Fiziološko - dinamički osnovi funkcija rastenja

Levaković, Antun

PROF. DR. A. LEVAKOVIĆ:

FIZIOLOŠKO - DINAMIČKI OSNOVI FUNKCIJA RASTENJA

(Physiologisch-dynamische Grundlagen der Wachstumsfunktionen)

SADRŽAJ (INHALT):

I. U četvrtoj knjizi »Glasnika za šumske pokuse« (str. 192 i 193) rekao sam bio, da se zbiljna krivulja rastenja kod šumskog drveća ne da matematički formulirati sasvim strogo i to radi njenog stepeničastog oblika kao i radi vanredne nestalnosti tih stepenica, a naročito njihovih visina. No ako apstrahiramo ove nepravilnosti, onda — rekoh — možemo da postavimo matematičke funkcije, koje (više ili manje strogo) mogu da predstavljaju prosječan hod rastenja tokom vremena, izjednačujući time zbiljnu (stepeničastu i inače nepravilnu) krivulju rastenja u krivulju pravilnu i jednostavnije konstrukcije.

U ono doba držao sam, da se ovakove »funkcije rastenja« ne mogu da izvedu direktno t. j. iz nepoznatih još »funkcija prirašćivanja«, nego tek nakon što smo funkciju prirašćivanja na osnovi izvjesnih, za matematičku dedukciju iskoristivih činjenica već izveli. Sada pak, potaknut nekim primjedbama, što ih je o svim dosadanjim funkcijama rastenja, pa i o mojima nedavno iznio W. PESCHEL (Thar. forstl. Jahrbuch 1938, str. 169 i dalje), došao sam u mogućnost, da prosječan hod (tok) rastenja, što ga više ili manje strogo imaju da predstave dobre funkcije rastenja, dovedem u vezu sa d i n a m i č k i m z b i v a n j e m, koje se odigrava prigodom rastenja drveća, pa da na toj bazi glavnu svoju funkciju rastenja izvedem direktno t. j. bez potrebe prethodnog izvođenja pripadne joj funkcije prirašćivanja.

Na taj način izlazila bi ujedno spomenuta moja funkcija kao neke vrste posljedica spomenutog zbivanja, a osim toga bio bi uočljivo prikazan i njezin rang prema izvjesnim dvjema, također dobrim funkcijama rastenja.

Pri tom ne mogu, a da — bar u glavnim linijama — ne tangiram i poznate već činjenice iz fiziologije bilja, o kojima vidi npr. djela, navedena u popisu upotrijebljene literature pod brojevima 3 i 4.

II. Poznato je, da je rastenje bilja (koje ću ovdje imati u vidu samo s obzirom na posebne prilike šumskog drveća) zapravo jedna vrst g i b a n j a, koja se kod drveća zbiva:

1. u vertikalnom pravcu (rastenje visine);

2. u horizontalnoj ili drugoj kojoj ravnini (rastenje debljine debla ili granja i s njome skopčane ploštine poprečnog prereza);

3. u prostoru svih triju dimenzija (rastenje volumena, drvne sadržine, drvne mase).

Poznato je nadalje, da se mehaničko g i b a n j e izražuje kvantitativno iznosom p u t a (y) prevaljenog do isteknuća izvjesnog vremena (x), a fiziološko r a s t e n j e da se izražuje iznosom v i s i n e, d e b l j i n e ili d r v n e s a d r ž i n e (y) postignute po stablu do izvjesne starosti (x).

Faktično se međutim i kod fiziološkog r a s t e n j a može govoriti o prevaljenom p u t u, jer npr. vršna točka stabla prevali (kod rastenja stabla u visinu) izvjestan linearan put u smjeru prema gore. Isto tako krajevi bilo kojeg promjera prevaljuju (kod rastenja u debljinu) izvjestan linearan put u smjeru prema vani. Periferija poprečnog prereza prevaljuje istodobno (također prema vani) izvjestan dvo-dimenzionalan, a volumen izvjestan tro-dimenzionalan put.

Ja ću ovdje imati direktno u vidu samo prevaljivanje ovog trodimenzionalnog puta t. j. rastenje volumena, jer ono što u pogledu rastenja važi načelno za volumen, važi analogno i za visinu i za debljinu, pa i za ploštinu poprečnog prereza, pošto je — kao što znamo — rastenje volumena s l i č n o rastenju spomenutih komponenata volumena.

Sa pojmom samoga g i b a n j a usko je vezan pojam b r z i n e gibanja. Kod n e j e d n o l i č n o g gibanja, kamo spada i fiziološko rastenje, brzina gibanja, pa prema tome i b r z i n a r a s t e n j a definira se u smislu formule

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

kao diferencijalni kvocijent, koji — kao što je poznato — predstavlja ujedno »besprekidni« tečajni prirast.

