden sich schon mehr oder weniger von denjenigen, die (der regelmässigen Zuwachskurve gemäss) tatsächlich fallen sollen eben in die Mitten der einzelnen Perioden. In vielen Fällen kann allerdings solch ein mittlerer Zuwachsbetrag fast haarscharf als der eben in der Perioden-Mitte erfolgte betrachtet werden und geschieht dies zur Zeit, wo die Zuwachskurve eine annähernd gerade Richtung zeigt. Wenn diese jedoch stärker gekrümmt ist, so gehört (je nach Umständen) solch ein durchschnittlicher Betrag, seiner Grösse nach, nicht mehr genau genug in die Mitte seiner Periode. Und dies nun, zusammen mit einem noch ziemlichen Teile der erwähnten Mangelhaftigkeit in der Zuwachsermittlung, beeinträchtigt die Präzision der darauf fundierten mathematischen Zuwachs-Kurve jedenfalls mehr, als es der Fall ist bei der (auf einem entschieden zuverlässigeren Grundlagenmaterial fundierten) mathematischen Wachstums-Kurve

C.) I. Die Zuwachsgleichungen sind bekanntlich erste Ableitungen der Wachstumsgleichungen. Diese letzteren ergeben sich daher aus der Integration von Differentialen jener ersteren.

Aus der Gleichung 44, die (wie gesagt) nur als eine für analytische Operationen besser geeignete Form der Gleichung 46 erscheint, folgt als vorläufige (noch nicht abgeschlossene) Form der Wachstumsgleitung der Ausdruck 61. Dieser kann nun zum Abschlusse gebracht werden nur im Wege der sogenanten partiellen Integration. Bevor wir jedoch hierzu herantreten, wollen wir ihn noch etwas vereinfachen, uzw. mit Hilfe des Substitutionsausdruckes 62 und der ihm zugeordneten Ausdrücke unter 63. Setzt man diese drei Ausdrücke in 61 ein und beachtet man hierbei die Integrationsgrenzen, mit deren Vertauschung sich das Vorzeichen des Integrals ändert, so ergibt sich daraus die Gleichung 64. Wenn wir jetzt vorläufig nur die unbestimmte Integration des Integrals 64 ins Auge fassen und substitutionsweise die Ausdrücke 65 und 67 anwenden, so nimmt das Integral I_0 aus 65 mit Hilfe der bekannten Gleichung 66 die Form 68 an. Das Integral im Subtrachenden dieses letzten Ausdruckes (wir wollen es mit I_1 bezeichnen) ist nun ganz analog gebaut wie das Integral I_0 aus 65. Daher erhält es mit Hilfe der Ausdrücke unter 69 die Form 70. Substituiert man weiter die Ausdrücke 71, so nimmt das Integral (I_2) aus dem Subtrachenden des Ausdruckes 70 die Form 72 an.

Wäre nun B eine ganze Zahl und wollte man den angegebenen Integrationsvorgang so lange fortsetzen, bis der Koeffizient vor dem Integralzeichen auf Null herabsinkt, so erhielte man als letztes partielle Integral den Ausdruck 73. Nach Einsetzen dieses letzteren in das vorletzte (I_{B-1}), dieses wiederum in das vorangehende usw. bis schliesslich zu I_0 (all dies unter gleichzeitiger Ausmultiplizierung der einzelnen Partialintegrale mit den davorstehenden Koeffizienten) wäre die unbestimmte Integration des Ausdruckes 64 zum Abschluss gebracht und bliebe es nur noch übrig, dieses unbestimmte Integral aufzulösen in bezug auf seine Grenzen. Hiermit wäre die gesuchte Wachstumsfunktion vollkommen gegeben uzw. in einer endlichen Form.

Die Integration des Ausdruckes 64 hat, wie ersichtlich, eine Vorbedingung, dass nämlich B schon a priori bekannt ist. Man soll es also bereits aus der Gleichung 44 bestimmen, uzw. entweder nach der Elementarmethode (Auflösung von 3 Gleichungen mit 3 bekannten Koordinatenpaaren) oder nach der Methode der kleinsten Quadrate. Nach irgend welcher dieser Methoden resultiert indessen B in der Regel als ein Bruch, was bedeuten will, dass die Auflösung des Integrals 64 in der Regel zu einer unendlichen und für das hier erstrebte Ziel eigentlich unbrauchbaren Reihe führt. Um nun doch zu einer für praktische Ausnützung geeigneten, also endlichen Reihe zu gelangen, muss B auf ganze Zahl auf- bezw. abgerundet werden. Unter dieser Bedingung und auf beschriebene Weise ergibt sich dann für I_0 der Ausdruck 74. Mit Rücksicht auf leichte Erkennbarkeit der Regel, nach welcher sich die Vorzeichen der einzelnen darin befindlichen Glieder wechseln, kann dieser Ausdruck angeschrieben werden auch in der Form 75. Wird jetzt zur Bestimmung dieses noch unbestimmten Integrals herangetreten (mit

Rücksicht auf die unter 64 angegebenen Grenzen), so entsteht hieraus die Gleichung 76 und aus dieser nach einigen Umformungen schliesslich die Gleichung 77.

Dies wäre also die K o l l e r'sche Wachstumsfunktion. Nach Prof. G u t t e n b e r g (a. a. O., S. 61) »erscheint sie etwas zu kompliziert, um eine Anwendung in der Praxis zu gestatten«. Ausser diesem rein praktisch gehaltenen Einwande kann man ihr auch deren einige von rein theoretischem Charakter geben. Aus leicht fasslichen Gründen gehört hierzu schon die Notwendigkeit der gesagten Auf- bezw. Abrundung vo B. Ausserdem ist die Funktion eigentlich nicht selbständig. Denn vermittelst ihrer Parameter, die entweder alle (nach K o l l e r selbst) oder wenigstens teilweise (B) aus der Gleichung 44 ermittelt werden müssen, setzt sie ihre y - Beträge in Abhängigkeit von den (jedenfalls weniger zuverlässigen) empirisch gefundenen y'- Beträgen. Nach meiner obigen Herleitung erscheint die K o l l e r'sche Wachstumsfunktion in rein formeller Hinsicht wesentlich einfacher als nach K o l l e r selbst (von K o l l e r wurde sie aus der analytisch weniger geeigneten Gleichung 46 hergeleitet), doch auch jetzt verliert sie noch immer nicht den von G u t t e n b e r g hervorgehobenen ungünstigen Charakter.

