O izjednačenju pomoću funkcija koje se logaritmiranjem dadu svesti na linearni oblik, s naročitim obzirom na upotrebu kod izrade drvno-gromadnih tablica

Emrović, Bora

Ing. B. EMROVIĆ

O IZJEDNAČENJU POMOĆU FUNKCIJA, KOJE SE LOGARITMIRANJEM DAJU SVESTI NA LINEARNI OBLIK

S NAROČITIM OBZIROM NA UPOTREBU KOD IZRADE DRVNOGROMADNIH TABLICA

Sadržaj – Contents

1. UVOD

Ako su dvije ili više mjerenih veličina međusobno zavisne, kao na pr. promjer i visina stabla ili promjer, visina i drvna masa stabla, onda ta zavisnost nije strogo funkcionalna već statistička (stochastička), t. j. jednakim vrijednostima argumenata odgovara po više vrijednosti tamo, gdje bi kod stroge funkcionalne zavisnosti trebalo da bude jedna vrijednost. Da se dobiju srednje, najvjerojatnije vrijednosti funkcije za određene argumente, potrebno je provesti izjednačenje, t. j. pronaći krivulju, koja će se mjerenim (opažanim) podacima najbolje prilagoditi. To izjednačenje može biti grafičko ili računsko. Oblik krivulje treba da je poznat, a kod računskog izjednačenja mora biti zadan i analitički oblik krivulje, t. j. funkcija, po kojoj će se izjednačivanje provesti. Kod računskog izjednačivanja obično se upotrebljava metoda najmanjih kvadrata, a rjeđe metoda jednakih momenata*.

* Kod upotrebe običnog polinoma $y = a + bx + cx^2 + \ldots$ obje metode daju jednake normalne jednadžbe.

Postupak po metodi najmanjih kvadrata moguć je samo kod funkcija, koje su linearno zavisne od svojih parametara. Ako funkcija nije linearna, potrebno ju je na neki način svesti na linearni oblik. U dendrometriji susreću se često funkcije, kod kojih se logaritmiranjem postiže potrebni linearni oblik (Levaković[1], Mihajlov[2], Schumacher[3]).

Schumacherov logaritamski izraz za volumen stabla

$$\log m = \log a + b \,.\, \log d + c \,.\, \log h \qquad [1]$$

dobiven je logaritmiranjem izraza

$$m = a \,.\, d^b \,.\, h^c \qquad [2]$$

(m = drvna masa, d = prsni promjer, h = visina; a, b, c = parametri) i vrlo se često upotrebljava za izjednačivanje drvnogromadnih tablica. Međutim kod primjene metode najmanjih kvadrata na takav – logaritmiranjem dobiveni – linearni oblik postizava se izjednačenje: 1) kod kojega je suma izjednačenih logaritama jednaka sumi neizjednačenih logaritama (t. j. sumi logaritama dobivenih od pojedinih opažanih iznosa); 2) kod kojega je suma, koju obrazuju kvadrati razlika između izjednačenih i neizjednačenih logaritama, jednaka minimumu. No traži se zapravo izjednačenje, koje se sastoji u tome, da bi navedeni uvjeti (: suma kvadrata minimum, suma prvih potencija = 0.) bili ispunjeni za originalne iznose (numeruse), a ne za njihove logaritme. Oba izjednačenja odnose se međusobno kao geometrijska i aritmetička sredina. Izjednačenjem se dobiva analogon geometrijske sredine, a traži se zapravo analogon aritmetičke sredine.*

Po Cauchyjevu teoremu aritmetička je sredina uvijek veća od geometrijske sredine, pa će se prema tome s logaritamskim izjednačenjem dobiti uvijek preniski rezultati: to niži, što je veće rasipanje – devijacija – opažanih podataka oko krivulje izjednačenja. Kod potpune korelacije dobit će se na oba načina isti rezultat, no u tom

* Aritmetička sredina $A = \frac{1}{n} \Sigma x$ je srednja vrijednost, kod koje je udovoljeno uvjetu $\Sigma (x - A) = 0$ i $\Sigma (x - A)^2$ = minimum. Ako se geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_n}$$

logaritmira, izlazi:

$$\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log x \,,$$

t. j. za logaritam geometrijske sredine dobije se izraz, koji je jednak aritmetičkoj sredini logaritama varijanta. A za tu aritmetičku sredinu vrijede isti uvjeti, t. j.

$$\Sigma (\log x - \log G) = 0, \quad \Sigma (\log x - \log G)^2 = \text{minimum}$$

slučaju ne radi se više o izjednačenju. Kod logaritamskog izjednačenja drvnogromadnih tablica ta pojava dobiva značaj sistematske griješke tablica, t. j. tako dobivene tablice daju kod upotrebe sistematski preniske podatke za traženu drvnu masu.

Ovaj rad promatra taj problem,* a da bi diskusija bila lakša i numeričke ilustracije jednostavnije, uzeta je funkcija najjednostavnijeg oblika:

$$y = a\,x^b \qquad [3]$$

2. OPIS NEKIH METODA S KRITIČKIM PRIMJEDBAMA

2.1 Izjednačenje se može provesti i tako, da se jednadžba ne logaritmira, već da se pomoću Taylorove formule dovede na linearni oblik (vidi Ritz-Baur[4]). Za parametre a i b odrede se aproksimativne vrijednosti a_0 i b_0 tako, da se odaberu dvije točke dovoljno razdaleke, da se njihove koordinate uvrste u jednadžbu i da se iz nastalih jednadžbi izračunaju iznosi parametara kao nepoznanice (ili grafičkim načinom tako, da se na log–log–papir nanesu opažani iznosi i da se okularno izjednače pomoću pravca: $\log y = \log a + b \log x$. Aproksimativni iznos za $\log a$ je odsječak, što ga taj pravac čini na ordinatnoj osi, a b je nagib pravca). Po metodi najmanjih kvadrata pronalaze se potrebni nadopunjci $\alpha = a - a_0$ i $\beta = b - b_0$ na ovaj način:

$$\begin{aligned} Y &= a\,x^b = (a_0 + \alpha)\,x^{b_0+\beta} \\ &= f(a_0 + \alpha,\ b_0 + \beta) \qquad [4] \\ &= f(a_0, b_0) + \frac{\partial f}{\partial a}\alpha + \frac{\partial f}{\partial b}\beta + \ldots \end{aligned}$$

Ako se zanemare viši članovi reda, izlazi:

$$Y = a_0\,x^{b_0} + \alpha\,x^{b_0} + \beta\,a_0\,x^{b_0}\ln x \qquad [5]$$

Ako se opažani iznos funkcije, koji odgovara argumentu x_i, obilježi sa y_i, a pripadna izjednačena vrijednost funkcije sa Y_i; te ako se od lijeve i desne strane gornje jednadžbe odbije y_i, izlazi:

$$Y_i - y_i = a_0\,x_i^{b_0} + \alpha\,x_i^{b_0} + \beta\,a_0\,x_i^{b_0}\ln x_i - y_i \qquad [6]$$

* U toku rada pomagali su mi savjetom dr. Antun Levaković, profesor Poljoprivredno-šumarskog fakulteta u Zagrebu i dr. Vladimir Vranić, profesor Ekonomskog fakulteta u Zagrebu.

odnosno uz zamjenu

$$\left.\begin{aligned} a_0\, x_i^{b_0} - y_i &= -K_i \\ x_i^{b_0} &= A_i \\ a_0\, x_i^{b_0} \ln x_i &= B_i \end{aligned}\right\} \quad [7]$$

$$Y_i - y_i = -K_i + A_i\, \alpha + B_i\, \beta \quad [8]$$

Po metodi najmanjih kvadrata iznos

$$\Sigma\, (Y_i - y_i)^2 \quad [9]$$

treba da bude minimum, pa treba

$$\Sigma\, (-K_i + A_i\, \alpha + B_i\, \beta)^2 \quad [10]$$

derivirati i izjednačiti s nulom, dakle:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} &= 2\, \Sigma\, A_i\, (-K_i + A_i\, \alpha + B_i\, \beta) = 0 \\ &\rightarrow \alpha\, \Sigma AA + \beta\, \Sigma AB = \Sigma AK \\ \frac{\partial}{\partial \beta} &= 2\, \Sigma\, B_i\, (-K_i + A_i\, \alpha + B_i\, \beta) = 0 \\ &\rightarrow \alpha\, \Sigma AB + \beta\, \Sigma BB = \Sigma BK \end{aligned}\right\} \quad [11]$$

Tako dobivene normalne jednadžbe imaju kao nepoznanice nadopunjke, a ne same parametre. Izračunani dopunjci α_0 i β_0 dodani aproksimativnim vrijednostima a_0 *i* b_0 daju drugu aproksimaciju $a_1 = a_0 + \alpha_0$ i $b_1 = b_0 + \beta_0$, s kojom se postupak ponavlja. Daljim ponavljanjem postupka dopunjci α_n *i* β_n teže prema nuli. Prema tome i lijeve strane normalnih jednadžaba konvergiraju prema nuli, a također i desne strane, t. j.

$$\left.\begin{aligned} \lim \Sigma AK &= \lim \frac{1}{a}\, \Sigma Y\, (Y - y) = 0 \\ \lim \Sigma BK &= \lim \Sigma Y \ln x\, (Y - y) = 0 \end{aligned}\right. \quad [12]$$

Dakle je doduše udovoljeno uvjetu

$$\Sigma\, (Y - y)^2 = \text{minimum} \quad [13]$$

ali nije osim toga udovoljeno i uvjetu

$$\Sigma\, (Y - y) = 0, \quad [14]$$

t. j. $\Sigma Y = \Sigma y$, koji bi nam u svrhu potpunog izjednačenja bio isto tako potreban kao i onaj prvi.

Do te pojave dolazi kod upotrebe funkcija, koje nemaju aditivnu konstantu (vidi Willers[5]).

2.2 Logaritmira li se jednadžba

$$y = ax^b \tag{15}$$

izlazi izraz

$$\log y = \log a + b \log x, \tag{16}$$

koji vodi do normalnih jednadžaba:

$$\begin{aligned} n \log a + b \, \Sigma \log x &= \Sigma \log y \\ \log a \, \Sigma \log x + b \, \Sigma \log x \log x &= \Sigma \log y \log x, \end{aligned} \tag{17}$$

Parametri a i b izračunani na ovaj način nisu identični s iznosima tih parametara izračunanim na način opisan u točki *2.1*. U načinu 2.*1* udovoljeno je uvjetu

$$\Sigma (Y - y)^2 = \text{minimum} \tag{18}$$

dok je ovdje (nazovimo ovaj način običnim logaritamskim izjednačenjem) udovoljeno uvjetima

$$\left.\begin{aligned} \Sigma (\log Y - \log y) &= 0 \\ \Sigma (\log Y - \log y)^2 &= \text{minimum} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

A kako su to različiti uvjeti, to će i iznosi parametara biti različiti. Kako je spomenuto već u uvodu, »obično logaritamsko izjednačenje« daje preniske rezultate. Suma logaritama na taj način izjednačenih vrijednosti bit će, doduše, jednaka sumi logaritama opažanih iznosa, ali suma numerusa izjednačenih vrijednosti bit će uvijek manja od sume opažanih iznosa. Razlika je to veća, što je veće rasipanje (variance, Streuung) opažanih podataka oko krivulje izjednačenja. Kod drvnogromadnih tablica može ta razlika iznositi i 3–4%. Kako je već spomenuto, ona ima karakter sistematske grijeske tablica.

Logaritamsko je izjednačenje ekonomično i unatoč primjeni logaritama prikladno za upotrebu. Da bi se kod upotrebe u praksi otklonila spomenuta pojava sistematske grijeske, izrađene su metode, koje to više ili manje uspješno postižu (vidi: Chapman–Meyer[6]). Jedna je od tih metoda ova:

2.3 H. A. Meyer[7] izradio je tablicu korekcijskih faktora, s kojima treba umnožiti rezultate običnog logaritamskog izjednačenja. Taj korekcijski faktor izveden je na temelju hipoteze, da su razlike logaritama opažanih iznosa y_{ij} i logaritma izjednačene veličine η_i, t. j. razlike $(\log \eta_i - \log y_{ij})$, normalno distribuirane oko nule, odnosno da su iznosi $\log y_{ij}$ normalno distribuirani oko $\log \eta_i$. Ta hipoteza odgovara stvarnosti tek približno, ali ako distribucija i nije baš potpuno normalna, po toj hipotezi izračunani faktori bit će ipak upotrebljivi.