Poznato je osim toga, da se ovaj prirast dot. brzina rastenja m i j e n j a tokom vremena, čega radi se fiziološko rastenje i poklapa sa nejednoličnim gibanjem. Razlog tome neprestanom mijenjanju brzine rastenja leži u činjenici, da na svako fiziološko rastenje utječe mnoštvo anorganskih i organskih sila, koje se također tokom vremena mijenjaju. Mnoge od ovih poznate su nam, a bit će ih jamačno dosta i takovih, koje nam još nisu poznate. Neke su od njih n u t a r n j e g porijekla t. j. svojstvene su p o j e d i n i m v r s t a m a bilja i kao takove ne spadaju u okvir ovih razmatranja. Sile v a n j s k o g porijekla dadu se svrstati u ove dvije glavne skupine:

1. sile, koje pokreću rastenje i podržavaju ga dotično p o g o d u j u mu (pogodne sile);

2. sile, koje se s u p r o t s t a v l j a j u rastenju (nepogodne sile).

Očito je, da sa ukupnom snagom prve skupine sila stoji brzina rastenja u u p r a v n o m, a sa ukupnom snagom druge skupine sila u o b r n u t o m omjeru. T. j. što je u izvjesnom vremenskom momentu jača prva skupina sila i što je istodobno slabija druga skupina sila, to je brzina rastenja u tome momentu veća — kao i obrnuto. Prema tome, ako ukupnu snagu prve skupine sila označimo sa S_1, a ukupnu snagu druge skupine sila sa S_2, onda između brzine rastenja i snage ovih dviju skupina sila mora da postoji odnos:

$$y' = k\frac{S_1}{S_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gdje k predstavlja konstantu proporcionalnosti.

III. Među p o g o d n e sile rastenja spada u prvom redu toplina i svjetlo — naravski samo ako im snaga ne prekorači izvjesnu granicu, izvan koje postaju one već štetnima (nepogodnima). Ovaj slučaj međutim neću ovdje uzeti u obzir. No i pogodnima za rastenje mogu ove sile da budu samo uz uslov, da je ujedno u tlu prisutna i dovoljna količina vode kao i ostalih zemnih hraniva. Kratkoće radi sva ću ova hraniva zajedno sa vodom supsumirati odsad pod izrazom »voda«. U smislu uvodnog (prvog) stava; gdje se govori o prosječnom i pravilnom (izjednačenom) toku rastenja, ja ću ovdje suponirati trajnu prisutnost dovoljne količine i svjetla i topline i vode. Ova konstantna količina tih triju faktora rastenja ima da bude samo tolika, da bi s njome bila izjednačena zbiljna njihova količina, promjenljiva i periodički i nepravilno.

No i svjetlo i toplina i voda ostali bi, kao što je poznato, bez ikakova učinka, kad drveće ne bi imalo korijenja, lišća i naročitih stanica sposobnih za dijeljenje i rastenje. Vodu, kao što znamo, crpi drveće u glavnom s pomoću crpive snage korijenja. Ona putuje gore u lišće, gdje se pod uplivom svjetla i topline djelomice pretvara u asimiliranu hranivu materiju, a ova opet putuje (izravno ili neizravno) u vršne i kambijalne stanice, na čijoj se aktivnosti faktično i osniva cijeli proces rastenja stablova.

Korijenje i lišće, pa i kambijalne (i vršne) stanice nužni su dakle preduslovi za rastenje stabla, jer snaga S_1 dolazi do izražaja dot. do učinka na rastenje samo s pomoću i jednoga i drugoga i trećega od spomenutih triju preduslova. Prema tome će snaga S_1 biti to jača, što je veća aktivnost korijenja, lišća i kambijalnog tkiva; a ova će opet biti to veća, što korijenja, lišća i spomenutog tkiva više ima, t. j. što je veći volumen i korijenja (v_1) i lišća (v_2) i kambijalnog tkiva (v_3).

Sad se pita, u kojoj formi treba da budu izražene ove proporcionalnosti? Rekao sam već, da rastenja stabla ne bi bilo, kad na njemu dot. u njemu ne bi bilo ni korijenja ni lišća ni kambija. Ako naime ne bi bilo korijenja, lišće samo ne bi moglo da funkcionira kao i obrnuto. Ako pak ne bi bilo kambija u trupu stablovu, onda rastenja ne bi bilo ni pri potpunom funkcioniranju korijenja i lišća. Iz toga se sam od sebe nadaje zaključak, da između snage S_1 i spomenutih triju skupina tkiva mora da postoji odnos

$$S_1 = q_1 v_1 . q_2 v_2 . q_3 v_3 = q_1 q_2 q_3 . v_1 v_2 v_3 \quad . . (5)$$

jer nedostatak samo jednoga od spomenutih uslova poništuje odmah djelatnost cjeline.