Für den Fall, dass von den in 77 enthaltenen Parametern nur B aus der Gleichung 44 ermittelt wird, müsste natürlich der von allen Parametern zusammengesetzte Ausdruck vor der Hauptklammer durch einen einzigen, neuen Parameterausdruck ersetzt werden.

C.) II., 1. Wird sowohl der Zähler als auch der Nenner der Funktion 56 durch den Ausdruck 78 geteilt, so folgt aus ihr nach einfacher Umformung die Gleichung 79 bezw. 80. Setzt man in diese letztere die Ausdrücke unter 81 und 82 ein und beachtet man sowohl die neuen Integrationsgrenzen im Sinne der Gleichung 81 als auch die erwähnte Regel, dass die Vertauschung von Integrationsgrenzen eine Aenderung des Vorzeichens vor dem Integrale zur Folge hat, so ergibt sich hieraus nach entsprechender Zusammenziehung der Ausdruck 83. Werden nun in diesen letzteren die Ausdrücke unter 84 und 85 eingesetzt, so ergibt sich daraus die Gleichung 86, und aus dieser, nach Vereinfachung im Sinne des Ausdruckes 87, ergibt sich schliesslich die gesuchte Wachstumsfunktion 88. Die der Funktion 56 analoge Form des Ausdruckes 88 ist unter 88-a angeführt.

Wie ersichtlich, diese letztere Form unserer Wachstumsfunktion unterscheidet sich von der Funktion 56 nur insoferne, als hier sowohl der Zähler als auch der Nenner ein und denselben Exponenten besitzt. Es ist demnach, in völliger Uebereinstimmung mit den Formen der entsprechenden Kurven, diese

Wachstumsfunktion einfacher geformt als die ihr entsprechende Zuwachsfunktion. Sonst kommt aus 88-a gleich auf den ersten Blick heraus, dass für $x = o$ auch $y = o$ sein muss. Die Form 88 zeigt nun weiter, dass für $x = \infty$ sich $y = a$ ergeben muss, dass also die Wachstumskurve ihr Ende nimmt mit dem asymptotischen Betrage a als Ordinate. Auf diesem Wege von o bis a passiert die y - Grösse (unaufhörlich zunehmend) durch einen einzigen Wendepunkt, dessen Abszisse ausgedrückt würde durch die Gleichung 58. Da weiter, wie schon gesehen, die Funktion 56 bei $x = o$ ebenfalls gleich Null ist, so steht die anfängliche Richtung der Kurve 88 tangential zur Abszissenaxe.

Die Funktion 88 besitzt also sämtliche für die Wachstumscharakterisierung (wie dasselbe dargestellt wird durch Abbildung 1) notwendigen Eigenschaften. Sie muss sich daher an die konkreten, auf Grund der Beobachtungsresultate aufgetragenen Wachstumskurven in genügendem Maasse anschmiegen. Es ist jedoch auch bekannt, dass das Anschmiegungsvermögen einer theoretischen Kurve nicht allein von ihrem allgemeinen Charakter abhängt (ob prinzipiell richtig oder nicht), sondern auch von ihrer Parameteranzahl. Je grösser diese, desto (bei sonst richtigem Funktionscharakter) grösser die Anschmiegsamkeit. Von diesem Standpunkte aus könnte nun die Gleichung 88 nur noch mit einem einzigen neuen Parameter dotiert werden (in Form eines unmittelbar über x gestellten Exponenten) und erhielte man hierdurch die von mir 1930 (herleitungslos) publizierte Wachstumsgleichung. Am Ende der vorliegenden Studie werde ich auch diese erweiterte Form der Wachstumsfunktion speziell herleiten, muss jedoch schon jetzt hervorheben, dass auch selbst bei der Funktion 88 die Parameterberechnung nicht eben bequem und rasch vor sich geht, indem nämlich auch sie nicht in die Gruppe linearer Funktionen hineingehört. Deshalb muss auch bei ihr (ebenso wie bei der Koller'schen Funktion) der ganze Berechnungsprozess nach der Methode der kleinsten Quadrate — wegen zahlreicher Logarithmierungen und Antilogarithmierungen langwierig und mühsälig — noch einige Male wiederholt werden. Dies gibt mir nun Beweggrund dazu, aus ihr eine möglichst verwandte Näherungsfunktion zu entwickeln, bei welcher keine Wiederholung des Rechnungsprozesses und dazu auch kein Logarithmieren bezw. Antilogarithmieren notwendig ist. Selbstverständlich muss diese vereinfachte Funktionsform von ganz theoretischem Standpunkte aus minderwertig sein der Funktion 88 gegenüber.

C.) II., 2. Der Nenner der Funktion 88 kann leicht in eine Binomialreihe entwickelt werden, in der Regel unendliche, weil c nur ausnahmsweise ganze Zahl sein kann. Dadurch entsteht aus ihr die Funktion 89, die mit Hilfe der Substitutionsausdrücke unter 90 die Form 91 erhält mit A, B, C, ... als neuen

Parametern. Eine je grössere Anzahl solcher Parameter in der Gleichung bezw. der Glieder in ihrem Nenner (von links nach rechts), desto besser müssen sich ihre y - Werte an die gegebene Reihe von y - Beträgen anschmiegen.

