Prof. Dr. Nikola Neidhardt:

Prilog teoriji logaritmičkog računala

Ein Beitrag zur Theorie des Logaritmischen Rechenschiebers

Logaritmička računala (logaritmari) se upotrebljavaju po čitavoj kugli zemaljskoj u milijonima primjeraka. Naročito su ih za svoje kalkulacije prigrlili inženjeri sviju struka.

Firme, koje proizvode računala, nastoje sve novijom i novijom izradbom da s jedne strane povećaju točnost a s druge da što više zadovolje zahtjevima priručnosti i praktičnosti. Neke firme su prešle na nove materijale, kako bi računala bila što manje osjetljiva na promjene temperature, vlage itd. Ti novi materijali su ili metalne legure ili derivati mokraćne kiseline ili zasebne mase iz drveta. Tako je na pr. firma Faber prešla na jednu masu iz vrlo tankih slijepljenih drvenih lamelica.

U želji, da istražim, s kolikom bi se točnošću nova računala mogla upotrebljavati za računanje koordinatnih razlika u poligonskim vlacima,[1] nabavio sam za Kabinet za geodeziju na Poljoprivredno-šumarskom fakultetu u Zagrebu jedno novo Faberovo računalo 50 cm dugačko. Računalu je bio priložen štampani izvadak iz izvještaja Obrtne škole u Nürnbergu, u kome se kaže, da je materijal ispitan i ustanovljena srednja čvrstoća na savijanje od 2450 kg/cm², a promjenljivost dužine skala kod promjena temperatura od —20°C do +50°C i zračne vlage od 0% do 95% da je ustanovljena sa ± 0,01 mm.

U vezi s tim logaritmičkim računalom želim ovdje da provedem neka razmatranja.

Obično se uzima da je točnost procjenjivanja na logaritmaru svuda jednaka t. j. na pr. 0,1 mm. Ako dakle procijenjujem dijelove kojeg bilo intervala na skalama računala, da ih procijenjujem na 0,1 mm točno. Onda relativna pogreška namještanja brojeva na logaritmaru ispada također konstantnom.[2]

Osnovne skale računala predstavljaju funkcijsku skalu $y = \log x$. Naše računalo je 500 mm dugačko, dakle veličini $y = 1$ odgovara 500 mm. Označimo li sa Δy pogrešku u y, koja bi odgovarala dužinskoj pogrešci od 0,1 mm, dobivamo:

---

[1] Vidi moj članak: »Računanje koordinatnih razlika kao i nekih drugih izraza s logaritmičkim računalom«, Šumarski List, Zagreb, 1941.

[2] Vidi knjigu Ing. Boris Apsen: »Logaritamsko računalo«, Zagreb, 1934.

$$\Delta y = \frac{0{,}1}{500} = \frac{1}{5000},$$

jer bi pogrešci od 500 mm odgovarala u y-u pogreška *1*.

Pita se, koja pogreška u x t. j. u n u m e r u s u odgovara pogrešci Δy t. j. kolika je pogreška broja, koji se postavlja na logaritmaru, ako je pogreška procjenjivanja 0,1 mm.[2] Diferenciranjem izraza $y = \log x$ dobivamo:

$$dy = \frac{M}{x}\,dx,$$

gje je $M = 0{,}43429$ — modul Briggsovih logaritama. Za male konačne iznose Δy i Δx vrijedit će isti odnos, dakle:

$$\Delta y = \frac{M}{x}\Delta x.$$

Odatle se dobiva:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{0{,}434}\,x,$$

odnosno za relativnu pogrešku numerusa:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{0{,}434}.$$

Uvrstimo li za Δy konstantan iznos, na pr. gore izvedenih $\frac{1}{5000}$, dobivamo za naše 500 mm dugačko računalo:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{5000 . 0{,}434} = \frac{1}{2170} \doteq 0{,}465\,‰ \qquad \ldots . 1)$$

Da li to odgovara našem računalu? Da to ispitam, upotrebio sam poređenje s i n u s - skale sa o s n o v n o m nepomičnom skalom računala. *Sin*-skala se nalazi na poleđini izvlake (jezika). Izvukao sam izvlaku, obrnuo ju i tako opet smjestio u uvlaku, da je *sin*-skala došla t i k u z osnovnu nepomičnu skalu. U tome slučaju *sin*-skala postaje protusmjerna, njene brojke su naglavce, dakle ta skala onda predstavlja iznose $\frac{1}{sin}$. Uravnao sam zatim što bolje početak i svršetak *sin*-skale na svršetak i početak osnovne nepomične skale. U tom položaju sam za razne crtice *sin*-skale čitao odnosno procjenjivao pripadna očitanja t. j. vrijednosti $\frac{1}{sin}$ na osnovnoj nepomičnoj skali. Dakle to su čitanja iz određenih crtica *sinus*-skale na osnovu nepomičnu skalu sa procjenjivanjem dijelova na potonjoj skali. Procjena je najprije izvršena za slijedeće crtice *sin*-skale: 80°, 75°, 70°,... 15°, 10°, 8°, 7° i 6°. Procjenjivano je ne samo na desetinke intervala osnovne nepomične skale već i na stotinke, premda je procjenjivanje stotinki zapravo skroz subjektivno. Procijenjene vrijednosti usporedjene su zatim sa ispravnim iznosima $\frac{l}{sin}$ koji su izračunani pomoću prirodnih vrijednosti sinusa iz Rühlmannovih šesteroznamenkastih tablica.[3]) Izračunana su relativna (promilna) odstupanja očitanih iznosa od ispravnih vrijednosti.

Tablica I.

Crtica na *sin* — skali	Opservator						
	N.			*To.*		*M.*	*Tu.*
	serija opažanja						
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	odstupanja *v* u promilama						
°							
80	+0,39	+0,20	+0,18	−0,20	−0,29	+0,09	+0,10
75	0,00	+0,19	−0,10	−0,19	−0,29	−0,19	−0,19
70	0,00	0,00	−0,19	−0,19	−0,09	−0,19	+0,47
65	−0,27	+0,09	−0,36	−0,39	−0,63	−0,36	+0,36
60	−0,17	+0,09	−0,26	+0,36	+0,09	+0,17	+0,17
55	0,00	+0,16	+0,08	+0,16	−0,25	+0,17	−0,16
50	0,00	+0,26	−0,15	+0,46	−0,31	+0,08	−0,23
45	−0,14	−0,14	−0.14	−0,14	0,00	−0,14	−0,07
40	+0,19	+0,19	−0,07	+0,19	−0,32	−0,13	+0,19
35	+0,34	+0,23	+0,23	−0,23	−0,29	+0,29	−0,06
30	0,00	0,00	0,00	0,00	−0,05	0,00	−0,05
25	+0,34	+0,34	+0,30	−0,08	−0,08	+0,34	+0,34
20	+0,24	+0,14	+0,20	+0,07	+0,07	+0,07	+0,07
15	+0,34	+0,28	+0,35	+0,08	+0,08	+0,34	+0,08
10	+0,19	+0,23	+0,21	+0,23	+0,17	+0,23	+0,05
8	+0,07	+0,07	+0,10	+0,35	−0,04	−0,07	−0,21
7	+0,06	+0,18	+0,30	+0,30	−0,06	+0,18	−0,06
6	+0,14	+0,15	+0,03	+0,15	−0,39	+0,04	+0,04
$\frac{[v]}{n}=$	+0,96	+0,146	+0,039	+0,048	−0,149	+0,051	+0,047
$[vv]=$	0,7782	0,6204	0,7795	1,0458	1,1328	0,7226	0,7298
$\frac{[vv]}{n}=$	0,0432	0,0344	0,0433	0,0581	0,0630	0,0402	0,0406
$m=$	±0,208	± 0,185	0,208	0,241	± 0,251	0,200	0,202

[3]) Dr. Moritz Rühlmann: »Logaritmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln«, 16. Aufl., Leipzig 1922.