Pretpostavi li se dakle, da su za neki određeni x — iznos pripadni logaritmi opažanih iznosa $\log y = M$ normalno distribuirani oko sredine $\log \eta = \mu$ sa standardnom devijacijom σ, onda je

$$d f(M) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dM \qquad [20]$$

Izvedu li se supstitucije

$$M = \log y, \rightarrow dM = \log e \frac{1}{y} dy, \qquad [21]$$

izlazi distribucija samih y — iznosa

$$d\varphi(y) = \frac{\log e}{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dy, \qquad [22]$$

koja dakako nije više normalna. Pomnoži li se lijeva i desna strana sa y i integrira od 0 do ∞, dobit će se na lijevoj strani aritmetička sredina svih y — iznosa, koja bi imala da zadovoljava jednadžbu

$$\int_0^\infty y\, d\varphi(y) = Y. \qquad [23]$$

Na desnoj strani treba provesti supstituciju

$$\log y = M,\ y = 10^M \rightarrow dy = 10^M \ln 10\, dM \qquad [24]$$

čime se i granice integrala vraćaju natrag od $-\infty$ do $+\infty$, dakle

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \log e \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot 10^M \cdot \ln 10 \cdot dM. \qquad [25]$$

Uzevši u obzir, da je

$$\left.\begin{aligned} \log e \cdot \ln 10 &= 1 \\ 10^M = e^{\ln 10^M} &= e^{M \ln 10} \end{aligned}\right\}, \qquad [26]$$

izlazi:

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2} + M \ln 10\right]} \cdot dM \qquad [27]$$

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{(M-\mu+\sigma^2 \ln 10)^2}{2\sigma^2} + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10\right)\ln 10\right]} \cdot dM \qquad [27]$$

a kako je

$$e^{\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10\right) \ln 10} = e^{\ln 10 \left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10\right)} = 10^{\mu} \cdot 10^{\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10} \qquad [28]$$

$$Y = 10^{\mu} \cdot 10^{\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(M-\mu+\sigma^2 \ln 10)^2}{2\sigma^2}} \cdot dM \qquad [29]$$

$$Y = 10^{\mu} \cdot 10^{\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10} = \eta \cdot 10^{\frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10} = \eta \cdot f, \qquad [30]$$

jer je vrijednost integrala $= 1$, a $10^{\mu} = \eta$, jer je $\log \eta = \mu$. Prema tome, da bi se dobila aritmetička sredina opažanih podataka ($= Y$), potrebno je geometrijsku sredinu ($= \eta$) pomnožiti s faktorom

$$f = 10^{\frac{1}{2}(\ln 10)\cdot\sigma^2} = 10^{1{,}151293\,\sigma^2_{\log y}}, \qquad [31]$$

Dakle prema gornjem izvodu H. A. Meyera korekcioni faktor, pomoću kojeg bi se kompenzirala pogreška rezultata običnog logaritamskog izjednačenja, zavisan je samo od varijance logaritama opažanih iznosa, te se nakon provedenog običnog logaritamskog izjednačenja može izračunati i rezultate korigirati.

Kod primjene ovog korekcionog faktora na izjednačenje po funkciji $\log Y = \log a + b \log x$ dobit će se, doduše, dosta dobar rezultat, t. j. suma izjednačenih iznosa bit će približno jednaka sumi opažanih iznosa. Ali time još nije rečeno, da je i izjednačenje potpuno pravilno i da na taj način dobivene ordinate određuju i najvjerojatniju krivulju. Kod primjene toga načina na izjednačenje pomoću funkcije s jednom ili više varijabla (kao što je to slučaj sa Schumacherovim logaritamskim izrazom za drvnu masu stabla, radi kojega je ta korekcija i izvedena) osim hipoteze, da je distribucija logaritama opažanih iznosa normalna sa standardnom devijacijom $\sigma_{\log m}$, prećutno je usvojena i hipoteza, da je taj $\sigma_{\log m}$ jednak za svaku vrijednost argumenata, a to ne odgovara stvarnosti. Ako se promatra kolektiv izmjera za sastav drvnogromadnih tabela, logaritamska slika rasipanja sasvim je drugačija kod malih promjera i visina, nego kod velikih promjera i visina. Ako je promjer određen i konstantan, $\sigma_{\log m}$ pada s rastenjem visine. Isto tako prosječni $\sigma_{\log m}$ za male promjere veći je nego za velike promjere. Prema tome bilo bi potrebno znati iznos varijance $\sigma^2_{\log m}$ za svaki promjer i visinu, t. j. bilo bi potrebno provesti izjednačenje veličine $\sigma^2_{\log m}$ kao funkcije od d i h.

Za funkciju

$$y = a\,x^b \rightarrow \log y = \log a + b \log x \qquad [33]$$

to izjednačenje moglo bi se provesti po formuli

$$\sigma^2_{\log y} = \log \alpha + \beta \log x \qquad [34]$$

premda se kod toga može dogoditi, da za ekstremnu vrijednost argumenta x vrijednost varijance ispadne i negativna, što je dakako besmislica, a ujedno i znak, da bi se σ^2 trebalo izjednačiti barem po formuli

$$\sigma^2_{\log y} = \log \alpha + \beta \log x + \gamma (\log x)^2 \qquad [35]$$

Ali radi praktičnosti, uzevši u obzir još i to, da je to izjednačenje po empirijskoj formuli i da je iznos σ^2 potreban samo kao veličina za izračunavanje korekcionog faktora, može se i to tolerirati. U tome bi slučaju bilo

$$Y = \eta \,.\, f = a\, x^b \,.\, 10^{k\sigma^2} \qquad \left(k = \frac{1}{2} \ln 10 = 1{,}151293\right) \qquad [36]$$

$$\left.\begin{aligned} \log . Y &= \log a + b \log x + k\, \sigma^2 \\ &= \log a + b \log x + k\, (\log \alpha + \beta \log x) \\ &= \log a\, \alpha^k + (b + k\, \beta) \log x \\ &= \log A + B \log x \end{aligned}\right\} \qquad [37]$$

$$Y = A\, x^B \rightarrow A = a\, \alpha^k,\; B = b + k\beta \qquad [38]$$

iz čega je vidljivo, da su parametri izračunani običnim logaritamskim načinom pogrešni i to ne samo parametar a, već i parametar b, koji određuje nagib pravca u log-log-ravnini. U slučaju da je $\sigma^2_{\log y}$ jednak za svaku vrijednost argumenta x, kako to pretpostavlja H. A. Meyer, korigirao bi se samo iznos parametra a, a iznos parametra b ostao bi isti.

2.4 G. T. Fehner[8] u odjeljku o logaritamskom postupku s kolektivima opisuje vezu između geometrijske sredine G i aritmetičke sredine A aproksimativnom jednadžbom

$$G = A\left(1 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{A^2}\right),$$

gdje je q^2 = varijanca numerusa = kvadrat standardne devijacije, ali bez izvoda. Dokaz je izveo W. Scheibner[9] (citirano po Fehneru)*.

2.5 Worthing i Geffner[10] rješavaju ovaj problem na ovaj način: Prelaskom na logaritamski način računanja opažani podaci mijenjaju težinu. Ako se pretpostavi, da originalni podaci (numerusi) imaju težinu 1, onda njihovi logaritmi dobivaju drugu težinu, koja se može odrediti na ovaj način:

* Rad W. Scheibnera nažalost nisam mogao nabaviti, te taj putokaz, koji bi se eventualno mogao iskoristiti, samo napominjem.

Ako je

$$U = f(y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad [40]$$

a $\sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \ldots \sigma_{y_n}$ su srednje kvadratne grijeÅ¡ke veliÄine $y_1, y_2 \ldots y_n$, onda je

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2} \qquad [41]$$

(a to je poznati zakon o gomilanju grijeÅ¡aka â Fehlerfortpflanzungsgesetz). Prema tome ako je

$$U = f(y) = \ln y \qquad [42]$$

$$\sigma_{\ln y} = \frac{dU}{dy} \cdot \sigma_y = \frac{1}{y}\sigma_y, \qquad [43]$$

a kako se teÅ¾ine odnose kao reciproÄne vrijednosti kvadrata srednjih grijeÅ¡aka (standardnih devijacija), to izlazi:

$$\left.\begin{aligned} w_{\ln y_1} : w_{\ln y_2} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{y_1}\sigma_{y_1}\right)^2} : \frac{1}{\left(\frac{1}{y_2}\sigma_{y_2}\right)^2} \\ &= y_1^2\,\sigma_{y_2}^2 : y_2^2\,\sigma_{y_1}^2 . \end{aligned}\right\} \qquad [44]$$

Uz pretpostavku, da je teÅ¾ina originalnih iznosa (numerusa) jednaka jedinici, t. j.

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \ldots = \sigma_{y_n} = 1 \qquad [45]$$

izlazi:

$$w_{\ln y_1} : w_{\ln y_2} = y_1^2 : y_2^2 \qquad [46]$$

Dakle kod prijelaza na logaritamski naÄin izjednaÄivanja potrebno je logaritam svakog opaÅ¾anog iznosa opteretiti kvadratom njegova numerusa. Na taj naÄin trebalo bi da se dobiju iznosi parametara kao kod direktnog izjednaÄenja. Autori napominju, da se to u praksi postiÅ¾e samo pribliÅ¾no, a osim toga time nije reÄeno, da baÅ¡ numerusi moraju imati teÅ¾inu 1; veÄ da se isto tako moÅ¾e pretpostaviti u konkretnom sluÄaju, da logaritmi imaju teÅ¾inu 1, pa u tom sluÄaju numerusi moraju mijenjati teÅ¾inu.

Ta metoda osniva se na pretpostavci, da su odstupanja relativno malena i da je suma njihovih kvadrata minimum, a da istodobno suma samih odstupanja nije jednaka nuli (vidi iduÄu toÄku).

2.6 Schwerdt[11, 12] ne uzima svaki logaritam opaÅ¾anog iznosa kao optereÄen kvadratom numerusa veÄ samim numerusom.

Ako je jednadÅ¾ba krivulje

$$Y = f(x) \qquad [47]$$

a opažanom (mjerenom) paru podataka (y_i, x_i) odgovara izjednačena vrijednost

$$Y_i = f(x_i); \qquad [48]$$

onda po metodi najmanjih kvadrata mora biti:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, l = \Sigma\,(Y - y) = \Sigma\,[f(x) - y] \quad \text{i} \\ \Sigma\, ll = \text{minimum} \end{aligned}\right\} \qquad [49]$$

Međutim, ako je prikladnije, da se izjednačenje provede po modificiranoj jednadžbi

$$\varphi\,[Y] = \varphi\,[f(y)] \qquad [50]$$

te da se izjednače funkcije opažanih podataka, onda će i razlike (odstupanja) iznositi

$$\lambda_i = \varphi\,(Y_i) - \varphi\,(y_i) \qquad [51]$$

Od izjednačenja se traži da bude

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, l &= 0 \\ \Sigma\, ll &= \text{minimum} \end{aligned}\right\} \qquad [52]$$

a ne

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, \lambda &= 0 \\ \Sigma\, \lambda\lambda &= \text{minimum}, \end{aligned}\right\} \qquad [53]$$

jer ako je ispunjen posljednji uvjet, nije ujedno ispunjen i prvi uvjet, kako je već i prije spomenuto.

Iz izraza

$$l = Y - y \qquad [54]$$

izlazi

$$Y = y + l, \qquad [55]$$

a funkcija

$$\varphi\,(y + l) \qquad [56]$$

može se rastaviti u Taylorov red

$$\varphi\,(y + l) = \varphi\,(y) + \frac{l}{1!}\,\varphi'\,(y) + \frac{l^2}{2!}\,\varphi''\,(y) + \dots \qquad [57]$$

Ako iznosi l nisu preveliki, dovoljna su prva dva člana, pa prema tome:

$$\varphi\,(y + l) - \varphi\,(y) = \varphi\,(Y) - \varphi\,(y) = l\,.\,\varphi'\,(y) = \lambda, \qquad [58]$$

odnosno

$$l = \lambda\,\frac{1}{\varphi'\,(y)}\,. \qquad [59]$$

Ako je

$$\varphi(y) = \log y, \rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y} \log e, \qquad [60]$$

pa je u tom slučaju

$$l = \lambda \cdot y \cdot \frac{1}{\log e} \qquad [61]$$

(iznos $\frac{\log e}{1}$ može se kao konstantni faktor ispustiti).

Ako je nadalje

$$Y = f(x) = a\, x^b, \qquad [62]$$

onda je

$$\varphi(Y) = \log Y = \log a + b \log x \qquad [63]$$

Prvi uvjet izjednačenja zahtijeva, da bude

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, l &= 0 \\ \Sigma\, l &= \Sigma\, y\, \lambda \\ &= \Sigma\, y\, (\log Y - \log y) \\ &= \Sigma\, y\, (\log a + b \log x - \log y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [64]$$

a iz toga izlazi:

$$\log a\, \Sigma\, y + b\, \Sigma\, y \log x = \Sigma\, y \log y, \qquad [65]$$

a to je prva normalna jednadžba, koja bi se dobila iz uvjeta

$$\Sigma\, y\, \lambda\lambda = \text{minimum}, \qquad [66]$$

t j. iz uvjeta logaritamskog izjednačenja uz pretpostavku, da je svaki logaritam opterećen iznosom njegova numerusa. Druga normalna jednadžba glasila bi

$$\log a\, \Sigma\, y \log x + b\, \Sigma\, y \log x \log x = \Sigma\, y \log y \log x \qquad [67]$$

pa bi trebalo da se iz tih dviju jednadžbi izračunaju iznosi parametara a i b. Rezultati takva izjednačenja zadovoljavali bi približno dobro uvjet, da je suma izjednačenih vrijednosti jednaka sumi opažanih vrijednosti.