Sonst ist aus der Funktion 91 ersichtlich, dass — wie gross oder klein die Anzahl von Parametern bezw. von Nennergliedern auch sein mag, die Eins allein ausgenommen — für den Fall $x = o$ ebensowohl auch $y = o$ sein muss, während anderseits bei $x = \infty$ der Betrag $y = A$ sich ergibt. Diesbezüglich ist also die Funktion 91 ganz übereinstimmend mit der Funktion 88. Die übrigen Charaktermerkmale der Funktion 91 sind nicht so beständig. Sie sind einigermassen durch die Anzahl von Nenngliedern bezw. von Parametern bedingt. Jedenfalls dürfte die Parameteranzahl nicht unter 4 herabsinken; anderseits jedoch, selbst auch in anspruchsvollsten Fällen, können 6 Parameter vollkommen genügen. Dabei dürfte die angegebene untere Anzahlgrenze für den Höhen-Wachstumsgang Geltung haben, die obere für den Wachstumsgang der Holzmasse.

Die Funktion 91 repräsentiert — ihrer ganzen Form gemäss — noch immer nicht das, was hier eigentlich erstrebt wird, da auch sie (wie ersichtlich) noch nicht linear ist. Dafür ist doch vollkommen linear (mit Rücksicht auf die Parameter als Unbekannten) die ihr reziproke Funktion 92, die mit Hilfe der Substitutionsausdrücke unter 93 die endgültige Form 94 annimmt mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ als neuen Parametern. Diese letztere lässt also eine bequeme und verhältnissmässig rasche Parameterberechnung zu, sei es nach der Elementarmethode oder nach der Methode der kleinsten Quadrate. Nach deren Ausrechnung ergeben sich dann die Parameter der Gleichung 91 durch einfache Umkehrung der Ausdrücke unter 93 d. h. nach den Formeln 95. Doch ist dieses letztere auch nicht gar notwendig, da auf Grund bekannter Werte für α, β, γ, $\ldots\ldots$ und demzufolge auch für y^{-1} die den einzelnen Altern entsprechenden y - Beträge auch nur durch einfaches Umkehren von y^{-1} erfolgen können.

D, I. Zur Parameterberechnung nach der Elementarmethode übergehend, will ich diese nur für die Funktion 88 kurz darlegen.

Wenn man aus den drei Bestimmungsgleichungen 96, worin die Koordinatenpaare als bekannt vorausgesetzt werden, die Unbekannte a eliminiert, so entstehen die Gleichungen 97. Werden diese logarithmiert und miteinander dividiert, so fällt auch c weg und verbleibt zugleich nur noch die Gleichung 98. Aehnlich wie die Gleichung 34 kann auch diese letztere nur probierungsweise nach b aufgelöst werden, wobei jedoch b mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden kann. Mit Hilfe des für b gefundenen Wertes wird nun derjenige für c aus einer der Gleichungen 97 bestimmt und die Beträge für b und c dienen sodann zur Berechnung des Betrages für a, uzw. aus einer der Gleichungen 96.

Die Parameterbestimmung nach dieser — eigentlich groben — Methode kann jedoch nur als eine Vorbereitungsarbeit gelten, uzw. für die Bestimmung nach der viel feineren Methode der kleinsten Quadrate, zu welcher wir nun übergehen.

D, II, 1. Bevor wir jedoch die kompliziertere Entwicklung dieser Methode für die Funktion 88 in Anschlag nehmen, wollen wir möglichst kurz darstellen ihre einfachere Variante für die Funktion 94. Der Einfachheit halber werden hier nur 4 Parameter supponiert, da der Vorgang im Falle von mehr Parametern ganz analog ist. Der weiteren Vereinfachung wegen führen wir die Substitutionen nach 99 aus, wodurch die Gleichung 94 übergeht in die Gleichung 100.

Zwischen den theoretischen (gleichungsmässigen) y_i^{-1}- Beträgen für verschiedene Alter und den für dieselben durch Beobachtung erhaltenen (empirischen) Beträgen h_i^{-1} (wo $i = 1, 2, \ldots n$) bestehen bekanntlich gewisse, vorderhand noch unbekannte und gleich in positiver wie in negativer Richtung mögliche Differenzen, welche durch das Gleichungssystem 101 angegeben sind. Mit Hilfe der Substitutionen unter 102 bekommen diese Gleichungen, unter der Bezeichnung »Fehlergleichungen« bekannt, die einfacheren Formen unter 103. Nachdem nun diese Differenzen (Fehler) mit den vorderhand noch unbekannten Parameterbeträgen (α, β, . . .) funktionell in Verbindung stehen, so entspricht jedem anderen Parametersysteme ein anderer λ- Wert und entgegengesetzt. Nach der Theorie wird nun dasjenige Parametersystem als das wahrscheinlichste angenommen, welches die Gleichung 104 bezw. (mit Rücksicht auf das System 103) die Gleichung 105 zur Folge hat. Diese Fehlerquadratsumme kann indessen das erforderliche Minimum ergeben nur unter den durch die Gleichungen 106 angegebenen Bedingungen, d. h. wenn die partiellen Ableitungen der gesagten Summe nach α, β, γ, δ der Null gleichgestellt werden. Nach Ausführung dieser Operationen entstehen die 4 Gleichungen 107, die mit Rücksicht auf das System 103 ausgedrückt werden können durch die einfacheren Gleichungen 108 bezw. 109 (hierselbst nach der in der Fehlertheorie gebräuchlichen kürzeren Schreibweise).