Analogna opažanja su provedena od 4 razna opservatora. Svaki je pri tome za svoje pojedine serije opažanja (tablica I) ponovno namještao početnu i završnu crticu sin-skale na početnu i završnu crticu osnovne nepomične skale. Ja sam bio prvi opservator *(N)*, drugi *(T)* je bio g. Ing. Zdenko Tomašegović, asistent Kabineta za geodeziju na Poljoprivredno-šumarskom fakultetu, treći *(M)* slušač šumarstva g. Ivan Markovac, četvrti *(T)* slušač šumarstva g. Josip Tumbri. Promilna odstupanja sviju tih opažanja svrstana su u tablici I. Napominjem da su spomenuti opservatori (osim mene) kod tih opažanja zapravo prvi puta čitali na opisanom 50 cm dugačkom računalu. Čitanja su vršena bez pomoći indeksa pomicaljke.

Izmedju sviju tih 126 opažanja samo 2 prekoračuju pod 1) izvedeni iznos od ± 0,465‰. Od ta dva opažanja jedno ima upravo pogrešku 0,47‰, a drugo 0,63‰. Potonje je možda gruba pogreška, jer je skoro tri puta veća od srednje pogreške, koja se izračuna iz sviju 126 opažanja. Iz sviju opažanja naime izlazi srednja pogreška ± 0,215‰. Ako u petoj seriji opažanja ispustimo pogrešku od 0,63‰, dobivamo za srednju pogrešku u toj seriji ± 0,208‰, a iz sviju 125 opažanja ± 0,210‰. Dakle procjenjivanje iz odredjenih crtica *sin*-skale na glavnu skalu ispalo je sa srednjom pogreškom od ± 0,21‰. To je manje od polovice pod 1) izvedenog iznosa od ± 0,465‰.

Kod prikazanih serija opažanja začudjuju male razlike izmedju srednjih pogrešaka pojedinih serija (0,208‰, 0,185‰, 0,208‰, 0,241‰, 0,251‰, 0,200‰, 0,202‰), premda su te serije provedene od 4 razna opservatora.

Ne smijemo zaboraviti da srednje pogreške iz tablice I sadrže u sebi više izvora pogrešaka t. j. na pr. pogrešku koincidiranja početne i završne crtice sin-skale sa pripadnim crticama osnovne skale, pogreške podjeljenja osnovne skale i podjeljenja sin-skale te sistematske i slučajne pogreške procjenjivanja dijelova intervala na osnovnoj skali.

Ako dakle hoćemo zadržati teoriju o konstantnoj relativnoj srednjoj točnosti čitanja brojeva na računalu, morali bi za naš slučaj iznos ± 0,465‰ odnosno iznos od ± 0,1 mm u procjenjivanju smatrati n e s r e d n j i m, već skoro maksimalnim. Srednjoj pogrešci od 0,215‰ bi po istoj teoriji odgovarala srednja pogreška u procjenjivanju od ± 0,046 mm. Kad bi se za procjenjivanje upotrebio indeks na pomicaljki računala, vjerojatno bi ispale veće srednje pogreške, što bi još trebalo ispitati. Indeks naime nikad nije sasvim u ravnini skale, pa nastaje izvjesna paralaksa, kad se s njime čita.

Srednja pogreška od ± 0,215‰ svjedoči ne samo o mogućnosti razmjerno finog procjenjivanja na osnovnoj nepomičnoj skali računala, već još i više o visokoj kvaliteti te skale, a i kvaliteti položaja crtica sin-skale. Pogreška od $\pm 0{,}046$ mm mogla bi se nekako sastojati iz ovih komponenata:

pogreška u položaju početne crtice osnovne skale cca $\pm 0{,}01$ mm
pogreška početne crtice sin-skale cca . . . . $\pm 0{,}01$ mm
pogreška koincidiranja obiju tih crtica cca . . . . $\pm 0{,}02$ mm
pogreška crtice sin-skale, za koju se vrši čitanje cca $\pm 0{,}01$ mm
pogreške obiju crtica osnovne skale, izmedju kojih se vrši procjenjivanje 2 puta po 0,01 mm . . . . $\pm 0{,}01$ mm
pogreška procjenjivanja unutar toga intervala cca $\pm 0{,}03$ mm

Sve to skupa bi davalo rezultantnu srednju pogrešku u dužini od cca

$$\sqrt{5 \cdot 0{,}01^2 + 0{,}02^2 + 0{,}03^2} = \pm 0{,}043 \text{ mm.}$$

Namiče se pitanje: zar je zbilja točnost na raznim mjestima skale jednaka? Zar na točnost procjenjivanja ne djeluje veličina intervala, unutar kojega se procijenjuje? Poznato je, da su intervali na raznim mjestima skale različito dugački.

Kod promatranog Faberovog računala su intervali *sin*-skale naročito veliki. Intervali na osnovnoj skali su daleko manji. Osnovna skala ima po cijeloj svojoj dužini 750 intervala, dok ih sin-skala ima samo 234, dakle manje od trećine. Intervali sin-skale su dakle prosječno 3 puta duži od intervala osnovne nepomične skale. Da li i koliki to upliv ima na procjenjivanje intervalnih dijelova? Zar se i kod ovako velike razlike u intervalima može uzeti da je točnost procjenjivanja u apsolutnom dužinskom iznosu odnosno u relativnom iznosu numerusa na raznim dijelovima skala konstantna ili bar približno konstantna?

Dužine pojedinih intervala na računalu je lako izračunati. Na osnovnoj skali od 1 do 2 odnosno od 1000 do 2000 najmanji intervali vrijede po 5, od 2 do 5 odnosno od 2000 do 5000 vrijede po 10, a od 5 odnosno 5000 do kraja skale vrijede po 20. Interval od 1000 do 1005 je dugačak: (log 1005 — log 1000) 500 mm = 1,083 mm, onaj izmedu 1995 i 2000 je 0,435 mm, između 200 i 201 je 1,083 mm, između 499 i 500 je 0,435 mm, između 500 i 502 je 0,867 mm, a između 998 i 1000 je 0,434 mm.

Na sinus-skali je podjeljenje od 80° do 60° u jediničnim stupnjevima, od 60° do 40° u polovicama stupnjeva, od 40° do 20° u trećinama (20'), od 20° do 10° u šestinkama stupnjeva (10') a od 10° do 5°44' u dvanajstinama (5'). Najkraći interval na toj skali našeg 50 cm dugačkog računala je između crtica 80° i 79°, naime: (log sin 80° — log sin 79°) 500 mm = 0,702 mm. Za ilustraciju iznosim dužine i nekih daljnjih karakterističnih intervala sinusskale istog računala. Na pr. inverval između 60° i 61° je 2,145 mm, između 60° i 59°30' je 1,105 mm, između 40° i 40°30' je 2,235 mm, između 40° i 39°40' je 1,515 mm, između 20° i 20°20' je 3,440 mm, između 20° i 19°50' je 1,745 mm, između 10° i 10°10 je 3,550 mm, između 10° i 9°55' je 1,800 mm. Najduži interval je između 5°50' i 5°44' t. j. 3,74 mm.

Da se u glavnom ispita, kako dužina intervala djeluje na procjenjivanje dijelova unutar intervala, izvršene su daljnje dvije serije opažanja na opisanom Faberovom računalu. Prva serija je sastojala iz čitanja za sve crtice sinus-skale na osnovnu nepomičnu skalu, a druga obratno od izvjesnih crtica osnovne nepomične skale na sinus-skalu. Prva serija čitanja sadrži procjenjivanja unutar manjih intervala, naime procjenjivanja unutar raznih intervala osnovne skale, dok druga serija procjenjivanja unutar znatno većih intervala sinus-skale. Kako se ne bi uvukle grube pogreške kod procjenjivanja na sinus-skali, čitane i upisivane su desetinke i stotinke pojedinih intervala, pa su ta čitanja kasnijim odgovarajućim množenjem pretvarana u minute i desetinke minuta. Za ovako dobivene kuteve izračunane su pomoću Rühlmannovih tablica vrijednosti $\frac{1}{\sin}$ i uspoređene sa vrijednostima pripadnih crtica osnovne skale, odnosno izračunata su promilna odstupanja.