Međutim na taj način nije udovoljeno uvjetu

$$\Sigma\, ll = \text{minimum}, \qquad [68]$$

jer iz tog uvjeta izlazi:

$$\Sigma\, ll = \Sigma\, [y\, (\log a + b \log x - \log y)]^2 = \text{minimum}, \qquad [69]$$

što dovodi do ovih normalnih jednadžaba:

$$\left.\begin{aligned} \log a \,\Sigma\, y^2 + b \,\Sigma\, y^2 \log x &= \Sigma\, y^2 \log y \\ \log a \,\Sigma\, y^2 \log x + b \,\Sigma\, y^2 \log x \log x &= \Sigma\, y^2 \log y \log x, \end{aligned}\right\} \qquad [70]$$

a to su normalne jednadžbe, koje bi se dobile iz uvjeta

$$\Sigma\, y^2 \lambda\lambda = \text{minimum}, \qquad [71]$$

t. j. iz uvjeta logaritamskog izjednačenja uz pretpostavku, da je svaki logaritam opterećen iznosom kvadrata njegova numerusa, kako je to predloženo od Worthinga i Geffnera. No iz ovih jednadžaba je vidljivo, da nije udovoljeno uvjetu

$$\Sigma\, l = 0 \qquad [72]$$

pa se od ovakva izjednačenja ne može očekivati, da će suma izjednačenih iznosa biti jednaka sumi opažanih iznosa. Nepovoljni utjecaj pomanjkanja aditivne konstante kod jednadžbe

$$Y = a\, x^b \qquad [73]$$

dolazi do izražaja i kod upotrebe logaritamskog oblika njezina.

Izjednačenje originalnih iznosa po funkciji $Y = a\, x^b$, uz primjenu Taylorova reda s aproksimacijama i dopunjcima, kako je to opisano u točki 2.1, izvršeno je također na temelju pretpostavke

$$\Sigma\, ll = \text{minimum}, \qquad [74]$$

a da istodobno nije udovoljeno i uvjetu

$$\Sigma\, l = 0 \qquad [75]$$

Prema tome posljednje dvije normalne jednadžbe s y^2-iznosima kao težinama bile bi analogne načinu opisanom u točki 2.1. Pretposljednje dvije normalne jednadžbe izvedene iz uvjeta $\Sigma\, l = 0$ imaju također analogon u istom smislu. Te jednadžbe mogu se shvatiti kao nulti i prvi momenat ponderiranih ordinata s obzirom na ordinatnu os (suma momenata opažanih iznosa = suma momenata izjednačenih iznosa). Vidi o tome Ritz-Baur[4] str. 90 (izjednačenje po metodi momenata). Analogne jednadžbe – po metodi jednakih momenata, – a za originalne podatke glasile bi:

$$\Sigma\, a\, x^b = \Sigma\, y, \qquad \Sigma\, a\, x^b \,.\, x = \Sigma\, y\, x \qquad [76]$$

kojih bi se upotrebom postiglo

$$\Sigma\, l = 0, \qquad [77]$$

ali ne bi bilo udovoljeno uvjetu

$$\Sigma\, ll = \text{minimum.}^{*} \qquad [78]$$

* Upotreba tog načina nije baš jednostavna, jer postoje teškoće kod rješavanja jednadžaba.

Schwerdt uzima uvjet $\Sigma\, l = 0$. Iz jednadžbe

$$\Sigma\, y \log y = \log a\, \Sigma\, y + b\, \Sigma\, y \log x \qquad [79]$$

odnosno

$$\frac{\Sigma\, y \log y}{\Sigma\, y} = \log a + b\, \frac{\Sigma\, y \log x}{\Sigma\, y} \qquad [80]$$

zaključuje, da pravac u log-log koordinatnom sistemu mora da prolazi točkom

$$y_0 = \frac{\Sigma\, y \log y}{\Sigma\, y}, \qquad x_0 = \frac{\Sigma\, y \log x}{\Sigma\, y}. \qquad [81]$$

Od svih mogućih pravaca, koji prolaze tom točkom i prema tome zadovoljavaju prednju jednadžbu, odabira Schwerdt onaj pravac, kod kojeg je suma kvadrata razlika = minimum. Postupak je računsko-grafički po Mehmkeovoj metodi (vidi Schwerdt[12] str. 83) te kod nešto većeg broja opažanja mora biti neekonomičan.

3. DALJA MOGUĆA RJEŠENJA

3.1 Ako su razlike između opažanih iznosa i sredine (odnosno linije izjednačenja) malene, to se kod Taylorova reda

$$\begin{aligned} \varphi(Y) &= \varphi(y + l) \\ &= \varphi(y) + \frac{l}{1!}\varphi'(y) + \frac{l^2}{2!}\varphi''(y) + \ldots \end{aligned} \qquad [82]$$

uzima samo prva dva člana reda, a ostali se članovi mogu zanemariti. Ta pretpostavka, iskorištena u prethodnoj točki (Schwerdt), ne može se više dopustiti, ako je disperzija značajna, a to je redovito slučaj. Radi toga bolje je umjesto drugog člana odmah pisati ostatak u Lagrangeovu obliku.

$$\begin{aligned} \varphi(Y) &= \varphi(y + l) \\ &= \varphi(y) + \varphi'(y + \Theta\, l) \end{aligned} \qquad [83]$$

a odatle

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi(Y) - \varphi(y) \\ &= l\,.\,\varphi'(y + \Theta\, l) \end{aligned} \qquad [84]$$

$$l = \lambda\, \frac{1}{\varphi'(y + \Theta l)}.$$

Ako je

$$\varphi(y) = \log y \qquad [85]$$

$$l \doteq \lambda(y + \Theta l) = \lambda \, . \, y_s \qquad [86]$$

gdje je

$$0 < \Theta < 1 \qquad [87]$$

odnosno $y + \Theta l$ je neki y_s, koji je veći od y, a manji od Y, t. j.

$$y < y_s < Y \qquad [88]$$

Kod aritmetičke sredine

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma l &= \Sigma (Y - y) = \Sigma Y - \Sigma y = 0 \\
\Sigma Y &= \Sigma y = n Y \rightarrow Y = \frac{\Sigma y}{n} \\
\Sigma l &= \Sigma \lambda \, . \, y_s = \Sigma (\log Y - \log y) \, . \, y_s \\
&= \Sigma y_s \log Y - \Sigma y_s \log y = 0 \\
\Sigma y_s \log y &= \Sigma y_s \log Y \\
&= \log Y \, \Sigma y_s \rightarrow \log Y = \frac{\Sigma y_s \log y}{\Sigma y_s}
\end{aligned}\right\} \qquad [89]$$

t. j. ako se izračuna složena aritmetička sredina logaritama nekog kolektiva $y_1, y_2, \ldots y_n$, i to tako, da se svakom logaritmu pridijeli kao težina neki iznos y_s, koji je veći od y, a manji od

$$Y = \frac{\Sigma y}{n}, \qquad [90]$$

ta složena sredina logaritama dat će logaritam aritmetičke sredine Y, dok bi obična sredina logaritama bez težine dala logaritam geometrijske sredine η.

Iz izraza

$$l = \lambda \, . \, y_s \qquad [91]$$

izlazi

$$\left.\begin{aligned}
y_s &= \frac{l}{\lambda} \\
&= \frac{Y - y}{\log Y - \log y},
\end{aligned}\right\} \qquad [92]$$

odnosno

$$\log Y = \frac{\Sigma \dfrac{Y - y}{\log Y - \log y} \cdot \log y}{\Sigma \dfrac{Y - y}{\log Y - \log y}}, \qquad [93]$$

a kako se iznos aritmetičke sredine Y tek traži, to u desnoj strani jednadžbe treba mjesto Y uvrstiti kao aproksimativnu vrijednost η = geometrijska sredina

$$\left(\log \eta = \frac{\Sigma \log y}{n}\right). \qquad [94]$$

Na taj način dobivena složena sredina može se uzeti kao slijedeća aproksimacija aritmetičke sredine. Ponavljanjem postupka dolazi se do točnog iznosa Y.*

Kako je

$$y < y_s < Y, \qquad [95]$$

to se za y_s može naći i neka aproksimativna vrijednost, na pr. aritmetička ili geometrijska sredina između y i Y

$$y_s = \frac{y + Y}{2}, \quad y_s = \sqrt{y \cdot Y} \qquad [96]$$

Aritmetička sredina je neprikladna, dok je geometrijska sredina već prikladnija, jer uvrsti li se u jednadžbu složene sredine

$$y_s = \sqrt{y \cdot Y}, \qquad [97[$$

izlazi

$$\left.\begin{aligned} \log Y &= \frac{\Sigma y_s \log y}{\Sigma y_s} \\ &= \frac{\Sigma \sqrt{y \cdot Y} \log y}{\Sigma \sqrt{y \cdot Y}} = \frac{\sqrt{Y}\, \Sigma \sqrt{y} \log y}{\sqrt{Y}\, \Sigma \sqrt{y}} = \frac{\Sigma \sqrt{y} \log y}{\Sigma \sqrt{y}}. \end{aligned}\right\} \qquad [98]$$

Ako se dakle složena sredina logaritama nekog kolektiva izračuna tako, da se svakom logaritmu dodijeli težina drugog korijena iz njegova numerusa, dobit će se logaritam, čiji će numerus približno biti jednak aritmetičkoj sredini originalnih podataka.

Na pr. zadan je kolektiv $x_1, x_2, \ldots x_n$ = 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18; $n = 8$, aritmetička srèdina $A = 10$, $\log A = 1$. Ako je uvjet, da se sredina A mora izračunati iz podataka, koji se sastoje od logaritama gornjih brojeva, to će obična sredina logaritama dati logaritam geometrijske sredine. Upotrebom težina i formule složene sredine logaritama dobit će se iznos, čiji će antilogaritam biti više ili manje bliz aritmetičkoj sredini. Vidi tabelu 1.

* Taj postupak kod aritmetičke sredine nema dakako smisla, ali dobiva svoj smisao kod krivulje, odnosno plohe izjednačenja.

Tabela 1

red. br. *ord. no.* r	težina *weight* p	$\log A_r = \frac{\Sigma p \log x}{\Sigma p}$	A_r	$\delta_r = \frac{A_r - A}{A} \cdot 100$
1	1	0,908 6291	8,10269	— 18,97%
2	$\sqrt{x}$	1,004 9158	10,11383	+ 1,14%
3	x	1,072 0090	11,80345	+ 18,03%
4	x^2	1,145 8216	13,99010	+ 39,90%
5	$\frac{A - x}{\log A - \log x}$	1,000 0000	10,00000	± 0,00%
6	$\frac{A_1 - x}{\log A_1 - \log x}$	1,002 8814	10,06657	+ 0,67%
7	$\frac{A_6 - x}{\log A_6 - \log x}$	0,999 9087	9,99790	— 0,021%

Iz tih podataka vidi se, da u konkretnom slučaju upotreba težine $p = 1$ (geometrijska sredina) daje procjenu aritmetičke sredine za 18,57% prenisko. Naprotiv, upotreba težine $p = x$ daje procjenu za *18,03%* (dakle približno za isto toliko) previsoko, dok upotreba izraza $\sqrt{x}$ kao težine daje sasvim upotrebljiv rezultat. Kod kolektiva sa zvonolikom distribucijom bile bi te griješke manje i kod upotrebe izraza $\sqrt{x}$ kao težine praktički beznačajne.

Pod rednim brojem 6 i 7 upotrebljena je težina

$$p = \frac{l}{\lambda} = \frac{A - x}{\log A - \log x}, \qquad [99]$$

gdje je umjesto aritmetičke sredine A uzeta kao aproksimacija geometrijska sredina A_1. Rezultat A_6 je pogrešan samo za *+ 0,67%*, a iduća aproksimacija je A_7 za *— 0,021%*.

3.2 Postupci izvedeni u točki *3.1.* mogu se sada primijeniti na funkciju

$$\log Y = \log a + b \log x \qquad [100]$$

(odnosno na funkciju sa 2 varijable

$$\log Y = \log a + b \log x_1 + c \log x_2), \qquad [101]$$

gdje i dobivaju svoj puni smisao. Ovdje se, međutim, mora izabrati ili uvjet

$$\Sigma l = 0 \qquad [102]$$

ili pak uvjet

$$\Sigma ll = \text{minimum}, \qquad [103]$$

jer obadva istodobno nije moguće postići.

3.2.1

$$y_s = \frac{Y - y}{\log Y - \log y}, \quad \Sigma l = 0 \qquad [104]$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma l &= \Sigma \lambda . y_s \\ &= \Sigma y_s (\log Y - \log y) \\ &= \Sigma y_s (\log a + b \log x - \log y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad [105]$$

$$\log a \,\Sigma y_s + b\, \Sigma y_s \log x = \Sigma y_s \log y \qquad [106]$$

Ovaj izraz ima oblik prve normalne jednadžbe, koja bi se dobila iz uvjeta

$$\Sigma y_s \lambda\lambda = \text{minimum}, \qquad [107]$$

t. j. po postupku logaritamskog izjednačenja po metodi najmanjih kvadrata, ako je svaki logaritam opterećen težinom u iznosu y_s. Druga normalna jednadžba po istom uvjetu ($\Sigma y_s \lambda\lambda$ = minimum) glasila bi

$$\log a \,\Sigma y_s \log x + b\, \Sigma y_s \log x \log x = \Sigma y_s \log y \log x \qquad [108]$$

Budući da se izjednačene ordinate (Y) tek traže, to je za izračunavanje iznosa y_s potrebno upotrebiti aproksimativne vrijednosti.