Ovaj izraz za snagu S_1, u kojem izrazi q_1, q_2, q_3 predstavljaju konstante proporcionalnosti, mi ćemo nešto transformirati s obzirom na to, da se volumen i korijenja i lišća i kambijalnog tkiva može da izrazi u dijelovima volumena cijelog nadzemnog stabla (y), bez lišća naravski. No pri tom treba uzeti u obzir, da se pod oznakom v_1 ne može ovdje da radi o volumenu cijeloga korjena, već samo o volumenu sitnih, dlakastih žilica sisalica, koje kao jedini dijelovi korjena vrše funkciju crpljenja vode iz zemlje, pa su stoga sa svojim ukupnim volumenom i jedino mjerodavne za iznos snage S_1.

Odnos između ukupnog volumena ovih sisaljaka i volumena stablovog može da se izrazi formulom

$$v_1 = c_1 \cdot y^{m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

kojoj eksponent m_1 može da se nalazi negdje u prvoj (nižoj) polovici razmaka između 0 i 1.

Ovo može da se protumači okolnošću, da te sisalice čak i kod sasvim mladih biljaka zapremaju manje od ½ površine cijeloga korjena, a osim toga sa rastenjem biljke, pa prema tome i sa rastenjem (debljanjem) korjena zauzimlju na ukupnoj površini korjena razmjerno sve manju i manju površinu (makar ova, radi povećanog broja žiljnih ogranaka, u apsolutnom pogledu biva sve veća).

Slično stoji stvar i sa volumenom lišća u omjeru prema volumenu ostalog nadzemnog dijela stablova, jer sisaljkama na podzemnom dijelu stabla odgovara lišće na nadzemnom dijelu istoga i jer po poznatom jednom zakonu količina nadzemnih izbojaka (zajedno sa lišćem) mora da stoji u izvjesnom ravnovjesju sa količinom podzemnih izbojaka (zajedno sa sisaljkama). Ali i inače, cijeli nadzemni dio mlade biljke nije zapravo ništa drugo, već jedna prava krošnja, pošto grančice sežu sve do zemlje. Kako biljka biva veća, to joj se postepeno sve više diferencira deblo (bez granja), a osim toga i deblji (nutarnji) dijelovi granja ostaju sve više bez lišća, tako da ukupni volumen lišća — ma da postepeno sve više raste — zaostaje razmjerno ipak sve više za volumenom cijelog stabla. Prema tome za volumen lišća u odnosu prema volumenu stabla izlazi izraz sličan pređašnjemu t. j.

$$v_2 = c_2 \cdot y^{m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

gdje m_2 pada poprilici na isti rang kao i u pređašnjem slučaju.

Što se napokon tiče kambija, njegov volumen dade se također lako staviti u odnos prema volumenu stabla. Kambij naime nije ništa drugo, već jedan tanki plašt, koji (pod korom) omata volumen samoga drva u užem smislu riječi. Kad bi on omatao drvo sa korom, onda bi njegov volumen bio proporcionalan baš prvoj potenciji drva sa korom. Ovako pak volumen kambija proporcionalan je svakako manjoj potenciji toga drva, dakle:

$$v_3 = c_3 \cdot y^{m_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

gdje je dakle m_3 svakako manje od 1.

Uvrstimo li sad ova tri zadnja izraza u formulu (3), dobit ćemo:

$$S_1 = q_1 q_2 q_3 \cdot c_1 c_2 c_3 \cdot y^{m_1 + m_2 + m_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

m_1

Tu se sad ujednostavnjenja radi može da stavi:

$$\left.\begin{aligned} q_1 q_2 q_3 \cdot c_1 c_2 c_3 &= k_1 \\ m_1 + m_2 + m_3 &= m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

pa onda dobivamo:

$$S_1 = k_1 y^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

gdje m u smislu prednjih izvoda može da varira između 1 i 2, ali ne dostižući ni jednu ni drugu ovu granicu.

Time bi nam brojnik formule (2) bio daden u formi prikladnoj za daljnji postupak u naznačenom smjeru.

IV. Prelazim sada k drugoj skupini sila, t. j. sila suprotnih rastenju (nepogodnih), u koju spadaju u glavnom razne prirodne nepogode i razni štetnici životinjski i bilinski. Kako se tokom vremena mijenja aktivnost ovih sila?