Opservator kod te dvije serije opažanja je bio g. Ing. Z. Tomašegović. Kako rekoh, na osnovnoj skali su čitana očitanja za sve crtice (njih 232, jer za krajnje nije čitano) sinus-skale, dok su obratno od osnovne nepomične na sinus-skalu izvršena čitanja samo za izvjesne crtice osnovne skale i to za: 101, 102, . . . 200, 205, 210, . . . 500, 510, 520, . . . 980, dakle u drugoj seriji u svemu 208 opažanja.

Iz 232 opažanja prve serije (iz skale sin na osnovnu) dobivena je srednja pogreška pojedinog opažanja $\pm$ 0,21‰, što se vrlo dobro slaže sa rezultatima iz tablice I. Obratno iz 208 opažanja iz odredjenih crtica osnovne skale na sin-skalu dobivena je srednja pogreška pojedinih opažanja $\pm$ 0,384‰, dakle gotovo dvostruko više.

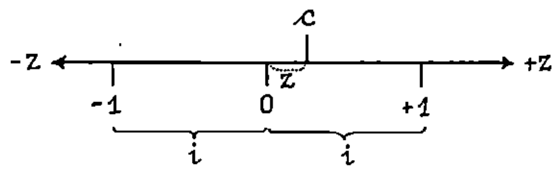
Koji je razlog velikoj razlici u točnosti opažanja s jedne strane iz crtica skale sin na osnovnu i s druge obratno iz određenih crtica osnovne skale na skalu sin. Mora da je razlog u tome, što skala sin ima znatno veće intervale. Uzrok većoj srednjoj pogrešci ne može biti u eventualnoj većoj netočnosti položaja crtica sin-skale, jer kod obe serije opažanja s jedne strane iz crtica sin-skale na osnovnu i s druge strane obratno djeluju pogreške netočnosti obiju skala.

Moramo dakle napustiti pretpostavku da se na skalama procijenjuje s približno jednakom srednjom apsolutnom dužinskom pogreškom odnosno jednakom srednjom relativnom pogreškom numerusa, jer na točnost ima neminovno znatnog upliva i veličina skalnih intervala, unutar kojih se procijenjuje odnosno očitava.

Pretpostavka, da je točnost procjenjivanja na raznim mjestima skale u glavnom ista, može da zadovolji široku praksu, ali ne može da zadovolji teoriju. Kod teoretskih razmatranja treba tu pretpostavku zamijeniti kojom drugom, koja bi davala veće približnosti.

Ako je točnost ovisna o veličini intervala, onda se možda može uzeti, da je srednja dužinska pogreška procjenjivanja jednaka alikvotnom — na pr. n-tom — dijelu intervala, unutar kojega se procijenjuje, dakle veći interval da daje razmjerno veću, a manji razmjerno manju srednju pogrešku.

Uzmimo neki proizvoljan interval i (sl. 1). Pretpostavimo zasada, da ne procijenjujemo dijelove intervala, već da čitamo odnosno zaokružujemo na rubne vrijednosti intervala. Ako je crtica c, za koju treba izvršiti čitanje, ispred polovice intervala, zaokružimo očitanje na niže (u našem slučaju slike 1 na nulu), a ako je preko polovice, onda na više (kod nas na ± 1). Kolika je onda srednja pogreška takovog rada? Očito je $0{,}5i$ maksimalna pogreška. Svaki položaj između $-0{,}5i$ i $+0{,}5i$ uzima se kao nula. Svaki takav položaj je jednako vjerojatan.



Sl. 1.

Zamislimo u točki 0 ishodište koordinatnog sustava, a u pravcu skale jednu os (z) tog sustava. Onda je za proizvoljan položaj crtice c (između $-0{,}5i$ i $+0{,}5i$) pogreška čitanja, odnosno točnije pogreška zaokruživanja, jednaka z, a kvadrat te pogreške z^2. Pošto je položaj crtice c jednako vjerojatan između $-0{,}5i$ i $+0{,}5i$, kvadrat srednje pogreške iz sviju mogućih odstupanja bit će:

$$m^2 = \frac{1}{i}\int_{-0{,}5i}^{+0{,}5i} z^2\,dz = \frac{2}{i}\int_{0}^{0{,}5i} z^2\,dz = \frac{2}{i}\left|\frac{z^3}{3}\right|_{0}^{0{,}5i} \qquad \ldots .2)$$

$$m^2 = \frac{2}{i}\,\frac{0{,}125\,i^3}{3} = 0{,}0833\,i^2$$

$$m = \pm\,0{,}289\,i \doteq \pm\,0{,}3\,i \qquad \ldots .3)$$

Ako dakle čitam samo pune crtice, srednja pogreška je cca 0,3 čitavog intervala. Maksimalna pogreška se obično uzima trostruko većom, ona bi dakle iznosila $\pm 0{,}9i$.

Zbog jednostavnosti sam najprije uzeo, kao da se zaokružuje na krajnje crtice intervala i. Međutim, ako se uzme, da se sa sigurnošću procijenjuju desetinke intervala i, onda se analogno može izvesti da srednja pogreška takovog procjenjivanja iznosi $\pm 0{,}03\,i$. U izrazu 2) se naime u tome slučaju mijenjaju samo granice t. j. smanjuju se na desetine svojih vrijednosti, pa izraz za m^2 glasi:

$$m^2 = \frac{1}{0{,}1\,i} \int_{-0{,}05\,i}^{+0{,}05\,i} z^2\,dz = 0{,}000833\,i^2,$$

odakle se dobiva:

$$m \doteq \pm\,0{,}03\,i \qquad \ldots .4)$$

ili posve općenito:

$$m = \pm\,k\,i \qquad \ldots .5)$$

gdje je koeficijent k ovisan o granicama integrala.

Kolikogod izgledalo vjerojatno, da je srednja pogreška procjenjivanja linearna funkcija ki intervala i, ipak ni ta pretpostavka ne može teoretski posve zadovoljiti. Promotrimo ekstremne slučajeve. Uzmimo prvo da i konvergira prema ∞. U tome slučaju će i srednja pogreška konvergirati prema ∞, što posve odgovara, jer unutar neizmjerno velikog intervala ne mogu govoriti o bilo kakovoj točnosti ili sigurnosti procjenjivanja. Naprotiv u drugom ekstremu, kad veličina intervala i konvergira prema nuli, morala bi srednja pogreška m po formuli ki također konvergirati prema nuli, što ne odgovara. Zamislimo naime logaritmar stalne dužine, ali sa beskonačno malim intervalima. Sve crtice mu se onda pretapaju u jedno crno polje. Po teoriji $m = ki$ bi takav logaritmar imao davati posve ispravne rezultate, t. j. $m = 0$. Ali, kad bi sve crtice pale zajedno, ne bi se u opće moglo procjenjivati, nesigurnost procjenjivanja bi dakle bila velika, a ne nula.

Točnost procjenjivanja je svakako u funkcionalnom odnosu spram veličine intervala i, ali vjerojatno ne u jednostavnom linearnom, kao u izrazu ki, već u kompliciranijem odnosu.

Vjerojatno postoji izvjestan interval, za koji je srednja pogreška procjenjivanja najmanja, a ako je interval veći ili manji od tog optimalnog, da je srednja pogreška veća.

Spomenute dvije serije opažanja g. Ing. Z. Tomašegovića iz crtica sin-skale na osnovnu (232 opažanja) i obratno iz izvjesnih crtica osnovne na sin-skalu (208 opažanja) obradio sam na slijedeći način. Izračunao sam dužine intervala, unutar kojih su pala pojedina čitanja. Na pr. čitanje na osnovnoj skali za crticu 63^0 sin-skale bilo je 11221, dakle to čitanje je palo u interval između 1120 i 1125, koji je dugačak (log 1125 — log 1120) 500 mm = 0,97 mm. Sva promilna

Tablica II.