Kao aproksimativne vrijednosti za Y mogu se upotrebiti rezultati grafičkog izjednačenja ili rezultati kakva običnog računskog načina, a također i rezultat običnog logaritamskog izjednačenja. S dobijenim iznosima treba postupiti kao s idućom aproksimacijom za Y kod računanja vrijednosti y_s. Postupak treba ponavljati, dok se ne dobiju rezultati, koji bi mogli zadovoljiti, t. j. dok razlike u iznosima parametara dvaju uzastopnih postupaka ne postanu beznačajni.

3.2.2

$$y_s = \frac{Y - y}{\log Y - \log y}, \quad \Sigma ll = minimum \qquad [109]$$

dovodi do normalnih jednadžaba

$$\left.\begin{aligned} \log a \,\Sigma y^2_s \quad &+ b\, \Sigma y^2_s \log x &= \Sigma y^2_s \log y \\ \log a \,\Sigma y^2_s \log x &+ b\, \Sigma y^2_s \log x \log x &= \Sigma y^2_s \log y \log x, \end{aligned}\right\} \qquad [110]$$

koje imaju oblik normalnih jednadžaba dobivenih uz uvjet

$$\Sigma y^2_s \lambda\lambda = \text{minimum}. \qquad [111]$$

Ovaj način, kod kojeg treba postupiti analogno kao u *3.2.1*, logaritamski je oblik načina *2.1.* te se čini, da bi kod dovoljnog broja ponavljanja oba načina morala dati identični rezultat. Međutim se ipak ne dobivaju isti iznosi parametara. Uzrok je tomu taj, što je u načinu *3.2.2.* i skala za x logaritamska, t. j. u normalnim jednadžbama dolazi iznos *log x*, a ne x. Radi toga vrijednosti parametra konvergiraju (ponavljanjem postupka) prema nešto različitim iznosima, no razlike nijesu velike. Što se tiče samo konvergencije ili – drugim riječima – potrebnog broja ponavljanja postupka za istu točnost parametra, čini se, da je ona podjednaka u oba načina, samo je način *3.2.2.* možda nešto ekonomičniji.

3.2.3

$$y_s = \sqrt{Y \cdot y}\,, \quad \Sigma\, l \cong 0 \qquad [112]$$

3.2.4

$$y_s = \sqrt{Y \cdot y}\,, \quad \Sigma\, ll \cong minimum \qquad [113]$$

su dva približna načina slična načinima *3.2.1* i *3.2.2.*

3.2.5 Izjednačenje se može provesti uz pomoć jednadžbe

$$\log Y = \log a + b \log x \qquad [114]$$

i metodom momenata, tako da bude udovoljeno uvjetu

$$\Sigma\, l \cong 0 \qquad [115]$$

Ako je

$$Y_0 = \frac{\Sigma \Sigma\, y}{N} \qquad [116]$$

aritmetička sredina svih y-iznosa odnosno ordinata težišta ukupnog kolektiva mjerenih (opažanih) iznosa, onda je

$$\Sigma\, L_y = \Sigma\,(Y_0 - y) = 0, \qquad [117]$$

a to je ujedno suma nultih momenata ordinata, ako apscisnu os zamislimo kao prebačenu – translatiranu – u težište. U tom bi slučaju L_y bila nova ordinata opažanog iznosa, a L_Y pripadna ordinata krivulje izjednačenja. Kako je po metodi momenata potrebno, da suma nultih momenata opažanih iznosa bude jednaka sumi nultih momenata izjednačenih iznosa, zatim da suma prvih momenata opažanih iznosa bude jednaka sumi prvih momenata izjednačenih iznosa i t. d. (prema broju parametara u jednadžbi), to mora biti i

$$\Sigma\, L_Y = \Sigma\,(Y_0 - Y) = 0. \qquad [118]$$

No kako je

$$l = L_y - L_Y, \qquad [119]$$

to mora biti i

$$\Sigma\, l = \Sigma\, L_y - \Sigma\, L_Y = 0. \qquad [120]$$

Uzme li se analogno prijašnjim slučajevima

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{L_y}{\Lambda_y} \\ &= \frac{Y_0 - y}{\log Y_0 - \log y} \cong \frac{Y_0 - Y}{\log Y_0 - \log Y} = \frac{L_Y}{\Lambda_Y} \end{aligned} \qquad [121]$$

i dalje:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma L_y = \Sigma y_s \Delta_y &= \Sigma y_s (\log Y_0 - \log y) = 0 \\ \Sigma L_Y = \Sigma y_s \Delta_Y &= \Sigma y_s (\log Y_0 - \log Y) \\ &= \Sigma y_s (\log Y_0 - \log a - b \log x) = 0 \\ \Sigma y_s (\log Y_0 - \log y) &= \Sigma y_s (\log Y_0 - \log a - b \log x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad [122]$$

izlazi:

$$\log a\, \Sigma y_s + b\, \Sigma y_s \log x = \Sigma y_s \log y \qquad [123]$$

Analogno izlazi iz sume prvih momenata:

$$\log a\, \Sigma y_s \log x + b\, \Sigma y_s \log x \log x = \Sigma y_s \log y \log x \qquad [124]$$

a te iste jednadžbe dobili bismo i iz uvjeta

$$\Sigma y_s \Delta\Delta = \text{minimum}, \qquad [125]$$

kod čega bi se za y_s uzeo dakako izraz

$$y_s = \frac{Y_0 - y}{\log Y_0 - \log y}. \qquad [126]$$

3.2.6 Za y_s može se približno uzeti

$$y_s = \sqrt{Y_0 \cdot y}\,, \qquad [127]$$

što također približno odgovara uvjetu

$$\Sigma l = 0 \qquad [128]$$

i izjednačenje po metodi momenata. Ovdje se, međutim, $\sqrt{Y_0}$ kao konstanta može izbaciti iz težine, tako da se kao težina dobije $\sqrt{y}$.

Prema tome, ako se provede logaritamsko izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata, a uz upotrebu funkcije

$$\log Y = \log a + b \log x, \qquad [129]$$

tako da se svakom logaritmu opažanog iznosa dade težina u iznosu drugog korijena iz njegova numerusa, dobit će se približno rezultat analogan izjednačenju numerusa po metodi jednakih momenata.

3.3 Za ilustraciju svih tih načina neka posluži najprije jedan jednostavan primjer (Schwerdt[11])

x =	1,0	1,6	2,5	6	8	10	$\Sigma x =$ 29,1	[130]
y =	2,5	5,0	10	45	90	140	$\Sigma y =$ 292,5	

Rezultati iskazani su u tabeli 2.

Izjednačenje može se dakle izvesti na više načina. Izbor načina zavisi o ekonomičnosti, o strukturi materijala, koji se izjednačuje i o cilju, radi kojeg se izjednačenje vrši.

4.1 Postupak po metodi najmanjih kvadrata ekonomičan je tek uz upotrebu mašina za računanje. Ako je, međutim, materijal, koji treba obraditi, dosta velik (a kod drvnogromadnih tablica je to potrebno, jer točnost tablica zavisi o veličini uzorka), onda će unatoč mašinskom računanju* biti potrebno izabrati metodu, kod koje ne treba račun ponavljati nekoliko puta. Dakle metode s aproksimacijama bile bi neekonomične.

4.2 Struktura materijala zavisi o distribuciji iznosa argumenata, o distribuciji opažanih iznosa funkcije oko linije izjednačenja i o varijanci tih iznosa funkcije. Obično je najpovoljnija konstantna (pravokutna) distribucija argumenata, t. j. svakom argumentu (ili svakom paru argumenata) odgovara jednaki broj opažanih iznosa funkcije. Tako na pr. »uputstva za sastav drvnogromadnih tablica njemačkih šumsko-pokusnih postaja« u § 8 zahtijevaju, da modelna stabla budu »po mogućnosti s jednakom razdiobom na visine i starosti«[13]. To je međutim vrlo teško postići i redovito materijal, a naročito, ako je velik, poprima distribuciju populacije, iz koje je izvađen, a ta je zvonolika i redovito asimetrična.

Pogodna je simetrična i barem približno normalna distribucija opažanih iznosa funkcije oko linije izjednačenja.

Povoljna je malena varijanca tih opažanih iznosa. Povoljno je nadalje, da je ta varijanca konstantna za svaki iznos argumenata, a ako već nije konstantna da je u jednostavnoj (ne kompliciranoj) zavisnosti od iznosa argumenata.

4.3 Cilj, zbog kojeg se vrši izjednačenje, također ima utjecaja na izbor načina. Kod drvnogromadnih tablica cilj je izjednačenja, da se pronađu srednje vrijednosti, koje će onda kod praktične primjene služiti kao procjena drvne mase za dani prsni promjer i visinu. Kod toga se ne traži samo najvjerojatnija procjena ukupne drvne mase sviju stabala jedne sastojine, koja bi bila bar približno iste strukture kao i materijal, iz kojeg su sastavljene tablice, već se traži i najvjerojatnija procjena i za pojedine skupine stabala jednog debljinskog stepena ili razreda.

4.4 Kao primjer za demonstraciju uzima se izvadak iz materijala za sastav drvnogromadnih tablica za bukvu iz Moslavačke gore*, i to uglavnom materijal prsnog promjera $d = 14$ cm.

* Kod toga se imaju na umu obične mašine za računanje ručne ili motorne, a ne moderni automati, koji rade sa perforiranim karticama ili trakama papira.

* Taj materijal potječe iz bukovih šuma Moslavačke gore s područja bivših poduzeća Našičke i Nihaga, gdje se prema ugovoru o prodaji mase na panju vršila procjena pomoću primjernih stabala. Stabla su obarana i mjerena sekcioniranjem. Izbor primjernih stabala vršio se na različite načine, različiti ljudi su rukovodili mjerenjem i t. d., tako da pouzdanost tih podataka nije bez rezerve za istraživačku upotrebu.

Tabela 2

Red. br. *Ord. no.*	Težina *Weight* p	Udovoljeni uvjeti *Fulfiled conditions*	Opis načina *Method of adjustment*	a	$\log a$	b	ΣY	$\Sigma (Y - y)$	$\frac{\Sigma (Y-y)}{\Sigma y} \cdot 100$	$\Sigma (Y - y)^2$	$\Sigma (\log Y - \log y)$	$\Sigma (\log Y - \log y)^2$
1	$p = 1$	$\Sigma \lambda\lambda$ = minimum	Obično logaritamsko izjednačenje *Common logarithmic treatment*		0,351 207	1,749 230	281,3842	— 11,1158	— 3,8003%	262,1284	— 0,000 001	0,010 639
2			2. aproksimacija	0,828 223		2,070 878						
3	Izjednačenje s dopunjcima, Σll = minimum. Kao prva aproksimacija uzeti su rezultati običnog logaritamskog izjednačenja. *Adjustment with supplements. Σll = minimum. As the first approximation the results of the common logarithmic adjustment are taken.*		3. aproksimacija	0,957 888		2,142 348						
4			4. aproksimacija	1,124 694		2.090 981						
5			5. aproksimacija	1,134 041		2.092 588	288,4125	— 4,0875	— 1,3974%	25,3243		
6			6. aproksimacija	1,133 934		2.092 617	288.4037	— 4,0963	— 1,4004%	25,3199		
7			7. aproksimacija	1,133 901		2,092 629	288.4027	— 4,0977	— 1.4009%	25,3206		
8	$p = y$	$\Sigma l \backsim 0$ $\Sigma y \cdot \lambda \cdot \lambda$ = minimum	log izjednačenja s težinama *Weighted log adjustment*		0,253 791	1.879 065	293,2331	+ 0,7331	+ 0.3506%	68,1900	— 0,158 210	0,031 095
9	$p = y^2$	$\Sigma ll \backsim$ minimum $\Sigma y^2 \lambda\lambda$ = minimum	”		0,095 462	2.050 472	290.2565	— 2,2435	— 0.7670%	26,8405	— 0,545 403	0,135 030
10	$p = \sqrt{Y_1 \cdot y}$	$\Sigma l \backsim 0$ $\Sigma p \lambda\lambda$ = minimum	”		0,250 109	1,881 956	292.4904	— 0.0096	— 0,0033%	68.3879	— 0,170 809	0,030 025
11	$p = \sqrt{Y_{10} \cdot y}$	2. aproksimacija	”		0,243 715	1.889 132	292,5002	+ 0,0002	— 0,0007%	65.0437	— 0,185 613	0,032 515
12	$p = Y_1 \cdot y$	$\Sigma ll \backsim$ minimum $\Sigma p \lambda\lambda$ = minimum	”		0,083 755	2,062 241	289,5362	— 2.9638	— 1,0133%	26,0793	— 0,577 004	0,146 982
13	$p = Y_{12} \cdot y$	2. aproksimacija	”		0,066 846	2,079 976	288,9506	— 3,5494	— 1,2135%	25,4546	— 0,620 229	0,164 939
14	$p = Y_{13} \cdot y$	3. aproksimacija	”		0,066 152	2.080 711	288,9311	— 3,5689	— 1,2201%	25,4406		
15	$p = \left(\frac{Y_1 - y}{\log Y_1 - \log y}\right)^2$	$\Sigma ll \backsim$ minimum $\Sigma p \lambda\lambda$ = minimum	”		0,083 322	2,062 690	289.5180	— 2,9820	— 1,0195%	26.0557		
16	$p = \left(\frac{Y_{15} - y}{\log Y_{15} - \log y}\right)^2$	2. aproksimacija	”		0,067 394	2,079 406	288,9658	— 3,5342	— 1.2183%	25,4642		
17	$p = \left(\frac{Y_{16} - y}{\log Y_{16} - \log y}\right)^2$	3. aproksimacija	”		0,066 541	2,080 330	288,9607	— 3,5313	— 1,2100%	25,4500		
18	$p = \left(\frac{Y_7 - y}{\log Y_7 - \log y}\right)^2$	$\Sigma ll \backsim$ minimum $\Sigma p \lambda\lambda$ = minimum	”		0,066 217	2.080 639	288.9306	— 3,5694	— 1,2203%	25,4417		
19	$p = \sqrt{y}$	$\Sigma l \backsim 0$ $\Sigma p \lambda\lambda$ = minimum	”		0,316 024	1,804 114	290.2190	— 2,2810	— 0,7798%	126,1487	— 0,030 900	0,013 281
20			*Schwerdt – Mehmke*	1.360 000	0,133 539	2,010 000	291,3184	— 1.1816	— 0,4040%	31,0244	— 0,449 823	0,100 425

Tabela 3

Bukva iz Moslavačke Gore. Broj modelnih stabala. Prsni promjer $d = 14$ cm, h = totalna visina u metrima, m^3 = kubatura krupnog drva debljeg od 7 cm. Visina panja neodređena.