Die Gleichungen 107 können indessen (nach Ausmultiplizierung der eingeklammerten Ausdrücke mit den ausserhalb stehenden Faktoren) auch in einer anderen Weise vereinfacht werden. Zu diesem Behufe ordnet man sie nach den Unbekannten (α, β, ...) selbst und entstehen hiernach (durch entsprechende Zusammenziehungen) die sogen. Normalgleichungen 110, die aufgelöst werden können im Wege des einfachsten Eliminationsvorganges. Die so erhaltenen Parameterwerte, in das System 103 eingeführt, ermöglichen nun die Bestimmung einzelner Differenzbeträge, worauf man mit Hilfe der Gleichungen 108 auch die rechnerische Richtigkeit der erlangten Resultate prüfen kann.

Die Unbekanntenberechnung aus dem Systeme 110 kann noch vereinfacht werden, wenn für die Unbekannten bereits im vorhinein eigentliche Formeln aufgestellt werden. Wird zu diesem Behufe vorerst α eliminiert, so entstehen die Gleichungen 111, worin man sodann die Substitutionsausdrücke 112 einführen kann. Hierdurch erhält man die ganz einfachen Gleichungen 113. Durch Elimination von β resultieren alsdann die Gleichungen 114 und mit Hilfe der Vereinfachungsausdrücke unter 115 die Gleichungen 116. Die Elimination von γ liefert zuletzt die einzige Gleichung 117, aus welcher sich in 118 der formelmässige Ausdruck für δ ergibt. Nach seiner Errechnung ergeben sich dann aus den Gleichungen 116 die beiden Ausdrücke für γ (Gleichung 119). Die parallele Anwendung beider dieser Ausdrücke erscheint als vorteilhaft, da hierdurch bereits jetzt das eventuelle Bestehen eines groben Rechnungsfehlers entdeckt werden kann. Zum mindesten zeigen die Resultate beider dieser Formeln an, mit wieviel Decimalen weiterhin gearbeitet werden soll, da es z. B. unsinnig wäre auch weiterhin mit 10 Decimalen zu arbeiten, wenn die beiden parallelen Resultate schon in der neunten Decimale nicht übereinstimmen. Auf Grund der für γ und δ bereits bekannten Werte berechnet sich dann der β- Wert nach der Formel 120 und weiterhin auch α nach der Formel 121.

D, II, 2. Aus jeder durch Gleichung 122 dargestellten (positiven oder negativen) Differenz zwischen dem gleichungsmässigen y_i- Werte und dem dafür beobachtungsweise erhaltenen h_i- Betrage ergibt sich umgekehrt je ein Ausdruck 123, der den gleichungsmässigen y_i- Wert als Aggregat zwischen dem betreffenden Beobachtungsresultate (h_i) und seinem Fehler χ_i darstellt. Ausserdem enthält die Gleichung 123 auch eine formelle Hinweisung darauf, dass y_i funktionell abhängt nicht nur von x_i allein, sondern auch von den Parameterwerten, die sich von Fall zu Fall (z. B. von Standort zu Standort) wesentlich ändern. Indessen hängt, wie ersichtlich, diese Funktion nicht linear von ihren Parametern ab und muss daher für die Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate erst speziell präpariert werden. Dies geschieht nun mit Hilfe des Satzes von T a y l o r. Nachdem jedoch aus technischen Gründen die T a y l o r'sche Reihe schon nach den die ersten partiellen Ableitungen enthaltenden Gliedern abgebrochen werden muss und nachdem hierdurch die Quadrate und Produkte ihrer »Zusätze« vernachlässigt werden müssen, so müssen in die Funktion 88 bereits im vorhinein gewisse, möglichst gute Approximationswerte (a_0, b_0, c_0) für Parameter eingeführt werden, die dann durch die Ausgleichung nur noch möglichst kleine Zusätze (α, β, γ) erhalten sollen, um mit Hilfe der Gleichungen 124 auf die wahrscheinlichsten Parameterwerte (a, b, c) ergänzt zu werden. Die Approximationswerte werden nun am zweckmässigsten nach dem durch Gleichungen 96—98 angegebenen Elementarverfahren ermittelt, wobei es auch noch als zweckmässig erscheint, die gegebenen Koordinatenpaare graphisch aufzutragen und die hierdurch erhaltene unregelmässige Kurve nach Augenmaass auszugleichen.

Die Gleichung 123, auf angegebene Weise mittelst der niedrigsten Glieder der Taylor'schen Reihe (Gleichung 125) ausgedrückt, hätte somit die Form 126, die jedoch einer vielfachen Vereinfachung fähig ist. Zu diesem Behufe dienen die in 127 angegebenen Substitutionen, mittelst deren Hilfe sich hieraus direkt die Gleichung 128 ergibt. Hier gelten die Koeffizienten A_i, B_i, C_i, H_i als bekannt, nachdem nun dieselben auf Grund der Beobachtungsresultate direkt errechnet werden können. Aus dem durch 128 dargestellten System von Fehlergleichungen ergeben sich sodann auf bereits angegebene Weise (siehe Gleichungen 104—107) die Normalgleichungen 129, worin jedoch, wie ersichtlich, nicht mehr die Parameter selbst als Unbekannte vorkommen, sondern ihre Zusätze. Nach deren Ausrechnung (in Analogie mit den Gleichungen 111—121) werden diese Zusätze in die Formeln 124 eingesetzt. Fast nie jedoch erhält man hiermit gleich die definitiven Parameterbeträge, da die erwähnten Zusätze nach dieser ersten Berechnung in der Regel so gross sind, dass ihre Quadrate und Produkte nicht vernachlässigt werden dürfen. Deshalb dürfen die nach 124 zum ersten Male errechneten Parameterwerte nur erst als neue Approximationswerte zwecks Wiederholung des ganzen Rechnungsprozesses verwendet werden. Die hierdurch für α, β, γ erhaltenen neuen Werte müssen jedoch kleiner sein als das erste Mal, sofern natürlich kein grober Rechenfehler vorliegt bezw. sofern man mit einer genügenden Anzahl von Decimalen arbeitet. Doch müssen selbstverständlich auch sie noch immer nicht genug entsprechen und muss daher die ganze Prozedur so lange wiederholt werden, als die errechneten Zusatzwerte nicht derart herabsinken, dass man ihre Quadrate und Produkte wirklich vernachlässigen kann. Od dieser Fall schon da ist, kann man sich mittelst der Kontrollgleichungen 130 vergewissern, die ähnlich erhalten werden wie diejenigen unter 108 bezw. 109. Ist dieser Fall schon eingetreten, so haben wir dann nicht nur die wahrscheinlichsten Parameterwerte hiermit gefunden, sondern können auch alle uns notwendigen y- Werte auf die einfachste Weise und endgültig errechnen. Sie resultieren in diesem Falle mit genügender Genauigkeit bereits aus der Gleichung 122.