Intervalni razredi		Opservator											
		T_0				M				N			
i	od — do	$[vv]$	n	m^2	$\pm m$	$[vv]$	n	m^2	$\pm m$	$[vv]$	n	m^2	$\pm m$
m/m	m/m				‰				‰				‰
0,5	0,45—0,55	0,904	34	0,0266	0,168	0,816	34	0,0240	0,155	1,363	34	0,0401	0,200
0,6	0,55—0,65	1,572	53	0,0296	0,172	1,461	54	0,0271	0,165	2,608	53	0,0492	0,222
0,7	0,65—0,75	1,674	51	0,0328	0,181	1,370	50	0,0274	0,166	1,748	51	0,0343	0,185
0,8	0,75—0,85	1,123	32	0,0351	0,187	0,633	32	0,0198	0,141	0,875	31	0,0282	0,168
0,9	0,85—0,95	2,263	30	0,0754	0,274	1,092	30	0,0364	0,191	0,985	29	0,0360	0,190
1,0	0,95—1,05	3,065	34	0,0902	0,302	1,385	35	0,0396	0,199	1,445	34	0,0425	0,206
1,17	1,05—1,30	0,348	7	0,0497	0,223	0,798	7	0,1140	0,338	9,024	232	0,0389	0,197
1,4	1,30—1,50	0,481	9	0,0534	0,231	0,543	9	0,0603	0,246				
1,6	1,50—1,70	1,273	21	0,0607	0,246	1,213	21	0,0578	0,240				
1,8	1,70—1,90	3,147	32	0,0984	0,314	1,812	32	0,0567	0,238				
2,0	1,90—2,10	3,331	34	0,0981	0,314	2,243	34	0,0660	0,257				
2,2	2,10—2,30	4,138	26	0,1590	0,399	1,812	27	0,0672	0,260				
2,4	2,30—2,50	2,821	17	0,1660	0,407	1,329	16	0,0831	0,289				
2,6	2,50—2,70	3,514	16	0,2196	0,468	1,547	15	0,1031	0,321				
2,8	2,70—2,90	1,197	12	0,0997	0,316	1,725	13	0,1328	0,364				
3,0	2,90—3,10	4,854	16	0,3030	0,551	1,367	17	0,0804	0,284				
3,2	3,10—3,30	3,276	7	0,4680	0,684	0,880	5	0,1759	0,419				
3,4	3,30—3,50	1,215	6	0,2023	0,450	0,769	6	0,1283	0,358				
3,6	3,50—3,70	0,008	1			0,008	1						

odstupanja, koja pripadaju približno istim veličinama intervala, svrstao sam zajedno. Na pr. sva promilna odstupanja, koja pripadaju invervalima od 0,75 mm do 0,85 mm, svrstao sam u razred *i = 0,8 mm*. Razredi su uzeti, kako je u skrižaljci *II* navedeno. Razredi od 0,5 mm do 1,0 mm su široki po 0,1 mm i pripadaju gotovo isključivo osnovnoj skali. Naprotiv na sin-skali su skoro sva čitanja bila u intervalima većim od 1,0 mm. Dakle razredi preko 1,0 mm pripadaju čitanjima na sin-skali. Kod svrstavanja odstupanja za čitanja na sin-skali su veći razredi, t. j. po 0,2 mm široki. Dakle na pr. u razred *1,6 mm* su uvršteni svi intervali između 1,5 mm i 1,7 mm, u razred *1,8* svi intervali između 1,7 mm i 1,9 mm itd. Razred *1,17 mm* obuhvata sve intervale unutar granica 1,05 mm i 1,30 mm. Taj razred predstavlja prelaz između 0,1 mm širokih razreda (do 1,0 mm) i 0,2 mm širokih (preko 1,0 mm).

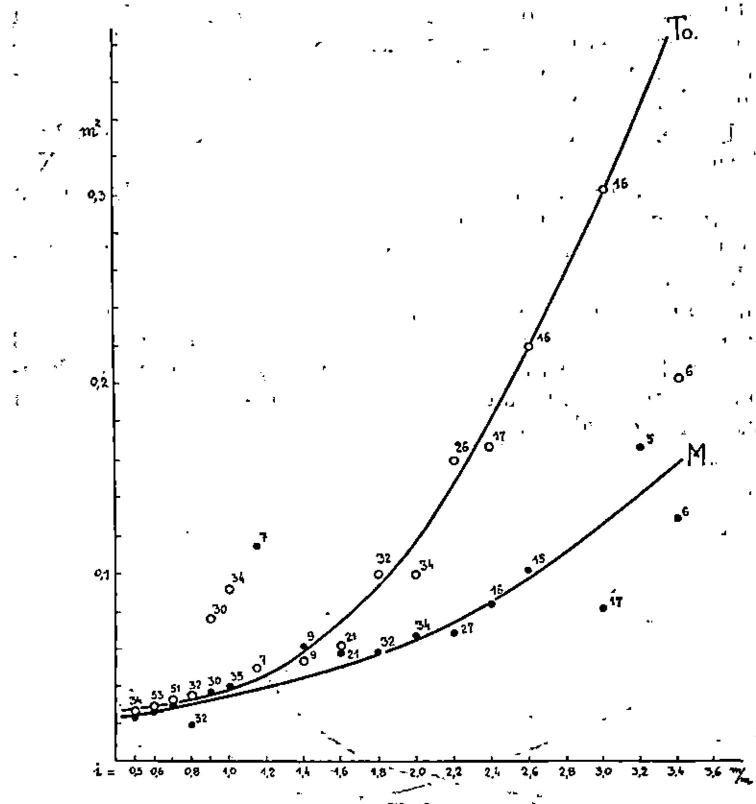
Tablica *II* daje zbrojeve kvadrata promilnih odstupanja $[vv]$ unutar pojedinih razreda, zatim brojeve opažanja (n) unutar tih razreda, kvadrate srednjih pogrešaka $m^2 = \frac{[vv]}{n}$ u pojedinim razredima i srednje pogreške $m = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$.

Vidimo, da srednja pogreška u glavnom raste s veličinom intervala. Za opažanja g. Tomašegovića i intervalni razred *0,5 mm* t. j. za intervale 0,45 mm do 0,55 mm iznosi oko 0,16‰, za intervalni razred *0,6 mm* iznosi 0,17‰ itd.

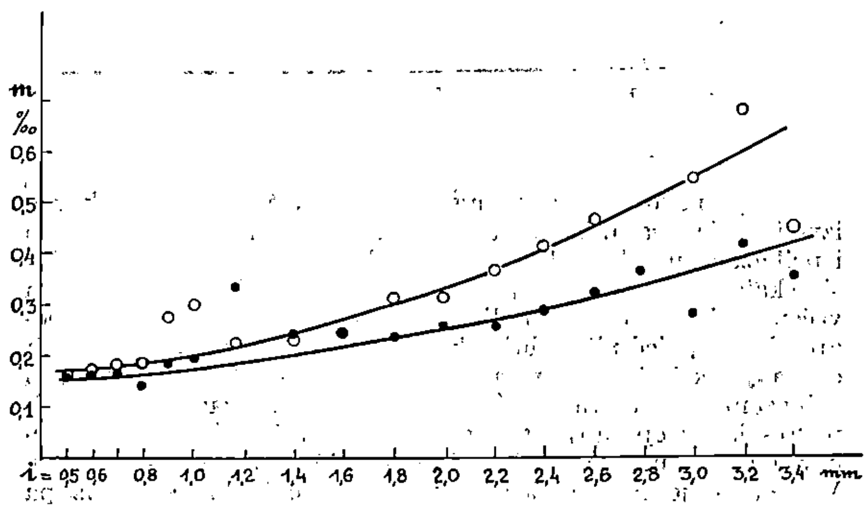
Posve analogna čitanja (kakva je proveo g. ing. Tomašegović) iz sviju crtica sin-skale na osnovnu (232 opažanja) i obratno iz spomenutih izvjesnih crtica osnovne na sin-skalu, (208 opažanja), proveo je i slušač šumarstva g. I. Markovac. I odstupanja iz tih opažanja su svrstana u razrede i prikazana u tablici II. I ja sam proveo jednu seriju opažanja, ali samo iz crtica sin-skale na osnovnu nepomičnu skalu (232 opažanja). Rezultati su također prikazani u tablici II.