Beech from Moslavačka Gora. Number of sample trees, dbh = 14 cm, h = total height in meters, m^3 = total cubic meter content (with minimum diameter 7 cm o. b.). The stump height is not defined.

h \ m^3	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σn
7	2																	2
8			1		1													2
9		2	4	1														7
10		1	1	3					1	1								7
11			2	3	3	2	1	3		1								15
12		1		2	4	5	4	3	1	1		1						22
13			1	3	3	3	8	3	7	5	1							34
14					8	15	11	17	5	3	1				1			76
15				1	4	11	16	16	34	16	9	5	3		1			116
16					2	12	17	27	32	21	11	18	4	1	1	1		147
17					2	6	14	28	23	16	11	13	9	1				123
18					1	6	6	7	23	27	30	23	2	6	2	1		134
19						1	2	1	11	13	20	29	13	5	2		1	98
20								2	2	9	18	13	9	9		2		64
21									5	2	2	7	7	7	3	3		36
22										1	2	3	4	5	1	2	1	19
23											2		3	1			1	7
24											1	2				1	1	5
25														1			1	2
26															1			1
27																		
28															1			1
Σn	2	4	9	13	28	61	83	101	156	118	110	115	54	36	13	10	5	918

Obično logaritamsko izjednačenje daje jednadžbu

$$\log \mu = -2{,}050\,732 + 0{,}935\,621 \log h \qquad [131]$$

μ = masa krupnog drva stabla (m^3)

h = totalna visina (metara)

(prsni promjer $d = 14$ cm)

Pomoću Fisherovog F – testa (Fisher[14], Linder[15]) isprobana je hipoteza linearnosti, t. j. da li je statistički dopušteno izjednačenje podataka po linearnoj jednadžbi

$$\log \mu = \log a + b \log h \qquad [132]$$

Ako se podaci slože tako, da svi opažani iznosi iste visine sačinjavaju jednu skupinu, onda analiza varijance pokazuje ovo:

Tabela 4

Uzrok varijacije *Source of Variation*	Suma kvadrata *Sums of Squares*	Stupnjevi slobode *Degrees of Freedom*	Varijanca *Mean variance*
regresioni pravac *Linear regression*	4,632 691	1	—
oko pravca *Deviations from linear regression*	0,170 099	19	0,008 953
između skupine *Between arrays*	4,802 790	20	—
unutar skupina *Residual within arrays*	4,501 273	897	0,005 018
Ukupno *Total*	9,304 063	917	—

$$F = \frac{0{,}008\ 953}{0{,}005\ 018} = 1{,}7841$$

Budući da je $n_1 = 19$; $n_2 = 897$, interpolacijom je iz tabela (Linder[15] str. 141) dobijeno za $P = 0{,}05$

$$F = 1{,}878 \text{ a to je } > 1{,}7841.$$

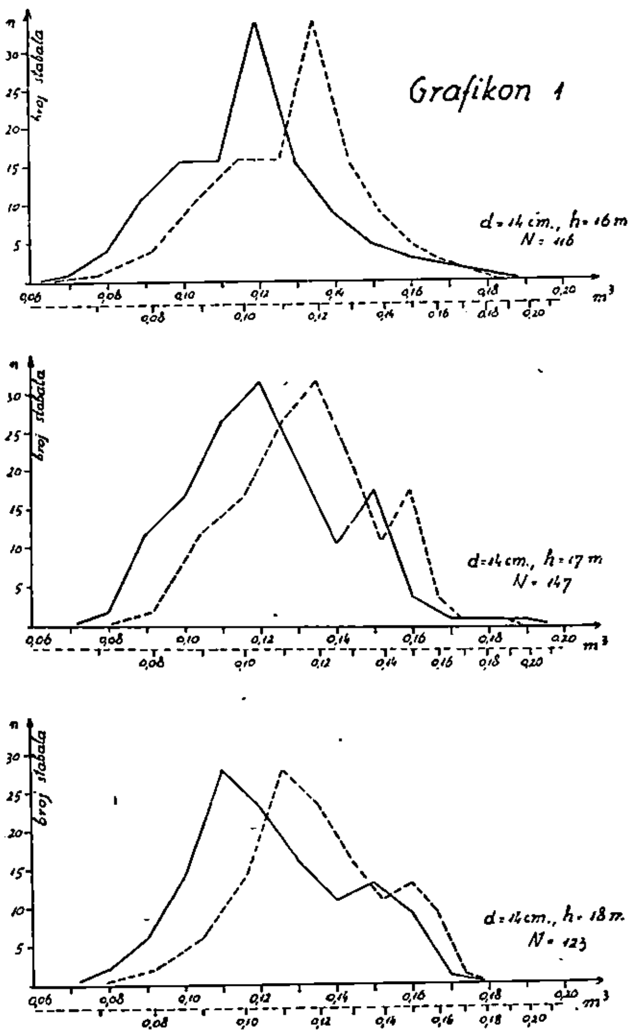
Tabela 5

Red. br. *Ord. no.*	Način izjednačenja *Method of adjustment*	a	$\log a$	b	ΣY	$\Sigma (Y - y)$	$\frac{\Sigma (Y - y)}{\Sigma y} \cdot 100$	$\Sigma (Y - y)^2$
1	Obično logaritamsko izjednačenje *Common logarithmic adjustment*		— 2,050 732	0,935 621	114.171 513	— 1,408 487	— 1,219%	0,361 760
2	log. izjednačenje s kvadratom numerusa kao težinom *Logarithmic adjustment using as weight the square of numerus*		— 1,862 152	0,799 854	119.989 185	+ 4,409 185	+ 3,815%	0,380 541
3	log. izjednačenje s numerusom ordinate kao težinom. *Logarithmic adjustment using as weight the numerus of the ordinate*		— 1,930 877	0,847 073	117.064 429	+ 1,484 429	+ 1,284%	0,361 333
4	log. izjednačenje s drugim korijenom numerusa ordinate kao težinom. *Logarithmic adjustment using as weight the square root of the numerus of the ordinate*		— 1,998 010	0,897 213	115,589 366	+ 0,009 366	+ 0,008%	0,358 861
5	Izjednačenje pomoću dopunjka. Kao prva aproksimacija uzeto je obično logaritamsko izjednačenje *Adjustment by means of supplements. The common logarithmic adjustment is taken as the first approximation*	0,010 416		0,880 074	114,167 528	— 1,412 472	— 1,222%	0,361 028
6	3. aproksimacija	0,010 511	— 1,978 352	0,881 238	115,594 968	+ 0,014 968	+ 0,013%	0,358 7636
7	4.		— 1,978 339	0,881 216	115,590 928	+ 0,010 928	+ 0,009%	0,358 7642
8	5.		— 1,978 3395	0,881 216	115,590 965	+ 0,010 965	+ 0,009%	0,358 7636
9	6.		— 1,978 3388	0,881 2156	115,590 915	+ 0,010 915	+ 0,009%	0,358 7634
10	Logaritamsko izjednačenje sa $\sqrt{y \cdot Y_1}$ kao težinom *Logarithmic adjustment using $\sqrt{y \cdot Y_1}$ as weight*		— 1,989 182	0,890 017	115.584 536	+ 0,004 536	+ 0,004%	0,358 792
11	Logaritamsko izjednačenje sa $\sqrt{y \cdot Y_0}$ kao težinom *Logarithmic adjustment using $\sqrt{y \cdot Y_0}$ as weight*		— 1,989 789	0,890 510	115,587 757	+ 0,007 757	+ 0,007%	0,358 852
12	Logaritamsko izjednačenje sa $y \cdot Y_1$ kao težinom *Logarithmic adjustment using $y \cdot Y_1$ as weight*		— 1,939 418	0,854 028				
13	Logaritamsko izjednačenje sa $y \cdot Y_{12}$ kao težinom *Logarithmic adjustment using $y \cdot Y_{12}$ as weight*		— 1,939 972	0,854 479				
14	Obično logaritamsko izjednačenje s Meyerovom korekturom *Common logarithmic adjustment with Meyer's correction*				115.749 363	+ 0,169 363	+ 0,147%	
15	Obično log. izjednačenje s Meyerovom korekturom uz uvjet: $\sigma_{\log y} = \sigma_{\log m,\, h} = f(\log h)$ *Common log adjustment with Meyer's correction and condition:*				115.607 7[illegible]	+ 0,027 726	+ 0,024%	
16	log izjednačenje za h^2 kao težinom *log adjust. using h^2 as weight*		— 2,013 996	0,905 712				
17	log izjednačenje za h^2 kao težinom s Meyerovom korekturom uz uvjet: $\sigma_{\log y} = \sigma_{\log m,\, h} = \frac{1}{h} \sigma_{\log m,\, h = 1}$ *log adjust. using h^2 as weight, with Meyer's correction and condition:*				115.624 86[illegible]	+ 0,044 862	+ 0,039%	

Dakle pretpostavka linearne korelacije statistički je dopuštena, jer se varijanca oko pravca i varijanca unutar skupina ne razlikuju signifikantno.

4.5 U tabeli 5 doneseni su rezultati različitih načina izjednačenja. Za logaritamski način govore razlozi ekonomičnosti, jer nema aproksimacija – dakle nema ponavljanja računa. Osim toga ima i drugih razloga u prilog tom načinu.

Kod određenog promjera i određene visine opažani podaci drvne mase distribuirani su nešto asimetrički, dok je distribucija njihovih logaritama već nešto simetričnija (vidi grafikon 1).



Za izjednačivanje povoljan je slučaj, ako opažani podaci imaju jednaku težinu. Kako je težina proporcionalna recipročnoj vrijednosti kvadrata standardne devijacije, dakle recipročnoj vrijednosti varijance, to bi, da budu jednake težine, i varijance morale biti jednake. Iz tabele 6 vidi se, da je varijanca opažanih iznosa funkcije za različite visine istog promjera $d = 14$ cm nekako podjednaka. Varijanca logaritama tih iznosa nešto pada s rastenjem visine. Prema tome povoljnije bi u ovom slučaju bilo izjednačivanje samih iznosa, t. j. numerusa, a ne njihovih logaritama. Ali ako se ne promatra izolirano samo materijal s prsnim promjerom $d = 14$ cm, već u vezi s ostalim materijalom različitih prsnih promjera, može se vidjeti, da varijanca logaritama varira u podnošljivim granicama, dok je varijanca numerusa kod velikih prsnih promjera 100 do 200 puta veća negö kod malih promjera. U tabeli 7 izneseni su podaci za neke prsne promjere i visine s pripadnim varijancama za bukvu Moslavačke gore. Dakle i taj momenat upućuje na izjednačivanje pomoću logaritama.