Povremeno rastenje aktivnosti ovih sila očito ne stoji u direktnoj vezi sa rastenjem volumena stablova. Volumen naime može i da prestane rasti, a da se štetni rad nepogodnih sila ipak ništa ne umanji dotično, u koliko bi radi toga neki štetnici i otišli, dolaze na njihovo mjesto odmah drugi, kojima ovakav objekt baš prija. Aktivnost štetnih sila raste dakle postepeno ne toliko u omjeru sa rastenjem volumena, koliko u omjeru sa rastenjem vremena.

Kao što se pogodni utjecaji na rastenje ne mijenjaju od vremena do vremena pravilno, a ja sam ih ipak iz poznatih već razloga traktirao, kao da u njihovu djelovanju na rast drveća postoji pravilnost, tako ću iz istih razloga postupati i ovdje. Samo pri tom moram odmah da istaknem, da se ukupna snaga nepogodnih sila ne može formulirati na način sličan predašnjemu, jer među tim silama ne postoji u glavnom odnos sličan onome, na kojem se osniva formula (3). Osim toga o nijednoj od tih sila nije nam zapravo moguće stvoriti si sa matematičko-dinamičkog gledišta neki određeni sud zasebice i već a priori. Tu nam ne preostaje drugo, već o njihovim više manje skupnim snagama i o rastenju tih snaga adoptirati neke naročite supozicije (hipoteze), od kojih bi najmarkantnije bile ove tri:

1. da i ukupni broj štetnih sila kao i njihova pojedinačna snaga raste sa vremenom u smislu linearne funkcije;
2. da i jedno i drugo raste u smislu eksponencijalne funkcije;

3. da oboje raste po nekom trećem zakonu, koji čini u neku ruku prelaz između prva dva zakona, u pogledu rastenja spomenutih sila više manje ekstremna.

U smislu linearne funkcije raste broj štetnih sila, ako u svakom pojedinom momentu, koji istekne od izniknuća biljke, dođe na nju jednak broj štetnika, recimo a njih. U tom slučaju nalazi se na biljci:

pri isteku	1.	momenta	nakon	izniknuća:	ukupno	a štetnika
„ „	2.	„	„	„	„	$2a$ „
„ „	3.	„	„	„	„	$3a$ „
. . . .						. . . .
„ „	x-tog	„	„	„	„	xa „

Ako x-ti momenat uzmemo kao skrajnji, onda je u tom momentu najstarija ona a-skupina, koja je na biljku najprije došla, a njoj je u smislu pretpostavke snaga najveća. Ta snaga neka bude

$$s_x = bx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

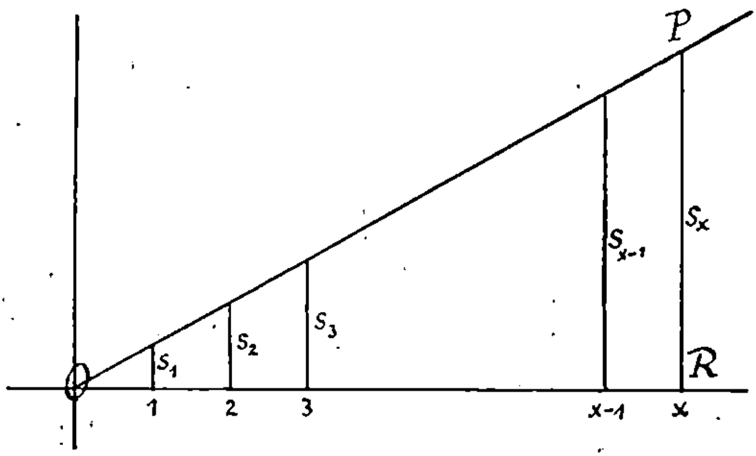
Slijedeća, za jedan momenat mlađa a-skupina imat će prema tome snagu:

$$s_{x-1} = b\,(x-1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Napokon predzadnja i zadnja skupina (najmlađe dvije) imat će samo snagu:

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= 2b \\ s_1 &= b \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Te snage, od zadnje u smjeru prema prvoj, rastu dakle također linearno (vidi priloženu sliku). Ako spomenute intervale



vremena (momente) zamislimo tako kratkima, da se ordinate s_1, s_2, ... na slici upravo dodiruju međusobno i počinju baš od $x=o$, onda bi ukupna snaga svih štetnika, koji se u $x\frac{tom}{}$ momentu nalaze na biljci, t. j. suma

$$S_2 = s_1 + s_2 + \ldots + s_{x-1} + s_x \ldots \quad (13)$$

bila predstavljena površinom trokuta OPR. Ona bi dakle iznosila:

$$S_2 = \frac{b}{2} x^2 = k_2 x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Neka sada broj štetnih sila i njihova pojedinačna snaga raste u smislu eksponencijalne funkcije