Sl. 2 prikazuje grafički rezultate tablice II za opservatore gg. Tomašegovića i Markovca. Kao apscise su prikazane dužine intervala (intervalni razredi), a kao ordinate kvadrati pripadnih srednjih pogrešaka. Dobivene točke po opažanjima g. Ing. Tomašegovića označene su kružićima, a po opažnjima g. Markovca točkicama. Upisani brojevi označuju težine t. j. brojeve opažanja, iz kojih su dotične srednje pogreške izračunate. Na temelju nanesenih točaka u sl. 2 povučene su dvije krivulje. Prva je označena sa *To* i povučena je na bazi opažanja g. Ing. Tomašegovića, druga je označena sa *M* i povučena na bazi opažanja g. Markovca.

Iz sviju opažanja g. Markovca na osnovnoj skali izlazi srednja pogreška ± 0,168‰, dakle povoljnije nego iz ijedne se-


To.
M.
m^2
0,3
0,2
0,1
i = 0,5 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,2 3,4 3,6 ‰

Sl. 2.

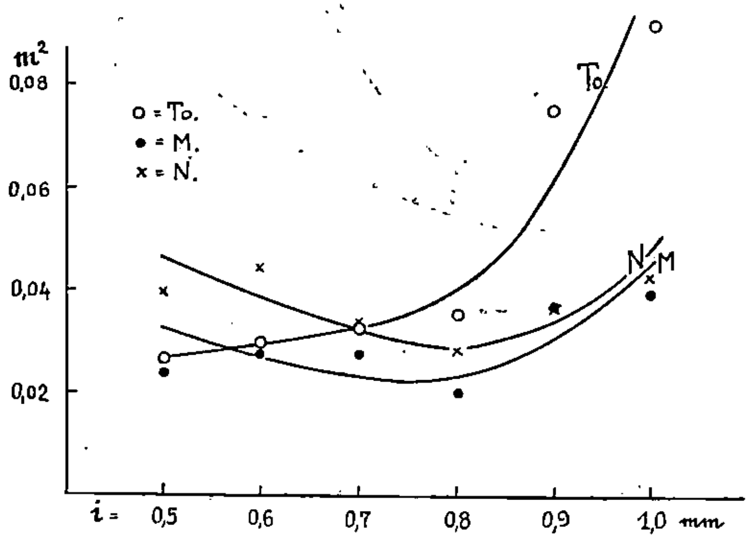

m
‰
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
i = 0,5 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,2 3,4 mm

Sl. 3.

rije tablice I. Isto tako iz svih 208 opažanja g. Markovca na sin-skali izlazi srednja pogreška $\pm$ 0,280‰. Tako povoljna točnost opažanja ima se vjerojatno pripisati opservatorovim zdravim i mladim očima.

U sl. 2 je — kako je rečeno — prikazan funkcionalni odnos kvadrata srednje pogreške spram veličine intervala. Naprotiv u sl. 3 je prikazan odnos same srednje pogreške spram veličine intervala. Vidimo, da taj odnos nije linearan, premda bi se lako mogao zamijeniti pravcem, naročito kod opažanja g. Markovca.

Gore sam spomenuo da obzirom na točnost procjenjivanja vjerojatno mora postojati optimalni interval. Iz sl. 2 i 3 izgleda kao da taj optimalni interval još nije postignut na konkretnom računalu, kao da je on manji od sviju intervala na ispitivanom računalu.



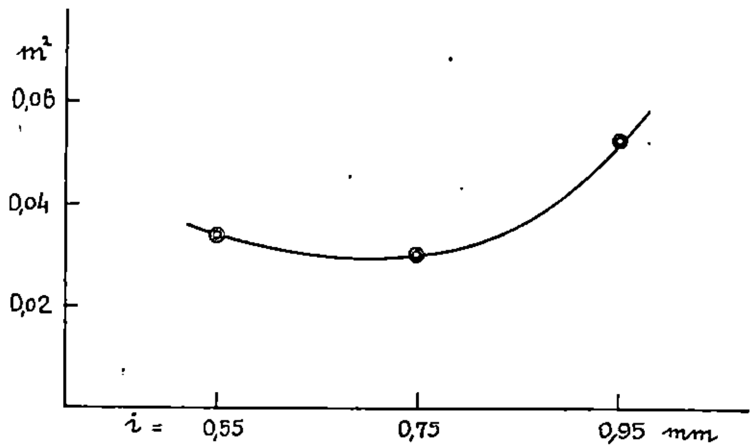
Sl. 4.

Prije, nego što su g. Ing. Tomašegović i g. I. Markovac izveli svoja opažanja, ja sam takodjer — kako je gore rečeno i prikazano u tablici II — izveo jednu seriju iz crtica (sviju) sin-skale na osnovnu nepomičnu skalu. U slici 4 su u nešto većem mjerilu nego li u slici 2 naneseni kvadrati srednjih pogrešaka iz pojedinih debljinskih intervalnih razreda tih mojih opažanja (križići i krivulja *N*). Isto tako su u toj slici ponovno prikazani za intervalne razrede do 1,0 mm kvadrati srednjih pogrešaka iz opažanja g. Ing. Tomašegovića *(To)* i g. I. Markovca *(M)*. Opažnja g. Tomašegovića očituju rubni minimum. Vjerojatno je to zato, jer je g. Tomašegović kratkovidan, pa točnije procijenjuje unutar manjih intervala. Naprotiv moja opažanja pokazuju izvjestan minimum kod 0,8 mm dugačkih intervala. Iz opažanja g. Markovca bi se takodjer moglo uzeti kao da je minimum srednje pogreške možda kod intervala 0,8 mm.

Tablica III.

i	Opservator			
	$o + M + N$			
	$[vv]$	n	m^2	$\pm m$
				‰
0,55	8,724	262	0,0333	0,182
0 75	7,423	247	0,0300	0,173
0,95	10,235	192	0,0534	0,231

Tablica III daje intervale do 1,0 mm svrstane u nove nešto veće razrede i to za sva tri spomenuta opservatora zajedno. U prvi razred su uzeti raniji razredi 0,5 mm i 0,6 mm, u drugi raniji razredi 0,7 mm i 0,8 mm, u treći 0,9 mm i 1,0 mm. Minimum je u srednjem razredu, dakle kod 0,8 i 0,7. Slika 5 to prikazuje grafički.



Sl. 5.