Tabela 6

$d = 14$ cm.

h	n	σ^2_m	$\sigma^2_{log\ m}$
9	7	0,000 048	0,002 633
10	7	0,000 948	0,023 467
11	15	0,000 435	0,010 507
12	22	0,000 474	0,010 357
13	34	0,000 437	0,008 745
14	76	0,000 360	0,005 540
15	116	0,000 381	0,005 426
16	147	0,000 432	0,005 440
17	123	0,000 414	0,005 204
18	134	0,000 404	0,004 680
19	98	0,000 315	0,003 111
20	64	0,000 282	0,002 459
21	36	0,000 408	0,003 637
22	19	0,000 336	0,002 378
23	7	0,000 414	0,002 800

Tabela 7

d	h	n	σ^2_m	$\sigma^2_{log\,m}$
14	16	147	0,000 432	0,005 440
25	24	153	0,004 300	0,002 449
35	27	130	0,016 746	0,001 870
45	30	107	0,060 805	0,001 890
55	31	98	0,123 609	0,001 622
65	33	62	0,400 850	0,002 373
75	36	13	0,643 141	0,001 835
78	37	7	1,146 001	0,003 593
78	38	7	0,743 283	0,001 682
79	36	20	0,921 337	0,002 084
79	38	24	1,101 515	0,002 200

4.6 Obični logaritamski način daje, međutim, nešto preniske rezultate i donekle pogrešan nagib (iznos parametra b). Signifikantnost te pogreške zavisi o broju modelnih stabala te se kod malog broja stabala može zanemariti unatoč njezinu karakteru sistematske griješke. Obično logaritamsko izjednačenje 918 stabala daje rezultat:

$$\log \mu = -2{,}050\,732 + 0{,}935\,621 \log h \qquad [133]$$

Standardna griješka iznosi

$$\sigma_{\log m,\,\log x} = \sqrt{\frac{\Sigma (\log \mu - \log m)^2}{N-2}} = 0{,}071\ 954\,.$$

Postotna pogreška samog volumena iznosi (Meyer, H. A.[16])

$$\sigma_m\,(\%) = 230{,}26 \cdot \sigma_{\log m} = 16{,}565\,\%\,.$$

Ukupna postotna pogreška procjene 918 stabala iznosila bi

$$\frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} = 0{,}5467\,\%,$$

a to je ujedno najveća moguća točnost procjene, koja bi se takvim tablicama dala postići*.

* Standardna griješka u iznosu $\sigma_{\log m} = 0{,}071\,954$ znači da bi cca $^2/_3$ logaritama opažanih iznosa trebalo da padne između granica $\log \mu \pm 0{,}071\,954$. To bi i bilo tako (ukoliko se prihvati hipoteza normalnosti distribucije, što odgovara stvarnosti samo približno, kako je već spomenuto), kad bi parametri a i b, a također i standardna griješka, bili pravi parametri populacije. Oni, međutim, nisu pravi parametri, već procjene izračunate iz uzorka veličine 918 stabala, pa su prema tome opterećeni griješkom uzroka (sampling error). Radi toga nije uputno očekivati manju standardnu griješku od 0,55%, ako bi se pomoću takvih tablica kubicirao i veći broj stabala od 918.

Ako se kao granice signifikantnosti uzmu $\pm$ 1,96 σ ($P = 0{,}05$), to bi iznos 1,96 $\sigma_m = 1{,}072\%$ bio otprilike iste veličine kao i iznos — 1,219%, za koliko je običnim logaritamskim izjednačenjima dobijen preniski rezultat. Prema tome kod izrade tabele za manje od cca 500 modelnih stabala, mogla bi se zanemariti činjenica, da obično logaritamsko izjednačenje daje preniske rezultate.

4.7 Kako taj preniski rezultat ima karakter sistematske griješke, a iznos $\sigma_{\log m}$ se i onako računa, to je uputno, a kod većeg broja modelnih stabala i potrebno upotrebiti Meyerovu korekturu. Korekcioni faktor u našem primjeru iznosi

$$f = 10^{1{,}151\ 293\ \sigma^2_{\log m}} = 10^{0{,}005\ 961} = 1{,}01382\,. \qquad [134]$$

Prema tome podatke tablica trebalo bi povećati za 1,382%, pa bi procjena ukupne mase 918 stabala iznosila (vidi tabelu 5 red. br. 1 i 14)

$$114{,}171\ 513 \,.\, 1{,}013\ 82 = 115{,}749\ 363\ \mathrm{m}^3$$

čime bi se dobio za + 0,147% previsoki rezultat.

4.8 Ako je broj modela velik, potrebno je uzeti u obzir i različite iznose varijance za različite vrijednosti argumenata. Iz tabele 6 vidi se, da iznos $\sigma^2_{\log m}$ pada s rastenjem visine. Izjednači li se taj odnos pomoću jednadžbe

$$\sigma^2_{\log m} = \log \alpha + \beta \log h\,, \qquad [135]$$

izlazi

$$\sigma^2_{\log m} = 0{,}035\ 555 - 0{,}024\ 983\ \log h^{*} \qquad [136]$$

Uz upotrebu Meyerovog korekcionog faktora s tako dobivenom varijancom jednadžba izjednačenja bila bi

$$\log M = \log A + B \log h$$

$$\log A = \log a + k \cdot \log \alpha = -2{,}009\ 798$$

$$B = b + k \cdot \beta \qquad = +0{,}906\ 858$$

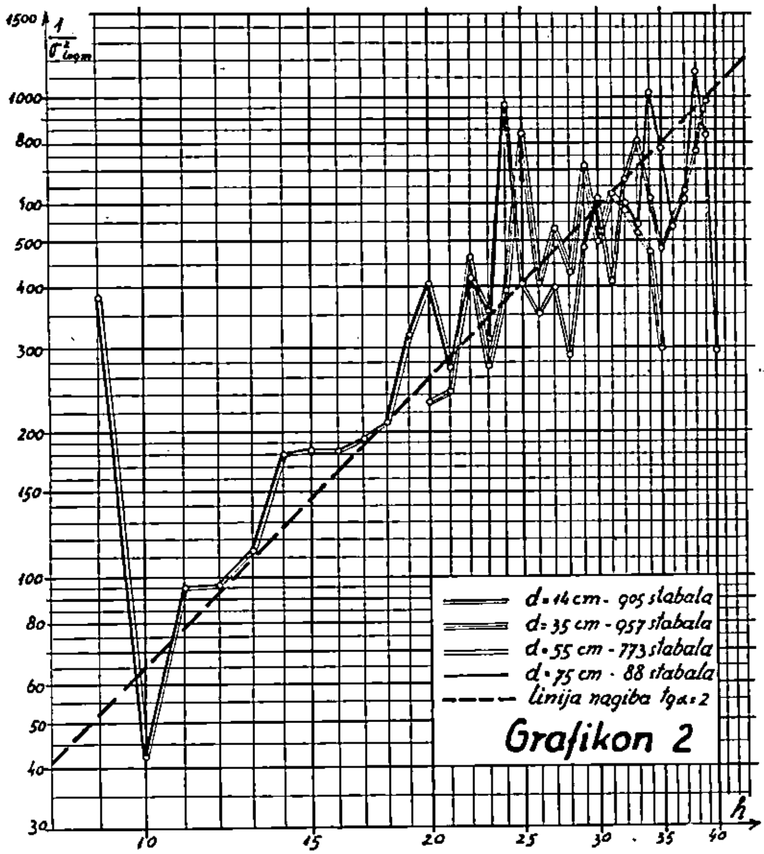
$$k = \tfrac{1}{2} \ln 10 \qquad = \quad 1{,}151\ 293$$

$$\log M = -2{,}009\ 798 + 0{,}906\ 858 \log h\,.$$

Ukupna procjena mase 918 stabala po ovoj formuli dala bi iznos za + 0,024% previsoko (vidi tabelu 5, red. br. 15).

* u tabeli 6 i 7 iskazane su varijance s obzirom na sredinu iznosa pripadnih dotičnom iznosu h (odnosne d i h), a ne s obzirom na izjednačenu vrijednost običnog log. izjednačenja. Osim toga uzete su u obzir samo skupine s više od 7 podataka. Prema tome gornja jednadžba ne odgovara potpuno pretpostavci, ali joj se približuje.

4.9 Izjednačivanje varijance opisano u prethodnoj točki posao je gotovo isto toliko opsežan kao i samo izjednačivanje tabela. Radi toga dobro je u konkretnom slučaju pokušati pronaći približno rješenje. Kod bukve iz Moslavačke gore varijanca drvne mase mijenja se sa prsnim promjerom i visinom. Prsni promjer utječe vrlo malo, tako da se približno može uzeti da je varijanca zavisna samo od



Grafikon 2

visine. Nanesu li se na log-log-papir iznosi recipročne vrijednosti varijance logaritama ($1/\sigma^2_{\log m}$) kao funkcija visine, i to za različite prsne promjere od $d = 14$ cm do $d = 75$ cm, dobit će se sistem točaka (odnosno sistem poligona, ako se spoje točke pripadne istom prsnom promjeru), koji se može odoka, približno doduše, ali sasvim dobro izjednačiti pravcem s nagibom tg $\alpha = 2$ (grafikon 2).

Prema tome funkcija bi bila oblika:

$$\log \frac{1}{\sigma^2_{\log m}} = \log C + 2 \log h , \qquad [138]$$

odnosno

$$\frac{1}{\sigma^2_{\log m}} = C \cdot h^2 . \qquad [139]$$

Recipročna vrijednost varijance proporcionalna je s težinom, pa se prema tome ta činjenica može sada upotrebiti kod samog izjednačenja tabela tako, da se uzme h^2 kao težina.

Normalne jednadžbe glasile bi

$$\left.\begin{aligned} \log a \Sigma h^2 \quad &+ b \Sigma h^2 \log h &&= \Sigma h^2 \log m \\ \log a \Sigma h^2 \log h &+ b \Sigma h^2 \log h \log h &&= \Sigma h^2 \log m \log h , \end{aligned}\right\} \qquad [140]$$

a jednadžba krivulje izjednačenja

$$\log \mu = -2{,}013\,996 + 0{,}905\,712 \,.\, \log h. \qquad [141]$$

Standardna griješka jedinice težine ($h^2 = 1$)

$$\sigma_{\log m, (h=1)} = \sqrt{\frac{\Sigma h^2 (\log \mu - \log m)^2}{N-2}} = \sqrt{1{,}333\;637} ,$$

a standardna griješka kod visine h

$$\sigma_{\log m, h} = \sqrt{\frac{1{,}333\;637}{h^2}} ,$$

Uz upotrebu Meyerove korekture

$$M = \mu \cdot f = a \cdot h^b \cdot 10^{1{,}151\,293\; \sigma^2_{\log m}} \qquad [142]$$

$$\log M = -2{,}013\,996 + 0{,}905\,712 \;\log h + 1{,}51\,293 \,.\, 1{,}333\,637 \cdot \frac{1}{h^2} \qquad [143]$$

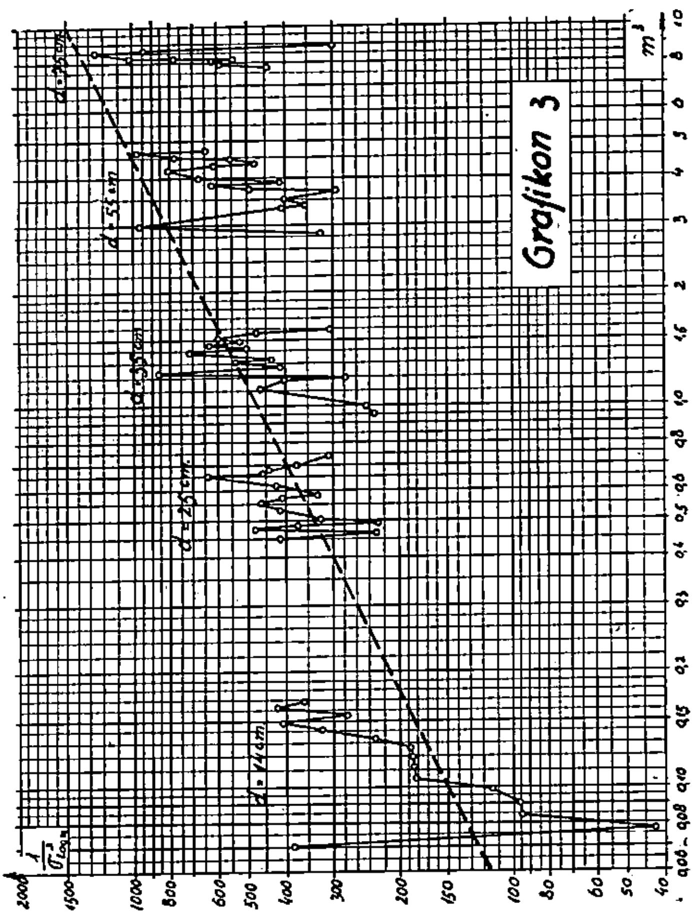
Po ovoj formuli izračunana ukupna masa 918 stabala iznosila bi 115,624 862 m³, što je za 0,039% previsoko (vidi tabelu 5 red. br. 16).

4.10 Drugi približni način bio bi upotreba $\sqrt{m}$ kao težine. Nanese li se opet na log-log-papir iznos recipročne varijance ($1/\sigma^2_{\log m}$) kao funkcija sredina opažanih iznosa za dani d i h (grafikon 3), pravac s nagibom 1/2 prolazi sredinom sistema tako nanesenih točaka za male prsne promjere do cca d = 30–35 cm.

Prema tome funkcija bi približno imala oblik

$$\log \frac{1}{\sigma^2_{\log m}} = \log C + \frac{1}{2} \log m \,, \qquad [144]$$

t. j. trebalo bi analogno kao u točki *4.9.* uzeti kao težinu $\sqrt{m}$ već kod samog izjednačenja volumena. Taj način, međutim, odgovara i uvjetima spomenutim u točki *3.2.6.*, te daje i bez korekture relativno dobar rezultat (za + 0,008% previsoko – vidi tabelu 5 red. br. 4).