$$s_x = c . e^{nx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

gdje je $e=2{\cdot}718\ldots\ldots$ baza naravnih logaritama, a c i n izvjesni pozitivni parametri ($n<1$). Ova funkcija predstavlja, kao što znamo, krivulju, koja se na desno sve više savija prema gore, koja je dakle konveksna prema apscisnoj osi. Prema toj funkciji suma u smislu jednadžbi (13) i (14), t. j. ukupna snaga svih nepogodnih sila izlazi u formi određenog integrala

$$S_2 = c \int_0^x e^{nx} . dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

iz kojega se dobiva:

$$S_2 = \frac{c}{n} \cdot e^{nx} = k_2 \, e^{nx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Time bismo dakle u jednadžbama (14) i (17) imali oba ekstremna zakona, po kojima bi na osnovi prvih dviju gornjih pretpostavaka imala s vremenom da raste ukupna snaga (S_2) nepogodnih sila. Formulu (14) mogao sam bio da izvedem i uz pretpostavku, da broj nepogodnih sila kao i njihova pojedinačna snaga raste po zakonu aritmetičke progresije, a formulu (17) uz pretpostavku, da i jedno i drugo raste po zakonu geometrijske progresije. Odabrao sam ipak gornji put kao kraći.

Po formuli (14) rasla bi, kao što vidimo, ukupna snaga nepogodnih sila proporcionalno kvadratu vremena. Po formuli (17) naprotiv rasla bi ona proporcionalno $x\frac{toj}{}$ potenciji konstantnog izraza e^n. Rastenje snage S_2 bilo bi dakle u drugom slučaju, naročito pri većim x-iznosima, kud i kamo brže nego u prvom slučaju. Neki srednji put između ova dva ekstrema bio bi daden potencijalnom jednadžbom:

$$S_1 = k_2 \, x^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

gdje bi n imalo da bude veće od 2.

V. Ako sada formule (9) i (17) uvrstimo u formulu (2), pa ako ujedno ujednostavnjenja radi stavimo:

$$k \, . \, \frac{k_1}{k_2} = p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

dobit ćemo s obzirom na izraz (1) diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{y^m}{e^{nx}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

iz koje jednostavnom transformacijom izlaze neodređeni integrali:

$$\int y^{-m} \, . \, dy = p \int e^{-nx} \, . \, dx \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

dotično:

$$\frac{y^{1-m}}{1-m} = -\frac{p}{n} \, e^{-nx} + r \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

gdje je r integraciona konstanta. Stavimo li dalje

$$\frac{p}{n} = r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

onda iz jednadžbe (22) nakon par jednostavnih transformacija izlazi:

$$y = \Big(r\,(1-m) \Big)^{\frac{1}{1-m}} \, . \, \Big(1-e^{-nx} \Big)^{\frac{1}{1-m}} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Stavimo li napokon koje ujednostavnjenja koje naravnijeg slijeda radi:

$$\left.\begin{aligned} \left(r\,(1-m)\right)^{\frac{1}{1-m}} &= a \\ n &= b \\ \frac{1}{1-m} &= c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

onda iz izraza (24) izlazi konačno izraz:

$$y = a\left(1-e^{-bx}\right)^{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

t. j. MITSCHERLICHOVA funkcija rastenja. MITSCHERLICH je ovu funkciju 1919. god. izveo na način, koji — kako izgleda — nije naišao na odobrenje u stručnim krugovima. Vidi o tome spomenutu PESCHELOVU radnju, u kojoj PESCHEL opširno govori o toj funkciji, a i izvodi je na isti način kao i MITSCHERLICH.

Uvrstimo li sada u formulu (2) pored spomenutog već izraza za brojnik [t. j. pored izraza (9)] potencijalni izraz (18), dobit ćemo s obzirom na ujednostavnjenje pod (19) diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = p.\frac{y^{m}}{x^{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

iz koje gotovo neposredno izlazi:

$$\int y^{-m}.\,dy = p\int x^{-n}.\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

dotično

$$\frac{y^{-(m-1)}}{-(m-1)} = p.\frac{x^{-(n-1)}}{-(n-1)} + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

gdje je C integraciona konstanta. Stavimo li

$$C = -r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

onda nakon par jednostavnih transformacija dobivamo izraz

$$y = \left(\frac{\frac{1}{r(m-1)}}{1+\frac{p}{r(n-1)}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

koji uz ujednostavnjenja:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{r\,(m-1)}\right)^{\frac{1}{m-1}} &= a \\ \frac{p}{r\,(n-1)} &= b \\ n-1 &= d \\ \frac{1}{m-1} &= c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

prelazi u mnogo jednostavniji izraz:

$$y = \frac{a}{\left(1 + \frac{b}{x^d}\right)^c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Ovaj izraz, koji se dade napisati i u formi:

$$y = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33a)$$

predstavlja poznatu već moju funkciju rastenja, iz koje uz poznate uslove ujednostavnjenja izlaze ostale moje funkcije. Napose uz uslov:

$$n = 2 \text{ dotično } d = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