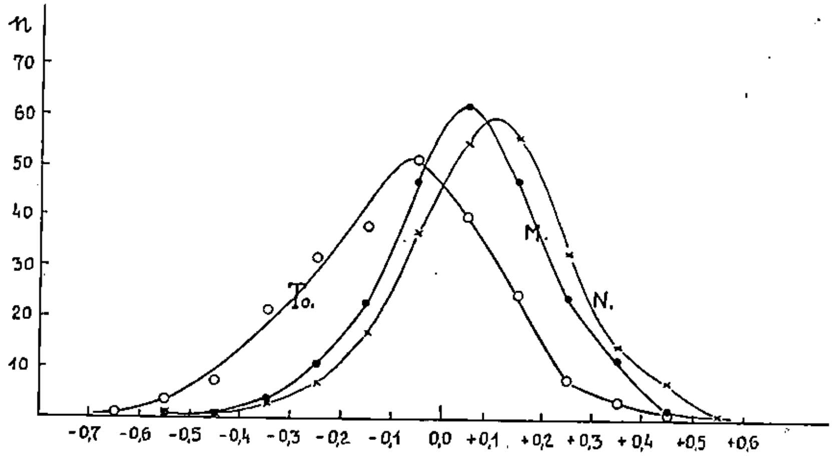
Premda izgleda prilično vjerojatno, da postoji optimalna dužina intervala, dakle krivulje pogrešaka da imaju izvjestan minimum i da su im ordinate kako za veće tako i za manje intervale od optimalnog veće nego za optimalni, ipak pitanje optimalnog intervala ne smatram na temlju izvedenih opažanja riješenim. Trebalo bi svakako provesti opsežnija ispitivanja sa više raznih opažača i to eventualno na drugoj bazi nego što su gore provedena t. j. procjenjivati dijelove intervala najprije od oka, zatim mjeriti sa mikroskopom i računati odstupanja. Iz gornjih opažanja se može eventualno samo naslutiti da bi optimalni interval mogao postojati. Veličina optimalnog intervala vjerojatno će ovisiti o ličnosti i predispoziciji opservatora, o osvjetljenju, o tome, da li se radi bez ili sa indeksom logaritmičkog računala itd.

Tablica IV daje ista odstupanja g. Tomašegovića, g. Markovca i moja, na temelju kojih je izračunata tablica II, ali svrstana u razrede prema veličinama samih odstupanja i to posebno

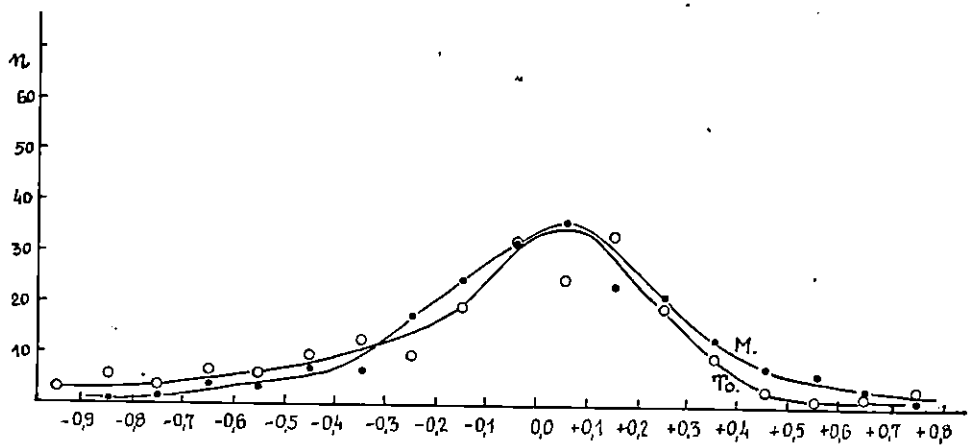
Tablica IV.

Veličine odstupanja od — do	O p s e r v a t o r				
	To.	*M.*	*N.*	*To.*	*M.*
	Opažanja iz *sin-* na *osnovnu* skalu			Opažanja iz *osn.* na *sin-* skalu	
	f r e k v e c i j e o d s t u p a n j a				
‰					
— 1,6 do — 1,7				1,0	
— 1,1 do — 1,2				1,0	
— 1,0 do — 1,1				1,0	
— 0,9 do — 1,0				2,5	
— 0,8 do — 0,9				5,5	0.5
— 0.7 do — 0,8				3,5	1,0
— 0,6 do — 0,7	1,0			6 5	3,5
— 0,5 do — 0,6	4.0		1,0	6,0	3,0
— 0,4 do — 0,5	7,5	1,0	1,0	9,5	7,0
— 0,3 do — 0,4	21,5	4,0	3,0	12,5	6,5
— 0,2 do — 0,3	32,0	11,0	7,0	9,5	17,5
— 0,1 do — 0,2	38,0	23,0	17,0	19,0	24,5
0,0 do — 0,1	51,0	46,5	37,0	32,0	31,5
0,0 do + 0,1	40,0	61,5	54,5	24,5	36,0
+ 0,1 do + 0,2	24,5	47,0	55,5	33,5	28,5
+ 0,2 do + 0,3	8,0	24,0	53,0	19,0	21,5
+ 0,3 do + 0,4	3,5	12,0	14,5	9,5	13,0
+ 0,4 do + 0,5	1,0	2,0	7,5	3,0	7,5
+ 0,5 do + 0,6			1,0	1,0	6,5
+ 0,6 do + 0,7				2,0	3,5
+ 0,7 do + 0,8				3,5	1,5
+ 0,8 do + 0,9				0,5	
+ 0,9 do + 1,0				1,0	
Z b r o j:	232,0	232,0	232,0	207,0	208,0

za čitanja na osnovnoj, a posebno za čitanja na sin-skali. Ta tablica dakle daje frekvencije pogrešaka. U sl. 6 i 7 su te frekvencije prikazane grafički i to u sl. 6 za čitanja na osnovnoj ,a u sl. 7 za čitanja na sin-skali. Frekvencione krivulje su označene prema opservatorima sa *To*, *M* i *N*. Te su krivulje prilično simetrične.



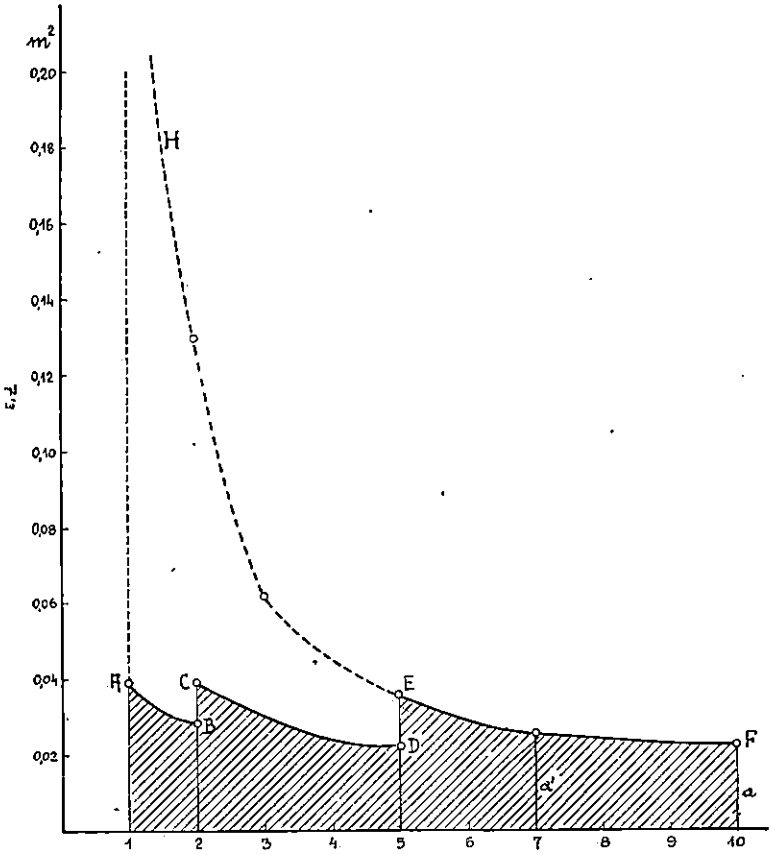
Sl. 6.



Sl. 7.

Vratimo se na optimalni interval. Ako takav interval postoji, onda bi bilo dobro izgradjivati logaritmička računala na temelju tog optimalnog intervala. Možda bi se kod toga pokazalo, da sada uobičajene dužine računala od 12,5 cm, 25 cm ili 50 cm baš nisu optimalne. Možda su nešto veće ili manje dužine obzirom na točnost procjenjivanja i istu dispoziciju numeričkih vrijednosti skalnih intervala bolje? Nadalje nastaje pitanje, gdje da se na logaritmičkim skalama smjesti optimalni interval. Zar u sredinu dužine skale ili kod srednjeg numerusa? Na log-skali naime ne mogu biti svi intervali jednako dugački.