Upotreba težine $\sqrt{m}$ prema tome prikladna je za izjednačenje drvnogromadnih tablica, naročito ako se radi o mladim i srednjedobnim sastojinama, t. j. ako je maksimalni prsni promjer d = 30–35 (pa možda čak i 50 cm).

5. ZAKLJUČAK

Kod primjene postupka teorije najmanjih kvadrata za izradu drvnogromadnih tablica, a uz upotrebu Schumacherovog logaritamskog izraza za drvnu masu stabla nailazimo na neke smetnje:

5.1 Izjednačuju se zapravo logaritmi, a ne numerusi, kako bi zapravo bilo potrebno, t. j. izjednačenje se provodi tako, da je udovoljeno uvjetima

$$\Sigma (\log M - \log m) = 0; \quad \Sigma (\log M - \log m)^2 = \text{minimum} \qquad [145]$$

a ne uvjetima

$$\Sigma (M - m) = 0; \quad \Sigma (M - m)^2 = \text{minimum}. \qquad [146]$$

5.2 Logaritamsko izjednačenje daje preniske rezultate, koji imaju karakter sistematske griješke tablica. H. A. Meyer riješio je taj problem pomoću korekcionih faktora.

5.3 Činjeni su pokušaji, da se logaritamsko izjednačenje modificira tako, da se uz upotrebu težina pridodanim logaritmima postignu unatoč logaritamskom izjednačenju uvjeti [146]. No kako je Schumacherov logaritamski izraz dobiven logaritmiranjem jednadžbe

$$M = a \,.\, d^b \,.\, h^c, \qquad [147]$$

dakle jednadžbe, koja nema aditivne konstante, to je nemoguće istodobno postići uvjete [146] (ta pojava odrazuje se i na logaritamskom obliku jednadžbe); radi toga potrebno je odlučiti se samo za jedan od tih uvjeta, a kako je povoljniji uvjet

$$\Sigma (M - m) = 0, \qquad [148]$$

to logaritamsko izjednačenje treba modificirati uz upotrebu težina tako, da bude udovoljeno tom uvjetu. Prema Schwerdtu[11, 12] trebalo bi u tom slučaju dodati svakom $\log m$ težinu njegova numerusa, t. j. m ili prema ovdje izvedenom prijedlogu $\sqrt{m}$ (vidi *3.2.6*).

5.4 Varijanca $\log m$ nije konstantna, kako to pretpostavlja H. A. Meyer, već se mijenja s promjenom argumenata. Približna i za praktičnu upotrebu prikladna je hipoteza, da je varijanca proporcionalna s recipročnom vrijednosti kvadrata visine. (Vidi *4.9* i grafikon 2), što se može iskoristiti tako, da se h^2 doda kao težina logaritmu volumena i na tako provedeno izjednačenje primijeni Meyerova korektura.

5.5 Prikladna je također hipoteza, da je varijanca $\log m$ proporcionalna s recipročnom vrijednosti $\sqrt{m}$ (vidi *4.10* i grafikon 3), što je također u skladu s prijedlogom iznesenim u stavci *3.2.6.* U tom slučaju nije potrebna korektura, jer je već udovoljeno uvjetu [148].

5.6 Prema tome mogao bi se stvoriti zaključak, da je kod upotrebe logaritamskog postupka za izradu tabela korisno primijeniti težinu $\sqrt{m}$, ako se radi o mladim i srednjedobnim sastojinama. Za olakšanje rada mogle bi se izraditi naročite tablice s ulazima m i s podacima $\sqrt{m}$ i $\sqrt{m} \,.\, \log m$.

Kod izrade tablica za deblja stabla povoljnija je upotreba težine h^2 s Meyerovom korekturom.

ON THE ADJUSTMENT BY MEANS OF FUNCTIONS THAT CAN BE REDUCED TO LINEAR FORMS BY LOGARITHMIC TREATMENT WITH SPECIAL REGARD TO THEIR USE IN THE PREPARATION OF TREE VOLUME TABLES

1. INTRODUCTION

When applying the least squares treatment, it is necessary to have linear functions because of parameters. If the function is not linear, it is necessary to make it linear by a suitable treatment. In dendrometry, forms of functions are often met with which become linear by logarithmic calculation (Levaković[1], Mihajlov[2], Schumacher[3]).

Schumacher's logarithmic expression for timber tree volume [1]* was developed by the logarithmic treatment of expression [2] (m = tree volume, d = diameter at breast height, h = total height; $a, b, c,$ are parameters). However, when applying the least squares treatment to such a logarithmic form of the function, the following will be obtained:

a) the sum of adjusted logarithms is equal to that of the unadjusted ones (i. e. to the sum of logarithms obtained from the individual amounts observed),

b) the sum of squares of differences between the adjusted and the unadjusted logarithms is equal to a minimum. But in reality, an adjustment is sought in which the stated conditions (the sum of squares minimum, and the sum of the first powers = 0), would be fulfilled for the original amounts – numeri – and not for their logarithms. The logarithmic adjustment gives the analogon of the geometrical mean, but in reality the analogon of the arithmetical mean is sought*.

* In order to save time and work for the mathematical part of the type setting, all equations and other expressions in the mathematical part of the setting are indicated by numbers in [ ]. The reader is therefore asked to look up for the corresponding expression in the Croatian text.

* The arithmetical mean $A = \frac{1}{n} \Sigma x$ is the mean value with which conditions $\Sigma (x - A) = 0$, and $\Sigma (x - A)^2 = minimum$, are fulfilled. If the geometrical mean

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$$

is logarithmically treated, it yields $\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log x$, i. e. for the logarithm of the geometrical mean an expression is obtained equal to the arithmetical mean, of the logarithms of variants. For that arithmetical mean however, the same conditions are valid i. e.

$$\Sigma (\log x - \log G) = 0, \quad \text{and} \quad \Sigma (\log x - \log G)^2 = minimum.$$

The geometrical mean is always smaller than the arithmetical one, and therefore the logarithmic adjustment is always giving too low results. The greater the variance of the observed data around the line of adjustment the greater the difference.

The present paper deals with this problem, and in order to facilitate the discussion and make the numerical illustrations simpler, the function of the simplest form has been chosen [3].

2. DESCRIPTION OF SOME METHODS WITH CRITICAL REMARKS

2.1 The function also can be transformed to a linear form by omitting the logarithmic calculation and applying Taylor's formula (see e. g. Ritz-Baur[4]). At first, the approximative amounts of parameters a_0 and b_0 must be determined. The further procedure may be seen in equations [4] to [11]. By repeating the procedure, the amounts α_n and β_n converge towards zero. Hence, not only will the left sides of normal equations [11] converge towards zero but the right ones too, i. e. [12]. This means that condition [13] has been fulfilled, but not simultaneously the condition [14], which should also be achieved. Such things occur when functions with no additive constant are used (see e. g. Willers[5]).

2.2 If equation [15] is logarithmically treated, expression [16] is obtained leading to normal equations [17]. In that way (let us call it common logarithmic treatment) the calculated parameters are not identical with the amounts computed in the manner *2.1.* Here the condition [19] has been fulfilled but not the condition [18]. This method gives too low results, and with tree volume tables – that fact assumes the characteristic of their systematic error. The logarithmic treatment, however, is economic in spite of the application of logarithms.

2.3 H. A. Meyer[7] prepared a table of correction factors by which the result of the common logarithmic treatment should be multiplied (see also Chapman-Meyer[6]). That correction factor has been developed on the hypothesis that the differences of logarithms of observed amounts y_{ij} and of logarithms of adjusted amounts η_i, i. e. the differences $(\log \eta_i - \log y_{ij})$, are normally distributed around zero and that the amounts $\log y_{ij}$ are normally distributed around $\log \eta_i$ respectively. That hypothesis satisfies only approximately the reality, but even if this distribution is not quite normal, the factors calculated according to that hypothesis are still applicable.

Expressions [20] to [31] represent Meyer's derivation taken from the stated Research paper No. 7 in a somewhat more detailed form.

In this way a fairly good result will be achieved; i. e., the sum of amounts observed will be approximately equal to that of the adjusted amounts. But this does not mean yet that this adjustment, too, is quite correct, and that by the ordinates obtained in this way also the most probable line is determined. When applied to Schumacher's logarithmic expression for timber tree volume – besides the hypothesis that the distribution of logarithms of observed amounts is normal with the standard deviation $\sigma_{\log m}$, the hypothesis has also been tacitly accepted that this $\sigma_{\log m}$ is equal for every value of arguments, which, however, does not correspond to reality. If the collective of measurements for the preparation of tree volume tables is studied, then the logarithmic picture of dispersion for a small diameter and height is quite different from that for a great diameter and height. If the diameter is constant, $\sigma_{\log m}$ decreases as the height increases. Thus, the average $\sigma_{\log m}$ for small diameters is greater than for the large ones. Hence, it would be necessary to know the amount of the variance for every diameter and every height, i. e., it would be necessary to carry out the adjustment of the value $\sigma^2_{\log m}$ as a function of d (= $d\,b\,h$) and h (= total height). That adjustment could be carried out for the function [33] according to formula [34], although in doing so the value of the variance for the extreme values of arguments might turn out to be negative. That, of course, would be a nonsense, and at that same time also a sign, that for the adjustment at least [35] should be used. In that case (if formula [34] is used), we should obtain [36] [37] [38]. These, however, show that parameters calculated in the usual logarithmic way are incorrect, that is, not only parameter a, but also parameter b, the latter one deciding the slope of the straight line in the log-log plane. If σ^2 is equal for every value of the arguments as is supposed by H. A. Meyer, only the amount of parameter a will be corrected, while that of the parameter b will remain the same.

2.4 G. T. Fehner[8] describes the connection between the geometrical mean G and the arithmetical mean A by using the approximate formula [39], in which q^2 is the variance of numeri according Scheibner's proof, whose work, much to my regret, I was not in a position. to obtain.

2.5 This problem was solved by Worthing and Geffner[10] in the following way. Going over to the logarithmic way of calculation, the observed data (which are supposed to have weight = 1) change their weight. It follows from equations [40] to [46], that every logarithm should be weighted with the square of its numerus. This procedure is based on the supposition, that differences are small and the sum of their squares minimum, and that at the same time the sum of differences themselves is not equal to zero. (see *2.6*).

2.6 Schwerdt[11, 12] abstains from taking every logarithm weighted with the square of the numerus, but with the numerus itself only (not with the second, but with the first power of the numers) If [47] is the equation of the line, and if the adjusted value [48] corresponds to the observed pair of coordinates (y_i, x_i), then, according to the method of the least squares, [49] is the result. However, if it is more convenient to carry out the adjustment according to the modified equation [50], then the difference will amount to [51]. Adjustment should satisfy conditions [52] and not [53], because if condition [53] is fulfilled, condition [52], is not fulfilled at the same time. Function [55] results from function [54], while function [56] can be split up into Taylor's series [57]. If the l amounts are not too large, the first two members of the series will suffice, hence [58] and [59] respectively. If we have [60], then we also have [61]. Further, from [62] results [63]. The first condition of an adjustment is that $\Sigma l = 0$, i. e., [64], the results of which is [65], and this is the first normal equation that could be obtained from condition [66], i. e., from the condition of logarithmic adjustment, provided each logarithm is weighted with the amount of its numerus. The second normal equation would be [67], and the amounts of parameters a and b should be calculated by means of these two equations. However, in this way condition [68] is not fulfilled, because it results in [69], leading to normal equations [70], these again are normal equations that could be obtained from condition [71], i. e., from the condition proposed by Worthing and Geffner (see 2.5). This unfavourable influence of the lack of an additive constant in equation [73] is felt also when using its logarithmic form.

Schwerdt takes the condition $\Sigma l = 0$. He concludes from equations [79] and [80], that in the log-log system of coordinates the straight line should pass through the point [81], and of all the possible straight lines passing throught that point, Schwerdt chooses the one whose sum of squares of differences is a minimum. The procedure is an arithmetical-graphical one according to Mehmke's method (see Schwerdt[12], page 83), and is necessarily uneconomical when a somewhat large number of observations is involved.

3. OTHER POSSIBLE SOLUTIONS

3.1 If the differences between the amounts observed and the mean (or the line of adjustment) are small, then with Taylor's series [82] only the first two members are taken, while the rest may be neglected. If, however, these differences are large enough, i. e., if there is a considerable dispersion – which is regularly the case, – then this omission is no longer admissible. It is better therefore to put down immediately the rest in Lagrange's form [83] yielding [84] instead of the second member. If we have [85], [86] and [87], $y + \Theta l$ is y_s, which is greather than y and smaller than Y, i. e., [88].

With the arithmetical mean [89], i. e., if the weighted arithmetical mean of logarithms of a collective $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, is computed by assigning to every logarithm as a weight an amount y_s which is larger than y and smaller than $Y = \frac{1}{n}\Sigma y$, then this weighted mean will give the logarithm of the arithmetical mean Y. The common mean of logarithms without weight, however, would give the logarithm of the geometrical mean η.

The expression [91] yields [92] and [93] respectively, and since the amount of the arithmetical mean Y is still sought, the amount η should be inserted as an approximate value on the right side of the equation [93] instead of Y; (η = geometrical mean = [94]). The weighted mean obtained in this way can be taken as the next approximation for Y. By repeating this procedure the exact amount for Y is obtained*.