[vidi predzadnju jednadžbu pod (32)] izlazi iz nje poznata moja funkcija:

$$y = a\left(\frac{x}{b + x}\right)^c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

koja s obzirom na taj uslov [sravni formulu (18) sa formulom (14)] odgovara prvom dot. nižem ekstremu u pogledu rastenja snage S_2 iz formule (2), koja dakle iz ove formule izlazi uz pretpostavku, da rastenje ukupnog broja nepogodnih sila kao i njihovih pojedinačnih snaga biva po aritmetičkoj progresiji.

S obzirom na ovu indirektnu i kratku dedukciju funkcije (35) iz funkcije (2), t. j. putem općenitije funkcije (33), otpada naravski potreba direktnog njezinog izvođenja iz funkcije (2), t. j. putem integriranja diferencijalne jednadžbe analogne onima pod (20) i (27).

Kao što dakle vidimo, funkcija (33) sa svoja 4 parametra izlazi u neku ruku kao srednji put između oba ekstrema, što ih — sa po 3 parametra — predstavljaju funkcije (26) i (35). Po njoj prirast nakon kulminacije mora da pada nešto brže nego po funkciji (35), a nešto polaganije nego po funkciji (26).

Inače je iz cijelog toka radnje vidljivo, da se sve ove tri funkcije rastenja, koje PESCHEL označuje teoretski dobrim funkcijama, osnivaju zapravo na formuli (2) t. j. na omjeru sila pogodnih i nepogodnih — i jednih i drugih uzetih samo u pozitivnom smislu. Samo na toj bazi mislim da se jedino i mogu izvesti dobre funkcije rastenja, a nikako ne na bazi dosad već u više navrata (pa najzad i od PESCHEL-a) primjenjivane superpozicije sila t. j. zbrajanja sila pogodnih i nepogodnih, prvih uzetih u pozitivnom, a drugih u negativnom smislu.

LITERATURA

1. Levaković A.: Analitički oblik zakona rastenja (Analytische Form des Wachstumsgesetzes), »Glasnik za šumske pokuse« knj. 4 (Annales pro experimentis foresticis, Bd 4), Zagreb 1935, S. 189 ff.
2. Peschel W.: Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstumsgesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung, Thar. forstl. Jahrb. 1938, S. 169 ff.
3. Strassburger - Jost - Schenck - Karsten: Lehrbuch der Botanik für Hochschulen, Jena 1911.
4. Miller E.: Plant Physiology, New-York and London 1931.
5. Mitscherlich E. A.: Das Gesetz des Pflanzenwachstums, Landwirtsch. Jahrbücher, Bd 53 (1919), S. 167 ff.

ZUSAMMENFASSUNG

In meiner oben unter Punkt 1 angeführten Schrift leitete ich einige Zuwachs- und Wachstumsfunktionen lediglich auf analytischer Grundlage her und liess dabei jedwede Rücksicht auf die während des Wachstums und parallel mit diesem sich abspielenden physiologisch-dynamischen Vorgänge vollkommen bei Seite. Nunmehr aber, durch einige auf die Adresse der erwähnten Funktionen durchaus nicht in böswilliger Absicht gerichteten Bemerkungen W. PESCHEL's [2] angeregt, will ich die Hauptform der gesagten Wachstumsfunktionen auf dieser anderen, »energetischen« Grundlage herleiten.

Das Pflanzenwachstum (welches ich hier nur insoweit berücksichtigen will, als es die Bäume und ihre Volumina betrifft)

kann bekanntlich auch als eine Art von Bewegung aufgefasst werden und es fragt sich dann, wie gross denn in einem beliebigen Zeitpunkte die durch Formel (1) ausgedrückte Geschwindigkeit dieser Bewegung ist. Diese letztere wird nun bekanntlich durch zwei Gruppen von Kräften beeinflusst: die sog. treibenden Kräfte einerseits und die sog. hemmenden Kräfte anderseits.

Offensichtlich ist die Wuchsgeschwindigkeit gerade proportional zur ersten und verkehrt proportional zur zweiten Kräftegruppe. Formel (2) bringt diese Proportionalität zum Ausdruck. S_1 bedeutet hier den gesamten Kraftbetrag der ersten, S_2 den gesamten Kraftbetrag der zweiten Gruppe.