Zamislimo u sl. 8 na apscisnoj osi nanesene numeruse (ne logaritme) od 1 do 10. Kao ordinate nanesimo kvadrate srednjih pogrešaka, koji odgovaraju intervalima našeg kon-



Sl. 8.

kretnog Faberovog računala na raznim mjestima osnovne logaritmičke skale. Dakle kod 10 odnosno 1000 logaritmičke skale t. j. između 998 i 1000 je interval dugačak 0,434 mm. Uzmimo nadalje kao bazu razmatarnja koju krivulju iz sl. 2 na pr. krivulju T_0. Dužini intervala 0,434 odgovara po toj krivulji kvadrat srednje pogreške 0,0225 ili općenito recimo a. Nanesimo taj a kao ordinatu iznad apscise *10* u sl. 8. Interval kod 7 našeg konkretnog računala t. j. recimo izmedju 702 i 700 je 0,62 mm dugačak. Njemu odgovara po krivulji T_0 slike 2 kvadrat srednje pogreške 0,0255 ili općenito a'. Nanesimo taj a' kao ordinatu iznad apscise 7 u slici 8. Analogno nanesimo ordinate za ostale intervale na pr. za intervale izmedju 502 i 500, zatim 201 i 200, 199,5 i 200 itd. Spajanjem krajnjih točaka nanesenih ordinata dobivamo općenito krivulju $AB—CD—EF$.

Naglašavam, da u sl. 8 kao apscise nisu naneseni logaritmi nego numerusi, a kao ordinate kvadrati srednjih pogrešaka, koji pripadaju odgovarajućim intervalima osnovne (dakle logaritmičke) skale našeg konkretnog 500 mm dugačkog računala.

Ako kupim logaritmičko računalo s time, da ga kroz čitav život upotrebljavam, da li postoji vjerojatnoća, da ću pojedine dijelove na pr. na osnovnim skalama više upotrebljavati nego li druge ili svako mjesto na osnovnoj skali ima jednaku vjerojatnost upotrebe? Na prvi pogled izgleda, da je svaki položaj indeksa na računalu a priori jednako vjerojatan. Ali tome nije tako. Interval na pr. izmedju 100 i 101 je mnogo duži nego onaj izmedju 199 i 200, a vjerojatnost numerusa izmedju 100 i 101 je ista kao i kod numerusa izmedju 199 i 200. Ako je potonji interval na log. skali samo polovicu toliko dugačak kao prvi, znači, da će pojedino mjesto unutar njega biti dvostruko toliko opterećeno nego analogno mjesto unutar prvog intervala.

Zato su u sl. 8 prikazani kvadrati srednjih pogrešaka ne iznad logaritmičke skale ,nego iznad obične skale numerusa, jer svi ti numerusi imaju jednaku vjerojatnost opterećenja.

Šta onda znači dobivena šrafirana površina u sl. 8? Predstavlja zapravo sumu kvadrata srednjih odstupanja na konkretnoj skali računala. Ona je kao neka grafička slika zbroja kvadrata pogrešaka. Prema tome od više logaritmičkih računala, koje je razmjerno obzirom na točnost procjenjivanja najbolje? Ono, kod kojeg ispadnu površine analogne šrafiranoj u sl. 8 razmjerno najmanje, jer po teoriji najmanjih kvadrata je ona sprava ili metoda rada razmjerno najbolja, za koju je suma kvadrata odstupanja u minimumu.

Zamislimo logaritmičku skalu, kod koje najmanji intervali svi imaju jednaku numeričku vrijednost. Ako dakle kod našeg 500 mm dugačkog računala zadnji interval izmedju 998 i 1000 vrijedi 2, neka i prvi interval bude izmedju numerusa 100 i 102, dakle neka vrijedi takodjer 2 (zapravo na konkretnom računalu vrijedi 05) itd., a ne kako je to običaj da na izvjesnim mjestima računala postoje promjene u numeričkoj vrijednosti intervala odnosno prekidi u kontinuitetu smanjivanja odnosno povećavanja skalnih intervala logaritmičke skale. Poznato je na pr. da kod običnih 25 cm dugačkih logaritmara od 100 do 200 najmanji intervali vrijede po 1, od 200 do 400 po 2, a od 400 do kraja skale po 5. Dakle od 100 do 200 se intervali na log-skali po izvjesnoj funkciji kontinuirano i pravilno smanjuju, kod 200 se prekida taj kontinuitet, interval dalje vrijedi po 2, dakle kod 200 naglo poraste, da se dalje do 400 intervali opet kontinuirano smanjuju, gdje je opet prekid. Dakle skala je zapravo obzirom na skalne intervale razdijeljena svega u 3 dijela. Analogno su, kako je već gore rečeno, osnovne skale Faberovog 50 cm dugačkog računala razdijeljene takodjer u 3 dijela, prvi teče od 100 do 200, drugi od 200 do 500, a treći od 500 do kraja skale.

Koliki je efekat takovog dijeljenja skale odnosno prekida kontinuiteta u promjenljivosti dužina skalnih intervala log-skale obzirom na točnost procjenjivanja?

Kad bi naša 50 cm dugačka osnovna skala bila bez takovih prekida, koliki bi bio zbroj odstupanja [*vv*] odnosno [*mm*] u sl. 8? Neka kod te zamišljene kontinuirane skale intervali na kraju skale od 1000 unatrag do 500 budu kao kod našeg konkretnog Faberovog računala. Dakle šrafirana površina izmedju EF i apscisne osi u sl. 8 se ne bi promijenila. Ali dalje ispred 5 odnosno 500 t. j. od 500 do 200 bi najmanji intervali opet vrijedili svi po 2 (a ne po 1) dakle bili bi dvostruko dulji nego li na konkretnom računalu. Na pr. interval izmedju 202 i 200 bi bio dugačak (log 202 — log 200) 500 mm = 2,16 mm. Naprotiv intervali izmedju 200 i 100 bi bili u glavnom 4 puta duži nego dosada na pr. onaj izmedju 102 i 100 bi bio 4,3 mm. Takovim intervalima bi po krivulji T_0 u sl. 2 odgovarali izvjesni kvadrati srednjih pogrešaka, na pr. onome izmedju 202 i 200, koji bi bio dugačak 2,16 mm, bi odgovarao kvadrat srednje pogreške 0,130, a onome izmedju 102 i 100, koji bi bio 4,3 mm, bi odgovaralo 0,72 (približno ekstrapolirano). Ako takove vrijednosti nanesemo kao ordinate iznad pripadnih numerusa u sl. 8, pa dobivene točke spojimo, dobivamo crtkanu krivulju. Dakle, kad bi naše konkretno 50 cm dugačko računalo bilo tako izgradjeno skroz sa spomenutom konstantnom numeričkom vrijednošću skalnih intervala osnovnih skala, odnosno, kad bi obzirom na promjenljivost dužina logaritmičkih skalnih intervala bilo kontinuirano izgradjeno, bio bi zbroj [*mm*] znatno veći t. j. prikazan površinom, što ju krivulja HEF zatvara sa apscismom osi u sl. 8. Razlika izmedju ove površine i šrafirane u sl. 8 daje efekat promjene numeričkih vrijednosti skalnih intervala.

Zamislimo nadalje naše Faberovo razmotreno računalo tako izvedeno, da bude samo 25 cm dugačko, a svaku drugu crticu na računalu reduciranom, kako bi intervali na log. skali ostali jednako dugački kao i na 500 mm dugačkom računalu. Uz ostale jednake okolnosti bi onda srednje promilne pogreške ispale dva puta veće nego li za 500 mm dugačko računalo (u formuli 1 bi se faktor $\frac{1}{5000}$ mijenjao u $\frac{1}{2500}$). Dakle ordinate bi u sl. 8

za takovo računalo ispale 4 puta veće nego kod krivulje AB—CD—EF, dakle i površina do apscisne osi, koja predstavlja zbroj kvadrata srednjih odstupanja bi bila 4 puta veća.