If [95] is considered, then for y_s an approximate value can also be taken for instance [97] and then [98] is obtained. Hence, if the weighted mean of logarithms of a collective is calculated by assigning to every logarithm the weight of the square root of its numerus, then a logarithm will be obtained whose numerus will be very almost equal to the arithmetical mean of the original data. For instance, let us suppose the following collective is given:

$$x_1, x_2, \ldots x_n = 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18$$

$n = 8$, arithmetical mean $A = 10$, $\log A = 1$. If it is stipulated that the arithmetical mean A is to be calculated from data consisting of logarithms of the above stated numbers, then the common mean will yield the logarithm of the geometrical mean. By applying weights and the formula for the weighted mean of logarithms, an expression will be obtained whose antilogarithm is be more or less close the arithmetical mean.

From the data contained in Table 1, it is evident, that by applying the weight $\sqrt{x}$ a very satisfactory result is obtained.

3.2 Processes carried out in point 3.1 can now be applied to function [100] and to the function with two variables [101], and only there they get their full meaning. Here, however, either the condition [102] or the condition [103] must be chosen, as both cannot be fulfilled at the same time.

3.2.1 Condition [104] results in condition [105], and finally in [106], the last of these possessing the form of the first normal equation that could be obtained from condition [107], i. e., in accordance with logarithmical adjustment by the least squares treatment, provided every logarithm is weighted with the amount y_s. The second normal equation would be [108]. Since the adjusted ordinates (Y) must first be sought, it is necessary to calculate the y_s amount, to use as the first approximate values those obtained by the graphical or ordinary logarithmic adjustment.

3.2.2 Condition [109] yields the normal equations [110] possessing the form of normal equations obtained on condition that [111]. This method is the logarithmic form of method 2.1, and it seems that both methods would have to yield an identical result if repeated a sufficient number of times. However, the same parameter amounts are not obtained because here even the scale for x is logarithmic.

3.2.3 [112]
3.2.4 [113]
are two approximate methods similar to those in *3.2.1* and *3.2.2*.

* With the arithmetical mean this procedure is of course nonsensical, but it gets its value with the line and surface of adjustment.

3.2.5 The adjustment can be carried out according to equation [114] and the method of moments (see Baur[4], Worthing-Geffner[10]) in order to satisfy conditions [115].

If [116] is the arithmetical mean of all y amounts, i. e., if [116] is the ordinate of the gravity centre of the total collective of observed data, then [117] is obtained. (Let us imagine the abscise axis translocated to the gravity centre. In that case L_y = ordinate of the observed amount, and L_Y the pertinent ordinate of the adjustment line). Expression [117] represents the sum of the nullth moments of the amounts observed, and must be equal to the sum of the nullth moments of the adjusted amounts [118], and since we have [119], we must also obtain [120]. If, analogously to the preceding cases, we take [121] and [122], then [123] is obtained. We obtain analogously [124] from the sum of the first moments, but we would also obtain these same equations from condition [125], whereby expression [126] would of course be taken for y_s.

3.2.6 For y_s we could approximately take [127] and this also conforms approximately to condition [128] and to the adjustment according to the method of moments. Here, however, $\sqrt{Y_0}$ as a constant can be eliminated from the weight, and thus $\sqrt{y}$ is obtained as weight.

Hence, if the logarithmic adjustment is carried out according to the method of the least squares and by using function

$$\log Y = \log a + b \log x,$$

so that every logarithm of an observed amount is given the weight equal to the square root of its numerus, then very nearly a result will be obtained, which is analogous to the adjustment of the numeri according to the method of equal moments.

3.3 To illustrate all these ways, a simple example will be shown first (Schwerdt[11]) [130]. The results are shown in Table 2.

4. ADJUSTMENT OF TREE VOLUME TABLES

This adjustment can consequently be carried out in several ways. The choice of the way depends on the economy of the method, on the structure of the material, and on the aim on account of which the adjustment is being carried out.

4.1 A method is economical, if a repetion of the calculation is not necessary.

4.2 The structure of material denotes the frequency distribution of arguments, distribution of observed amounts around the line of adjustment, and the variance.

4.3 The aim of adjustment with tree volume tables is to find out the mean value which will serve in practice as an estimate of the timber volume for a given diameter and height. Therefore, the most probable estimate is sought not only for the total timber volume of the stand which has a structure similar to that of the population from which material for the preparing of tables has been taken as a sample, but also for the estimate of volumes of individual tree groups, as for instance of a certain class of thickness.

As an illustration an extract is taken from the material which has served for preparing the tree volume tables for the beech trees of Moslavačka Gora* (Moslavačka Mountain).

* That material came from the beech forests of the Moslavačka Gora in northern Croatia. The structure of the stands is in the stage of transition from the virgin to that of the evenaged. The terrain of the forests is hilly. Besides beech trees there are also some oak trees (Q. sessiliflora) growing on the mountain ridges.

Trees were felled and measured by sectioning as sample trees for a long-term sales contract. The sample trees were selected in various ways. Since different persons were in charge of the measurements, the reliability of the data cannot be accepted unconditionally.

The hypothesis of linearity for equation [131] was tested by means of the Fisher-Snedecor F-test (Fisher[14], Linder[15]) using material having $dbh = 14$ cm (see Tab. 3). The analysis of the variance is given in Tab. 4. Statistically, it is allowed to suppose a linear correlation, because the differences of the variance are not significant.

4.5 Tab. 5 contains the results of different ways of adjustment. The following conditions are in favour of the logarithmic method: a) with a given diameter and height the distribution of observed data of the timber volume shows a certain skewness. With the logarithms of volumes, however, that skewness is somewhat smaller (see Graph 1); b) an equality of weights of the data represents a favourable case for the adjustment of data. Since the weight is proportional to the reciprocal value of the variance, the variance should be approximately the same for the different values of arguments. The variance for the numerus of volume decreases only slightly for a given diameter if the height increases, but there are very great differences with different diameters. With great diameters, the variance is by about 100–200 times greater than with small diameters. The variance of the logarithms of volumes does not show such differences. The influence of the diameter is almost, negligible, but with increasing height the variance decreases a little (see Tab. 6 and 7).

4.6 and 4.7 The logarithmic method gives too low results, it is therefore necessary and useful to apply Meyer's correction when preparing tables for which an adequate number of sample trees is available. In our case the correction factor amounts to [134].

4.8 If the number of sample trees is exceptionally large, then it is also necessary to consider various amounts of the variance of volumes for different values of arguments. One can see in Table 6, that the amount of $\sigma^2_{log\ m}$ is decreasing as the height is increasing. If that relation is adjusted according to equation [135], then [136] is obtained, and if now also Meyer's correction factor is applied, [137] will result (see Tab. 5, ord. number 15).

4.9 The variance adjustment as described sub. 4.8 necessitates rather much work. It is therefore worth while trying to find out in a given case an approximate solution. One can accept approximately the hypothesis, that the variance of volume is depending on height only. That hypothesis is at any rate acceptable for the material of Moslavačka Gora. If reciprocal values of the variance of the logarithms of volume ($1/\sigma^2_{log\ m}$) are inserted in the log-log paper as a function of height and for different diameters – $dbh = 14$ cm, 35 cm, 55 cm and 75 cm, and if points belonging to the same diameter are connected, four polygons will be obtained, which can be, though only approximately, but quite well adjusted by the straight line having a slope of $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (see Graph. 2).

Hence the function would have the forms [138] and [139] respectively.

This fact can now be used with the adjustment itself by weighting in advance every logarithm of volume with the corresponding square of the height (weight is the reciprocal value of variance). The normal equations would have the form of [140], and equations of the curve of adjustment [141]. By applying Meyer's correction, the equations of adjustment would be [142] and [143] respectively (see tab. 5, ord. no 16).

4.10 Another approximate method would be to use $\sqrt{m}$ as weight. If the amount of the reciprocal variance ($1/\sigma^2_{log\ m}$) is inserted in log-log paper as the function of means of observed amounts for a given dbh and h (Graph. 3), the straight line having a slope of $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ passes through the middle of the system of so plotted points, but only for small breast height diameters up to about 30–35 cm.

Consequently, the function would have approximately tle form [144], i. e., $\sqrt{m}$ should be taken as weight at the adjustment of the volume itself analogously to point 4.9. This method, even without correction, will yield a relatively good result (by 0.008% too high – see Tab. 5, ord. no 4).

It is therefore convenient to use $\sqrt{m}$ as weight for the adjustment of tree volume tables, particularly if young or middle aged stands are the question, i. e., if the maximum *dbh* is 30 to 35 cm and perhaps even 50 cm.

5. SUMMARY

When applying the theory of the least squares treatment for the preparation of tree volume tables using at the same time also Schumacher's logarithmic expression for the timber tree volume, certain inconveniences are encountered:

5.1 In reality, only the logarithms are being adjusted, and not the numeri, as should be really done, in other words, the adjustment is carried out so as to fulfil the conditions

$$\Sigma (\log M - \log m) = 0; \qquad \Sigma (\log M - \log m)^2 = \text{minimum} \qquad [145]$$

and not the conditions

$$\Sigma (M - m) = 0; \qquad \Sigma (M - m)^2 = \text{minimum} \qquad [146]$$

5.2 The logarithmic adjustment yields too low results, which have the character of a systematic error of tables. H. A. Meyer solved the problem by means of correction factors.

5.3 Efforts were made to modify the logarithmic adjustment so as to fulfil conditions [146] in spite of the logarithmic adjustment by assigning weights to the logarithms.

But since Schumacher's logarithmic expression was obtained by the logarithmic treatment of equation

$$M = a \,.\, d^b \,.\, h^c \qquad [147]$$

i. e., of an equation that has no additive constant, it is impossible to fulfil at the same time conditions [146] too, (that fact is also reflected in the logarithmic form of the equation), and it is therefore necessary to choose only one of these conditions, and since $\Sigma (M - m) = 0$ [148] is the more favourable one, the logarithmic adjustment should be modified by applying weights in such a way as to fulfil that condition. According to Schwerdt[11, 12], one should add in that case to every $\log m$ the weight of its numerus, i. e., m, or $\sqrt{m}$, according to the proposal explained here (see *3.2.6*).

5.4 The variance of $\log m$ is not constant as is supposed by H. A. Meyer, but is changing with the change of arguments. The hypothesis that the variance is proportional to the reciprocal value of the height raised to the square, is only an approximate one and quite suitable for practical use (see *4.9* and Graph. 2). Use can be made of this by adding h^2 as weight to the logarithm of volume and by applying Meyer's correction to the adjustment carried out in this way.

5.5 The hypothesis, that the variance of $\log m$ is proportional to the reciprocal value of $\sqrt{m}$ (see *4.10* and Graph. 3), is also suitable and in accordance with the proposal brought forward in *3.2.6*. In that case a correction is not necessary, because the condition [148] has already been fulfilled.

5.6 Hence we might conclude that it is useful to apply the weight $\sqrt{m}$ when using the logarithmic method for the preparation of tables if young or middle-aged stands are the question. To facilitate the work, one might prepare special tables with m as an entry, and with $\sqrt{m}$ and $\sqrt{m} \,.\, \log m$ as data.

When preparing tables for thicker trees, it is more convenient to utilize the weight h^2 with Meyer's correction.

LITERATURA – LITTERATURE

1. *Levaković A.*, Analitički izraz za sastojinsku visinsku krivulju. Glasnik za šumske pokuse broj 4, Zagreb 1935.
2. *Mihajlov I. S.*, Matematičko formuliranje na zakonot za rastenjeto na šumskite drva i nasadi. Godišen zbornik na zemjodelsko-šumarskiot fakultet na univerzitetot – Knjiga 1. Skopje 1949.
3. *Schumacher F. X.* and *Hall F. Dos. S.*, Logarithmic Expression of Timber Tree Volume. Jour. Agr. Research, Vol. 47, 1933.
4. *Ritz-Baur*, Handbuch der Mathematischen Statistik, Leipzig 1930.
5. *Willers Fr. A.*, Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1928.
6. *Chapman-Meyer*, Forest Mensuration, New York 1951.
7. *Meyer H. A.*, A Correction for a Systematic Error Occuring in the Aplication of the Logarithmic Volume Equation. The Pennsylvania State Forest School, Research Paper No 7, 1941.
8. *Fechner G. T. – Lips G. F.*, Kollektivmasslehre, Leipzig 1897.
9. *Scheibner W.*, Über Mittelwerte. Auszug aus einem an Hern Prof Fechner gerichteten Schreiben. Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Meth. Phys. Klasse 1873.
10. *Worthing A. G.*, *Geffner J.*, Treatment of Experimental Data, New York 1944.
11. *Schwerdt H.*, Über ein graphisches Ausgleichungsverfahren, Phys. Zeitschrift XX, 1919, Leipzig.
12. *Schwerdt H.*, Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924.
13. Arbeitsplan für die Aufstellung von Formzahl- und Baummassentafeln (Festgestelt bei der Berathung zu Eisenach im März 1874).
14. *Fischer R. A.*, Statistical Methods for Research Workers, London 1949.
15. *Linder A.*, Statistische Methoden für Naturwiss., Mediziner und Ingenieure, Basel 1945.
16. *Meyer H. A.*, The Standard Error of Tree Volume from the Logarithmic Volume Equation. Journ. For. 36, 1938.