Zu den treibenden Kräften gehören bekanntlich in erster Linie (falls nicht in zu grossem Maasse vorhanden) die Wärme, das Licht und das Bodenwasser nebst den in diesem gelösten Mineralstoffen. Die Mineralien subsumiere ich im folgenden der Kürze wegen einfach unter dem blossen Worte »Wasser«. Auch soll im folgenden eine dauernde Anwesenheit eines genügenden Quantums von Wärme, Licht und Wasser vorausgesetzt werden, uzw. eines Quantums, durch welches die periodischen Mängel und Überflüsse an diesen Wachstumsfaktoren eben ausgeglichen werden.

Die erwähnten drei Wuchskräfte würden jedoch wirkungslos bleiben auf das Wachstum, wenn der Baum keinen Wurzelkörper hätte sowie ebenfalls kein Blattvermögen und keine meristematischen Zellen in seinem Inneren. Dies sind näml. eben so notwendige Vorbedingungen für das Wachstum, wie die genügenden Mengen von Wärme, Licht und Wasser. Der gesamte Kraftbetrag S_1 wird also umso grösser sein, je aktiver sich stellen sowohl die Wurzeln als auch die Blätter und ebenso die meristematischen Zellen des Kambiums. Die Aktivität dieser drei Organismen bezw. Gewebeformationen wird sich jedoch (bei sonst gleichen Umständen) umso höher stellen, je grösser das Volumen derselben ist, also sowohl das Volumen der Wurzeln (v_1) als auch dasjenige der Blätter (v_2) und zuletzt auch dasjenige des Kambiums (v_3).

Jetzt fragt es sich nun, in welcher Form sollen denn diese drei Proportionalitäten ausgedrückt werden. Aus der Tatsache, dass das Wachstum nicht möglich wäre, wenn auch nur einer der gesagten Organismen (Formationen) verschwinden würde, ergibt sich von selbst, dass zwischen dem gesamten Kraftbetrage S_1 und den gesagten Organismen die Relation (3) bestehen muss (wo unter q_1, q_2 und q_3 die sogen. Proportionalitätskonstanten verstanden werden).

Es ist leicht einzusehen, dass sowohl v_1 als auch v_2 und v_3 in Teilen der gesamten oberirdischen Baummasse (y) ausgedrückt werden kann. Doch muss dabei berücksichtigt werden, dass es sich hier (also unter der Bezeichnung v_1) nicht eigentlich um das Volumen des ganzen Wurzelkörpers handelt, sondern lediglich um das Volumen der sogenannten Wurzelhaare, die ja bekanntlich (mit ihrem Gesamtvolumen) einzig und allein massgebend sind für den gesamten Kraftbetrag S_1. Das Verhältnis zwischen dem Gesamtvolumen dieser Wurzelhaare und dem Volumen des Baumes kann nun ausgedrückt werden durch Formel (4), wo m_1 jedenfalls kleiner sein muss als 1, ja sogar auch kleiner als ½.

Ganz ähnlich steht die Sache auch mit dem Volumen der gesamten Blattmenge im Verhältnis zur oberirdischen Holzmasse [Formel (5)], wo also ebenfalls der Exponent unbedingt kleiner sein muss als 1, ja sogar als ½. Auch das Volumen der Kambialschichte (des Kambiummantels) hat einen ähnlichen Ausdruck [Formel (6)] und dazu mit einem ähnlichen, von 1 jedenfalls kleineren Exponenten. Die Formeln (4) bis (6) in Formel (3) eingesetzt ergeben Formel (7) oder, vermittelst der Ausdrücke unter (8), die vereinfachte Formel (9), wo m variieren kann zwischen 1 und 2, ohne jedoch diese Grenzen erreichen zu können.

Zur Gruppe der hemmenden Kräfte gehören bekanntlich in der Hauptsache allerhand schädliche Einflüsse des anorganischen und organischen Charakters. Das Anwachsen dieser Kräfte steht offensichtlich in keinem direkten Verhältnisse zum Volumen selbst, sondern zur Zeit. Wie im vorigen Falle, so werde ich natürlich auch hier kontinuierliches Geschehen voraussetzen und namentlich:

1.) Sowohl die Gesamtzahl der hemmenden Einflüsse als auch deren Einzelkraft wächst im Sinne einer Linearfunktion.

2.) Beides wächst im Sinne einer Exponentialfunktion.

3.) Beides nimmt nach einem dritten Gesetze zu, welches eine Art von Übergangsstufe zwischen den ersten zwei Gesetzen darstellt.