Die Methode der kleinsten Quadrate bietet uns auch die Möglichkeit, den Zuverlässigkeitsgrad der errechneten Parameterwerte zu bestimmen. Doch hierauf kann ich hier nicht eingehen.

D, III. Das hier behandelte Beispiel betrifft die in Tabelle 2 enthaltene und in Decimetern ausgedrückte Wachstumsreihe von Guttenberg. Sie ist, wie ersichtlich (Abbildung 1), bereits ausgeglichen, nicht jedoch nach der Methode der kleinsten Quadrate, sondern der Hauptsache nach graphisch und okulariter.

1. Behufs Ermittlung der Näherungswerte a_0, b_0, c_0 (mittelst der Gleichungen 96—98) nahm ich die den Abszissen 10, 80, 150 entsprechenden Ordinaten zuhilfe. Hiermit erhielt ich: $a_0 = 574 \cdot 3874$, $b_0 = 14 \cdot 77354$, $c_0 = 4 \cdot 094.228$. Mit Hilfe dieser Beträge ergaben sich nach den Gleichungen 129 die Zusatzwerte $\alpha = + 13 \cdot 019.9496$, $\beta = - 2 \cdot 5498.0949$, $\gamma = + 0.837.605.347$, so dass die Parameterwerte selbst jetzt betrugen: $a = 587 \cdot 407.3496$, $b = 12 \cdot 2237.3051$, $c = 4 \cdot 931.833.347$. Es wurde natürlich die Wiederholung notwendig, wodurch ich erhielt: $\alpha = - 1 \cdot 1473.5573$, $\beta = - 0 \cdot 440.782.986$, $\gamma = + 0 \cdot 317.830.715$, also Zusatzbeträge viel kleinere als das erste Mal, die jedoch noch immer nicht zu vernachlässigen sind. Ich begnügte mich hiermit dennoch; nur konnte ich aus dem gesagten Grunde die einzelnen y- Werte nicht aus der Gleichung 122 ermitteln, musste vielmehr zu diesem Behufe die neuen $a_0 A_i$-Werte berechnen (siehe Gleichungen 125—127). In der Tabelle 5 sind diese Werte in der 3. Spalte zu finden. Der leichteren Vergleichung wegen enthält die 2. Spalte nochmals die Guttenbergschen Originalzahlen aus der Tabelle 2. Die 4. Spalte enthält die Differenzen zwischen den Angaben dieser beiden Spalten, d. h. die H_i- Werte nach letzter Gleichung unter 127. Sie sind, wie ersichtlich, nicht eben gross. Graphisch sind die angeführten $a_0\ A_i$- Werte durch die Abbildung 3 dargestellt (ausgezogene Kurve). Die daneben liegenden Punkte repräsentieren dagegen die Originalzahlen von Guttenberg. Die hier notwendigen Logarithmierungen führte ich mittelst der angeführten 10-stelligen Tafeln von Vega aus. Überhaupt alle Berechnungen sowohl hier als auch in folgenden Fällen wurden mit Zahlen von wenigstens 10 Effektivziffern ausgeführt.

2. Aus der Gleichung 94 nahm ich bei der Parameterberechnung zuerst 4 und sodann auch 5 Parameter in Betracht. Mit ihrer Hilfe berechnete ich dann nach den Formeln 95 die Para-

meter von Gleichung 91. Alle diese Parameter sind in der Tabelle 6 zusammengestellt, diejenigen für den ersten Fall in den ersten 4 Zeilen. Einer der Parameter für den zweiten Fall ist, wie ersichtlich, negativ, was ja nicht erstaunen kann angesichts der Tatsache, dass die Funktion 91, obwohl aus 88 entstanden, mit dieser dennoch nicht identisch ist. Aus der Tabelle 7, die sonst der vorigen (5) ganz ähnlich eingerichtet ist, geht hervor, dass sich die Kurve y_{91} im Falle der Anwendung mit 4 Parametern etwas besser an die empirische Kurve von Guttenberg anschmiegt, als es der Fall war mit der Kurve y_{88}. Dies ist übrigens ganz begreiflich angesichts der grösseren Anzahl ihrer Parameter, obwohl sie, wie gesehen, nur eine gewisse Annäherung an die Funktion 88 repräsentiert.

Eine noch viel bessere Anschmiegung an die Guttenberg'sche Wachstumsreihe zeigt sie bei der Anwendung mit 5 Parametern, wie dies aus Tabelle 8 hervorgeht, wo die Differenzen bereits ganz winzig sind. Ist indessen der Umstand, dass die beiden Wachstumsreihen bezw. die daraus entstehenden Kurven nicht ganz übereinstimmen, nur der theoretischen Kurve zur Last zu schreiben? Um diesbezüglich ein Urteil fällen zu können, bildete ich aus den aufeinander folgenden Beträgen der 2. Spalte Differenzen und aus diesen in derselben Weise auch die zweiten Differenzen (siehe die Spalten 5 und 6). Diese letzteren trug ich jetzt im Maasstabe 1 c/m = 2 dcm graphisch auf. Nun zeigte es sich, dass diese zweiten Differenzen vom 50. Jahre ab eine durchaus unregelmässige Kurve bilden (siehe den punktierten Kurventeil, Abbildung 4) davon eben rührend, dass die Guttenberg'sche y- Kurve, ihrer Entstehungsweise gemäss, nur anscheinend regelmässig ist. Dagegen bilden die entsprechenden (in die letzte Spalte eingetragenen) zweiten Differenzen der Funktion 91 auch weiterhin eine ganz regelmässige Kurve, die sich eben durch die Mitte der von der anderen gebildeten, unregelmässig stehenden Punkte hindurchzieht und sie hierdurch ausgleicht.