Analognim površinama kao što je šrafirana u sl. 8, mogu se dakle razmatrati točnosti raznih računala na pr. obzirom na razne dužine računala, obzirom na razne prekide numeričkih vrijednosti skalnih intervala itd.

ZUSAMMENFASSUNG.

Es wird gewöhnlich angenommen, dass die Genauigkeit der Ablesungen an verschiedenen Stellen einer logaritmischen Leiter ungefähr die gleiche sei. Unter Voraussetzung eines mittleren Schätzungsfehlers von $\pm 0{,}1$ mm, würde für eine 500 mm lange Leiter ein mittlerer Fehler der eingestellten (abgelesenen) Zahlen $\pm$ 0,465‰ resultieren (Formel 1). Die Fehler der Beobachtungen auf einem neuem 500 mm langem Schieber der Firma Faber werden damit verglichen. Die Sin-Leiter der Zunge wird n e b e n der Grundleiter des Stabes so gestellt, dass die Anfangs und End-Striche der beiden Leitern je besser koinzidieren. In dieser Stellung werden für verschiedene Striche der Sin-Leiter die zugehörigen Ablesungen (Schätzungen) an der Grundleiter vorgenommen und diese Beträge $\left(\frac{1}{\sin}\right)$ mit aus 6-stelligen Tafeln der goniometrischen Funktionen gewonnenen verglichen.

In Tafel I. sind die relativen Fehler solcher Ablesungen (von 4 Beobachtern durchgeführt) zusammengestellt. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich ein mittl. Fehler von $\pm$ 0,21‰. Die Ablesungen wurden ohne Hilfe des Index-Striches des Läufers vorgenommen.

Der gennante Schieber der Firma Faber hat an der Sin-Leiter ungefähr dreimal längere Interwalle als an den Grundleitern. Damit in Verbindung wird die Frage aufgestellt, inwieweit die Grösse der Interwalle die Schätzungsgenauigkeit beeinflüsse. Dafür werden weitere Serien von Beobachtungen durchgeführt. Erstens an der Grundleiter für alle (232) Striche der Sin-Leiter und zweitens umgekehrt an der Sin-Leiter für gewisse (208) Striche der Grundleiter (in der genannten Stellung der beiden Leitern). Die 232 Ablesungen an der Grundleiter (also in kleineren Interwallen) ergaben beim ersten Beobachter (T_0) einen mittl. Fehler von $\pm$ 0,21‰, beim zweiten (M) $\pm$ 0,17‰ und beim dritten (N) $\pm$ 0,20‰. Umgekehrt aus den Ablesungen (208) von gewissen Strichen der Grundleiter an die Sin-Leiter, also bei Schätzungen in durchschnittlich viel grösseren Interwallen, wurde beim ersten Beobachter ein mittl.

Fehler von $\pm$ 0,38‰ und beim zweiten $\pm$ 0,28‰ gewonnen. Der grössere Ablesungsfehler an der Sin-Leiter ist der Grösse der Interwalle zuzuschreiben. Nebenbei sei bemerkt, dass an den Leitern Zentel und Hundertel der Interwalle geschätzt und erst nachträglich mit dem Interwallswerte multipliziert in dazugehörige Ablesungen varwandelt wurden.

Könnte man nicht annehmen, dass der mittlere Schätzungsfehler ein aliquoter Teil des Interwalles sei? In Abb. *1* ist vorausgesetzt, dass man an die Endstriche der Interwalle i abrundet. Wenn sich der Strich c, für welchem man ablesen soll, vom Strich *0* in der Entfehrnung $-0{,}5i$ bis $+0{,}5i$ befindet, so sei auf *0* abgerundet. Alle Stellen des Striches c von $-0{,}5i$ bis $+0{,}5i$ sind gleich wahrscheinlich. Die wahren Fehler der Abrundung (Ablesung) seien mit z bezeichnet. Den mittleren Fehler geben dann die Ausdrücke *2)* und *3)*. Unter der Voraussetzung, dass man Zentel der Interwalle genau schätze (auf Zentel abrundet), würde für den mittl. Fehler der Ausdruck *4)* resultieren, oder allgemein der Ausdruck *5)*, wo k eine von den Integralsgrenzen abhängige Konstante ist.

Der Ausdruck *5)* ist aber theoretisch nicht zufriedenstellend. Im Extreme $i = \infty$, gibt er auch einen mittl. Fehler $m = \infty$, was gut entspricht, aber im Extrene $i = 0$, wo alle Striche der Leiter zusammen ein einziges schwarzes Feld ergeben würden, also die Schätzung unsicher würde, der Ausdruck *5)* für m den Wert Null ergeben, was nicht zutreffend ist.

Um ungefähr die Abhängigkeit des mittl. Schätzungsfehlers von der Interwallsgrösse zu gewinnen, wurden die Interwalle i in Interwallsklassen nach Tafel *II* eingereiht. Die Summe der Quadrate der Wiedersprüche sowie die mittl. Fehler aus den dazugehérigen Ablesungen sind in Tafel *II* sowie in Fig. *2* und *3* dargestellt. Grössere Interwalle ergeben grössere Wiedersprüche.

Der Autor hoffe aus dem Beobachtungen ein gewisses o p t i m a l e s Intervall zu bekommen. Aber man müsste dafür ausführlichere Beobachtungen durchführen und zwar so, dass man Schätzungsablesungen von mehreren Beobachtern in verschieden grossen Interwallen durchführen und dann die abgeschätzten Teile mikroskopisch messen würde.

In Abb. *2* ist mit der Kurve T_0 ungefähr die Anhängigkeit des Quadrates des mittl. Schätzungsfehlers von der Interwallsgrösse für den Beobachter T_0 dargestellt und mit der Kurve M für den Beobachter M. In Fig. *3* ist die analoge Abhängigkeit des mittl. Fehlers selbst von der Grösse der Interwalle dargestellt.

Unter Voraussetzung der Kurve T_0 aus Abb. *2* wird weiter die Abbildung *8* konstruirt. Nehmen wir den konkreten 50 cm langen Schieber. Für das Interwall am Ende der Grundleiter gewinnt man nach der Kurve T_0 aus Abb. *2* als Quadrat des mittl. Fehlers einen gewissen Betrag, sagen wir *a*. Diesen tragen wir als Ordinate über der Abszisse *10* in Abb. *8* auf. Dem Interwalle beim Numerus *7* des konkreten Schiebers entspreche ein $m^2=a'$. Dieser Betrag sei über die Abszisse *7* aufgetragen u. s. w. So wird die Kurve*AB—CD—EF* gewonnen (Abb. 8). Die schraffierte Fläche gibt also bildlich die Summe aller Quadrate der dazugehörigen mittl. Fehler [*mm*] dar.

Wenn die Grundleiter des konkreten Schiebers ohne Veränderungen der numerischen Werte der Intervalle aufgebaut würde, also alle Interwalle den gleichen numerischen Wert besassen, z. B. denselben Wert wie die Interwalle am Ende der konkreten Leiter, so würde man die Kurve *HF* in Abb. 8 gewinnen.

Die Flächen also, welche die Kurve *AB—CD—EF* mit der Abszissenaxe und die Kurve *HF* mit derselben Axe einräumen, stellen bildlich Summen der Quadrate der Beobachtungsfehler für solche Leitern dar. Der Unterschied der Flächen *1H F10* und *1ABCDEF10* gibt den Effekt der Veränderung der Numerus-Werte der Interwalle (an den Stellen *2* und *5* der konkreten Leiter).

Der Autor schliesst mit der Bemerkung, dass man weitere Untersuchungen unter verschiedenen Umständen und von verschiedenen Beobachtern ausführen sollte. Mit Vergleichung analoger Flächen wie die schraffierte aus Abb. *8* könnte man vielleicht Schlüsse über den günstigsten Aufbau der Skalen und bei gegebenen Skalenaufbau auf die günstigste Länge des Schiebers ziehen.