Im ersten Falle (Linearfunktion) wird vorausgesetzt, dass das junge Baumindividuum in jedem nach seinem Austreiben (Aufkeimen) erfolgten Zeitmomente von einer gleichen Anzahl (a) schädlicher Einflüsse heimgesucht wird. Im x^{ten} Momente wird nun also deren ax an dem Baume beteiligt sein. Die erste (älteste) a-Gruppe hat dabei eine Kraft s_x im Sinne der Gleichung (10), die nächst jüngere eine solche im Sinne der

Gleichung (11), ... und endlich die vorletzte und letzte eine solche im Sinne der Formeln (12). In der Richtung von der letzten bis zur ersten nehmen also auch die gesagten Kräfte linear zu (vergl. die Abbildg). Wenn die erwähnten Zeitmomente noch kürzer gedacht wären, bis eben alle Ordinaten (s_1, s_2, ... mit Einschluss der allerkleinsten) einfach zusammenfliessen, so wäre die gesamte, im Sinne der Gleichung (13) gedachte Kraft S_2 gegeben einfach durch die Fläche des Dreieckes *OPR*. Ihr Betrag wäre somit gegeben durch Formel (14).

Wird jetzt die Anzahl schädlicher Einflüsse sowie auch der betreffenden Kraftbeträge als im Sinne einer Exponentialfunktion zunehmend gedacht [Gleichung (15) mit $n<1$], so ergibt sich vermittelst der Formel (16) die Gesamtkraft S_2 ebenfalls in Form einer Exponentialfunktion [Formel (17)]. Was nun die Geschwindigkeit der Kraftzunahme nach dieser Formel anbelangt, so wäre dieselbe weit grösser als diejenige, die sich aus Formel (14) ergeben würde. Nicht so gross wie im Falle der Formel (17), grösser jedoch als im Falle der Formel (14) wäre die gesagte Geschwindigkeit, wenn man sich die Gesamtkraft S_2 als im Sinne einer Potenzfunktion zunehmend denkt, also im Sinne der Gleichung (18) mit $n>2$. Dies wäre also die oben (Punkt 3) erwähnte Übergangsform zwischen den beiden erwähnten Extremformen.

Werden jetzt die Formeln (9) und (17) in Formel (2) eingesetzt, so ergibt sich mit Hilfe des vereinfachenden Ausdruckes (19) die Gleichung (20). Deren Integration ergibt unmittelbar den Ausdruck (22) mit r als Integrationskonstante. Mit Hilfe der Gleichung (23) ergibt sich hieraus der Ausdruck (24) und nach Gleichstellungen unter (25) endlich der Ausdruck (26), d. h. die bekannte MITSCHERLICH'sche Wachstumsfunktion. MITSCHERLICH hat sie 1919 hergeleitet auf eine, scheint mir, in den Fachkreisen nicht eben gebilligte Weise. Eine ausführliche Besprechung derselben, nebst auch der MITSCHERLICH'schen Methodik in bezug auf deren Herleitung, befindet sich in der erwähnten PESCHEL'schen Schrift.

Setzt man in (2) die Ausdrücke (9) und (18) ein, so ergeben sich die Differential-bezw. Integralgleichungen (27) und (28) sowie das unmittelbare Integrationsresultat (29) mit C als Integrationskonstante. Mit Hilfe der Identität (30) ergibt sich hieraus der Ausdruck (31) und hieraus zuletzt mit Hilfe der vereinfachenden Ausdrücke (32) der Ausdruck (33), d. h. meine allgemeinere Form der Wachstumsfunktion sowie auch ihre Nebenform (33 a).

Unter der Bedingung $d=1$ vereinfacht sich diese in meine ebenfalls bereits bekannte einfachere Funktionsform (35). Mit

Rücksicht auf den, aus der vorletzten in (32) befindlichen Gleichung sich ergebenden Wert $n=2$ ist nun diese letzte Funktion identisch mit derjenigen, die sich aus Formel (2) ergeben würde nach Einsetzen der Formeln (9) und (14). Um sich davon zu überzeigen, braucht man nur die Exponenten in (18) und (14) mit dem eben angeführten n-Betrage zu vergleichen. Daher ist eine besondere Herleitung der Funktion (35) in der oben befolgten Weise nicht erforderlich.

Wie also ersichtlich, die Funktion (33) mit ihren 4 Parametern erweist sich so ziemlich als ein Mittelweg zwischen den beiden sie umgebenden dreiparametrigen Funktionen (26) und (35). Sonst ist aus dem ganzen obigen Gedankengange zu ersehen, dass alle diese drei Funktionen, die von PESCHEL als theoretisch gute Wachstumsfunktionen bezeichnet werden, sich eigentlich auf einem Verhältnisse der beiden konträren Kräftegruppen gründen, und nicht auf deren Überlagerung (Superposition). Überhaupt glaube ich sagen zu dürfen, dass das Prinzip der Überlagerung positiv und negativ hingenommener Kräfte nicht hier zu günstigen Resultaten führen kann.