Ich will hiermit nicht etwa sagen, dass die Funktion 91, mit 5 Parametern angewandt, in bezug auf ihren Kurvenverlauf bereits nichts mehr zu wünschen übrig lässt. Dies umsoweniger, als sie (wie gesehen) nur eine Näherungsform der Funktion 88 gegenüber darstellt und als sie ihre bessere Anschmiegsamkeit (dieser Mutterfunktion gegenüber) nur ihrer bedeutenden Ueberlegenheit in der Parameteranzahl zu verdanken hat. Doch dürfte diese ihre Eigenschaft nicht stets derart massgebend sein, als es eben scheinen will. Nachdem wir nämlich einen ihrer Parameterwerte bereits als negativ gesehen haben, so ist durchaus auch der Fall nicht ausgeschlossen, dass nicht ihr vorletzter, sondern ihr letzter Parameter negativ wird und in diesem Falle muss sie dann entschieden aufhören, in ihrem ganzen

Verlaufe verwendbar zu sein. Doch dürfte dann dieser eventuelle Sonderfall nur als ein Zeichen dafür gelten, dass die eben verwendete Parameteranzahl noch nicht genügt.

E.) Für den Gang des Dickenwachstums und des Durchmesserzuwachses im Bodenniveau gelten bekanntlich ganz analoge Kurven wie diejenigen auf Abbildung 1. Deshalb gelten nun für das Wachsen und Zuwachsen des Durchmessers an dieser untersten Schaftstelle auch die in den Gleichungen 56 und 88 enthaltenen Gesetze. Das erste davon gilt indessen auch für den Durchmesserzuwachs an irgend einer anderen Schaftstelle, so auch an derjenigen in der Brusthöhe (13 dcm über dem Boden), nur natürlich erst von dem Zaitpunkte (t) ab, in welchem diese Höhe von der Baumspitze eben erreicht wird. Nach Einsetzen dieses speziellen Argumentwertes in die Funktion 56 resultiert für den Anfangs-Betrag des Durchmesserzuwachses in der Brusthöhe der Ausdruck 131, der natürlich — dem betreffenden von Null, ja auch von 1 entschieden grösseren Argumentwerte gemäss — sich ebenfalls in den Grenzen der Endlichkeit bewegen muss.

Mit Rücksicht auf diese untere Zeitgrenze (t) der Zuwachstätigkeit in der Brusthöhe muss natürlich bei der Herleitung des den Brusthöhendurchmesser betreffenden Wachstumsgesetzes von der Gleichung 132 ausgegangen werden, die sich von der analogen Gleichung 80 nur in bezug auf diese Grenze unterscheidet. Setzt man hierher die Ausdrücke unter 81 und 82 ein, so resultiert hieraus nach entsprechender Zusammenziehung und mit Rücksicht auf die neuen Integrationsgrenzen im Sinne der Gleichung 81 der Ausdruck 133. Hieraus wiederum, nach Einsetzen der Ausdrücke unter 84 und 85, resultiert der Ausdruck 134, welcher nach Ausführung der Integration übergeht in den Ausdruck 135. Mit Hilfe des Substitutionsausdruckes unter 87 ergibt sich hieraus schliesslich der Ausdruck 136 mit dem konstanten Subtrachenden, der nach 137 auch durch k ersetzt werden kann. In Anbetracht dessen ist die endgültige Form unserer Funktion für das Dickenwachstum in der Brusthöhe enthalten in der Gleichung 138.

Wie ersichtlich, unterscheidet sie sich von der Funktion 88 lediglich durch noch einen weiteren Parameter, uzw. subtraktionellen Charakters.

Für den Fall $x = t$ wird ihr Minuend, wie aus 136 ersichtlich, gleich dem Subtrachenden und resultiert somit für diesen Fall der Betrag $y = o$. Im Alter t existiert also noch überhaupt kein Durchmesserbetrag in der Brusthöhe. Gleich hernach jedoch entstehend, wächst er unaufhörlich und konvergiert gegen einen endlichen Betrag $y = a - k$, der sich für $x = \infty$ ergeben müsste.

Wolte man die aufeinander folgenden Stammstärken am alleruntersten Schaftpunkte (eben im Bodenniveau) messen, so müsste man t in 136 und 137 durch o ersetzen, da für das Erreichen der noch ganz verschwindenden (eigentlich noch keiner) Höhe des betreffenden Punktes auch gar kein Altersbetrag notwendig war. Als Folge des gesagten Ersetzens ergäbe sich der Betrag $k = o$ und fiele somit der Ausdruck 138 zusammen mit dem Ausdrucke 88, welcher — wie gesagt — Geltung hat für das Dickenwachstum am alleruntersten Schaftpunkte.

Infolge des Parameters k ist natürlich die praktische Anwendung der Funktion 138 wesentlich erschwert der Funktion 88 gegenüber. Seinetwegen lässt sich ausserdem die Funktion 138 nicht mehr in solch eine lineare Form überführen, wie es bei der Funktion 88 der Fall ist.

F.) Die Gleichungen 8-a, 9 und 10 lassen noch eine allgemeinere Form zu, indem nämlich auch jedes x mit einem von der Einheit verschiedenen Exponenten dotiert werden kann. Diesen wollen wir allgemein mit $2s + 1$ ausdrücken. Dabei kann s vorderhand (wegen Zufriedenstellung der auf diese Weise erweiterten Gleichung 10), wenn auch nicht alle, so doch eine ganz gewaltige Anzahl positiver (ganzer oder auch gebrochener) Werte annehmen. Auf dieser Grundlage und mittelst der Integration (wie früher) folgt nun aus der in dieser Weise erweiterten Gleichung 9 bezw. 12 die Gleichung 139, die für den Fall $s = o$ in die einfachere Gleichung 13 zurück übergeht. Ein dem Vorgange, welcher uns zur Gleichung 17 führte, ganz ähnlicher Vorgang führt jetzt zur Gleichung 140 und diese selbst vereinfacht sich mittelst der Gleichung 141 auf die Gleichung 142.

Als Folge des Zusammenfallens der Maximalordinate mit der Ordinatenaxe ergibt sich hier auf bereits beschriebene Weise die Proportion 143. Im Sinne dieser letzteren stehen jetzt in der Relation $r_1 : r_2$ nicht mehr die Linearausdrücke g_1 und g_2 selbst, sondern ihre Potenzen. Weiterhin folgt aus der Gleichung 142 auch noch ein anderer Schluss, dass nämlich diese Potenzen auch als eigentliche Grenzen der Variabilität aufgefasst werden können. Doch sie müssen auch ja in dieser Weise aufgefasst werden, wenn die Funktion 142 jedenfalls asymmetrisch sein soll (was hier von ihr eigentlich auch erfordert wird). Wenn aber die Sache so steht, dann gilt nunmehr als eigentliches Argument nicht mehr das frühere (x), sondern seine Potenz. Mit Rücksicht darauf muss jetzt t nicht auf die der erwähnten Einschränkung von s entsprechenden Werte beschränkt sein, denn diese Einschränkung war ja nur bei symmetrischen Funktionen notwendig (um die in erwähnter Weise erweiterte Gleichung 10 zufriedenzustellen). Das einzige, was jetzt von t erfordert wird, ist die Positivität.

Unter diesen Umständen gilt für die derjenigen unter 21 analoge Transformation die einfache Gleichung 144. Aus ihr folgt weiter die Gleichung 145 und aus dieser (durch ähnliche Substitutionen wie bei 23) die Gleichung 146, d. h. die allgemeinere Form der Gleichung 24. Sie verwandelt sich (in ähnlicher Weise wie früher) in die Gleichung 147, d h. in die allgemeinere Form der Gleichung 44. Aus dieser wiederum, wenn sie in der Form 147-a angeschrieben wird, folgt mit Hilfe der bekannten Gleichung 148 (welche Geltung hat unter der Bedingung $D = \infty$) die Gleichung 149. Eine ganz einfache Umformung dieser letzteren führt weiterhin zur Gleichung 150. Solange nun die Bedingung $D = \infty$ besteht, ist die Gleichung 149 (und demzufolge auch 150) ganz identisch mit derjenigen unter 147-a (bezw. 147), die den Wert $y' = o$ ausser bei $x = o$ erst noch bei $x = \infty$ zur Folge hat. Die erwähnte Bedingung ist jedoch nicht die einzige, die bei den erwähnten Abszissenwerten zum Ordinatenwerte o führt. Derselbe Effekt kann nämlich erreicht werden auch bei ganz endlichen D- Werten,nur muss zu diesem Behufe gleichzeitig mit der Einführung von teilweise vereinfachenden Substitutionsausdrücken 151 auch noch (im Sinne der Ausführungen bei 49 bis 51) von ganz speziellen Substitutionsausdrücken 152 Gebrauch gemacht werden.

Hiermit gelangen wir zur Gleichung 153, die (wie ersichtlich) bei $d = 1$ sich in die Funktion 56 zurückverwandelt. Wird sowohl der Zähler als auch der Nenner dieser allgemeineren Form für die Funktion 56 mit dem Ausdrucke 154 dividiert, so gelangt man nach einigen einfachen Griffen zur Gleichung 155, von dieser widerum mit Hilfe der Substitutionsausdrücke 156 und 157 (in ähnlicher Weise wie früher) zur Gleichung 158 und zuletzt zur Gleichung 159, d. h. zur allgemeineren analytischen Form des Wachstumsgesetzes. Auf ähnliche Weise wie früher ergibt sich endlich in der Gleichung 160 auch die allgemeinere analytische Form des Dickenwachstumsgesetzes.

Die Parameterberechnung für die Funktion 159 verläuft analog derjenigen für die Funktion 88, nur ist natürlich die ganze Prozedur (wegen grösserer Parameteranzahl) hier noch langwieriger. Dafür ist aber die Anschmiegsamkeit hier weit besser als bei der vorigen (einfacheren) Funktionsform. Für voriges Beispiel betragen die Parameter dieser erweiterten Funktionsform wie folgt: a = 487·701.0464, b = 473·327.3355, c = 1·338.810.808, d = 1·569.983.831. Deren Berechnung erforderte 5 Wiederholungen, einerseits ihrer grösseren Anzahl wegen, anderseits auch infolge des Umstandes, dass bei den ersten 5 Berechnungen durchaus nur 7-stellige Logarithmentafeln in Anwendung waren, was natürlich die Präzision der Rechnung wesentlich beeinträchtigte. Die wesentlichsten (für uns hier) Ausgleichungsresultate befinden sich in der Tabelle 9. Nach den Angaben der 4. Spalte erreicht keine einzige Differenz nicht einmal den Betrag von 9 cm. Im Durchschnitte sind diese Resultate denjenigen aus der Tabelle 8 ähnlich, dabei wurden jedoch diejenigen mit weit weniger Zeit- und Müheaufwand erreicht.

In der Tabelle 10 bringe ich noch die Ausgleichungsresultate (nach dieser selben Funktion) für die V. Standortsklasse der gesagten G u t t e n b e r g'schen Ertragstafel (Nr. 16, S. 47), Die Parameterwerte sind jetzt : a = 334·241.3228, b = 90·378.343.14, c = 2·295.009.752, d = 1·126.763.791. Sämtliche Resultate für diese (V.) Standortsklasse verdanke ich meinem ehemaligen Assistenten Herrn Dr. N. N e i d h a r d t. Wie ersichtlich, hier erreicht die gesagte Differenz selbst den Betrag von 3 cm nirgends, was zugleich besagt, dass die betreffenden Höhenbeträge von G u t t e n b e r g besser ausgeglichen sind als diejenigen für die I. Standortsklasse. Ein Vergleich dieser letzteren Parameterwerte mit den obigen (für die I. Standortsklasse) zeigt noch, dass mit der Aenderung der Bonität sich natürlich auch alle Parameterwerte geändert haben, dass dabei jedoch die Aenderung von b diejenige aller übrigen Parameter verhältnissmässig weit überragt.

Hiermit ist selbstverständlich nicht gesagt, dass die Eigenschaft eines »Standortsweisers« nur diesem Parameter allein zugeschrieben werden sollte, da ja — wie ersichtlich — a l l e vier Parameter charakteristisch sind für die Standortsbonität. In w e l c h e r F o r m können sie jedoch a l l e vier — und dazu auch zugleich — am besten als Standortsweiser dienen?

Aus der vorigen Herleitung, uzw. von der Gleichung 153 her, können wir leicht konstatieren, aus welchen Bestandteilen der Parameter a beider letztangeführter Gleichungen besteht. Seinen vollen Ausdruck repräsentiert nämlich die Gleichung 161 und aus dieser ergibt sich unmittelbar die Gleichung 162 — den Multiplikationsparameter der Gleichung 153 darstellend. Dieser Parameter der Zuwachsfunktion 153, kurz dieser »Zuwachskoeffizient«, eignet sich also als Standortsweiser am besten, da er in gleicher Weise aus allen 4 Parametern der Gleichung 159 zusammengesetzt ist.

Aus den obigen konkreten Parameterwerten resultiert als Betrag des Zuwachskoeffizienten für die V. G u t t e n b e r g'sche Standortsklasse die rund genommene Zahl 78118. Für die I. Standortsklasse dagegen beträgt der Zuwachskoeffizient rund 485230, also über sechsmal (genauer 6.2 mal) mehr als für die V. Standortsklasse. Wie beträgt sich, diesem Zuwachskoeffizienten gegenüber, die Bestandesmittelhöhe als Standortsweiser?

Wird der einzelne h - Betrag aus der Tabelle 9 durch den ihm (dem Alter nach) entsprechenden h - Betrag aus der Tabelle 10 dividiert, so ergeben sich der Reihe nach die Werte: 4·08, 3·57, 3·34, 3·11, 2·96, 2·83, 2·71, 2·61, 2·51, 2·43, 2·36, 2·30, 2·25, 2·21, also Werte sowohl ungleiche untereinander als auch bedeutend geringere dem angeführten konstanten Werte 6.2 gegenüber. Nach der Methode der kleinsten Quadrate lässt sich ausserdem für den errechneten Zuwachskoeffizientenbetrag auch der Unsicherheitsgrad berechnen, der bekanntlich bedingt ist sowohl durch die Unregelmässigkeit der empirisch gegebenen h - Kurve als auch durch die Wirkung von Beobachtungsfehlern. Dagegen ist bekanntlich solche Berechnung bei der Bonitierung mittelst der Bestandesmittelhöhe nicht möglich.

Es dürfte also die Bonitierung mit Hilfe des angegebenen Zuwachskoeffizienten als wirksamer gelten der Bonitierung mittelst der Bestandesmittelhöhe gegenüber. Sie ist jedoch auch natürlicher als diese letztere in Anbetracht dessen, dass die Bestandesmittelhöhe (ebenso wie auch die Bestandesoberhöhe), auch bei ganz ungeänderter Standortsgüte, mit der Zeit sehr variert, während der auf Messungsergebnissen genügend fundierte Zuwachskoeffizient eine Änderung erleiden kann nur im Falle einer wesentlichen zeitweisen Bonitätsänderung.

Von praktischer Seite aus müsste man behufs Bonitierung mittelst des Zuwachskoeffizienten zu den Stammanalysen Zuflucht nehmen, sofern man über etwaige Bestandeshöhendata für verschiedene Alter nicht bereits verfügt. Die Stammanalysen könnten sich natürlich nur auf Höhenanalysen für eine gewisse (ständig genommene) Anzahl stärkster Bäume beschränken. Zu den stärksten müssen bekanntlich die betreffenden Bäume gehören wegen möglichster Ausscheidung des Standraumeinflusses. In Plenterbeständen müsste natürlich nur das wirtschaftliche Baumalter in Rechnung gezogen werden.

Statt der Funktion 159 dürfte zu diesem Behufe (der Arbeitskürzung wegen) auch die aus ihr unter der Bedingung $c = 1$ erfolgende Funktion 163 sich ganz gut eignen. Diese letztere erscheint auch der Funktion 88 gegenüber als praktischer. Ausserdem dürfte sie auch sonst etwas besser hierzu geeignet sein als die Funktion 88. Die Funktion 91 dagegen ist hierzu überhaupt nicht geeignet, abgesehen von dem Umstande, dass bei der Berechnung ihrer Parameter mit Hilfe derjenigen für die Funktion 94 nicht eigentlich die Baumhöhen bezw. die Baummassen selbst einer Ausgleichung unterzogen werden, sondern ihre reziproken Werte und dass dieser Umstand ab und zu auch ganz störend sein kann.