Prilog poznavanju točnosti nitnog planimetra

Tomašegović, Zdenko

Ing. Zdenko Tomašegović:

Prilog poznavanju točnosti nitnog planimetra

(Contribution à la connaissance d'exactitude du harpe-planimètre)

UVOD

Za određivanje površina na planu najviše se upotrebljuju: polarni planimetar, nitni planimetar, Majzakovi trokuti i mreža kvadrata. Svaka od tih metoda ima prednosti i slabe strane, te očito svaka svoje optimalno područje, u kojem je njena primjena racionalna. Potrebno bi bilo istražiti čitav kompleks pitanja u vezi s time. Racionalnost ovisi o odnosu točnosti prema svrsi rada, o utrošku vremena, instrumenata itd.

Iz čitavog tog kompleksa pokušat ću ovdje iznijeti samo mali prilog pitanju točnosti nitnog planimetra.

Određivanje površina pomoću nitnog planimetra (harfe) u stvari je grafičko-mehanički način integracije u pravokutnim koordinatama. Bitno je kod toga, da je broj diobenih intervala konačan.

Osim na planu može se princip nitnog planimetra primijeniti i na terenu. A. I. Taraškević u djelu: »Tehnika lesoustroiteljnih rabot«, svezak prvi (Moskva 1927.) prikazuje načine izlučivanja sastojina u SSSR metodom paralelnih vizira, što u stvari pretstavlja primjenu gore spomenutog principa.

Procjena šumskog bogatstva čitavih zemalja paralelnim linijama također je zapravo primjena principa nitnog planimetra.

Komparacija sa dozvoljenim otstupanjima

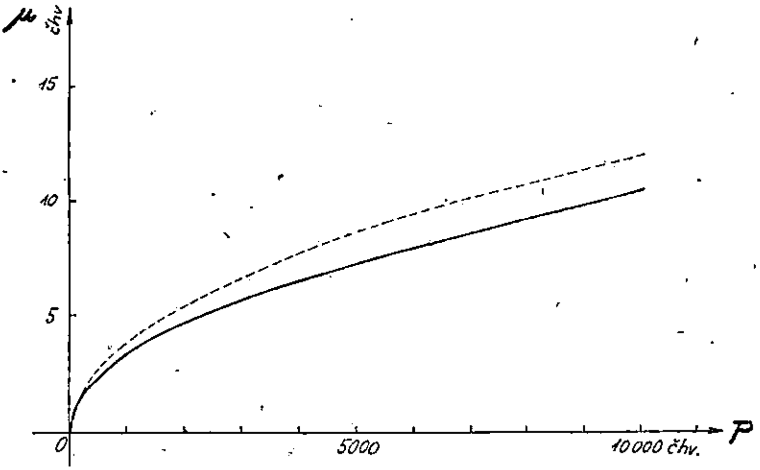
Da bih dobio neku općenitu predodžbu o točnosti planimetriranja nitnim planimetrom, razmotrio sam određivanje površina komasacije k. o. Drenovci. Za ispitivanje srednje pogreške poslužio sam se sa 633 dvostruka opažanja. Površine su bile po veličini između 0 i 10000 čhv. Od ovih 633 opažanja bilo je 210 sa površinom od 0 do 1000 čhv, 123 sa površinom od 1000 do 2000, 160 od 2000 do 5000 čhv, a 140 od 5000 do 10000 čhv. (Mjerilo planova 1" : 40°). Razlike ΔP između prvog i drugog određivanja iste površine bile su za gotovo sve površine unutar dozvoljenih granica t. j. manje od

$$\Delta P_{max} = 0{,}5\sqrt{P} \qquad (P \text{ u čhv}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ovaj iznos bio je prekoračen samo za 11 od gornjih 633 opažanja. Iz pojedinih razlika ΔP izračunao sam srednje pogreške pojedinih opažanja

$$\mu_1 = \frac{\Delta P_1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 = \frac{\Delta P_2}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_n = \frac{\Delta P_n}{\sqrt{2}}$$

Ovako dobivene vrijednosti unio sam u koordinatni sistem tako, da sam na os apscisa nanio redom veličine površina, a na os ordinata pogreške μ za pojedine površine. Kroz područje dobivenih točaka izračunao sam onu krivulju oblika $\tau\sqrt{P}$, koja se najbolje prilagođuje tim točkama, jer se obično uzima, da



Sl. 1.

pogreške kod mjerenja površina rastu proporcionalno s drugim korjenom iz površine. Potražio sam po principima teorije najmanjih kvadrata parametar τ parabole $\tau\sqrt{P}$. Jednadžbe otstupanja glase:

$$v_1 = \tau\sqrt{P_1} - \mu_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$v_n = \tau\sqrt{P_n} - \mu_n$$

Suma kvadrata $[vv]$ treba dati minimum

$$[vv] = \tau^2\,[P] - 2\tau[\mu\sqrt{P}] + [\mu\mu] = minimum.$$

t. j. prva derivacija $[\nu\nu]$ po nepoznanici τ mora biti jednaka nuli.

$$\frac{d\,[\nu\nu]}{d\tau} = 2\tau\,[P] - 2\,[\mu\sqrt{P}] = 0$$

$$\tau = \frac{[\mu\sqrt{P}]}{[P]}$$

Računanjem sam za τ dobio vrijednost 0,103. U sl. 1 povučena je parabola $\mu = 0{,}103\sqrt{P}$ punom crtom. Maksimalno dozvoljena otstupanja su obično trostruka srednja. Ako pak želimo iz maksimalno dozvoljenog otstupanja ΔP_{max} izračunati srednje pogreške pojedinih opažanja, onda moramo ΔP_{max} podijeliti sa $3\sqrt{2}$. Krivulja

$$\frac{\Delta P_{max}}{3\sqrt{2}}$$

prikazana je u sl. 1 crtkano.

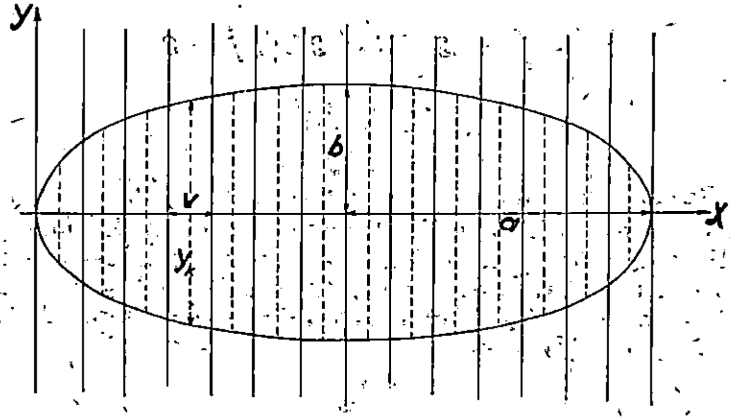
Iz upoređenja krivulja u sl. 1 može se zaključiti, da je spomenutih 633 dvostrukih opažanja dalo rezultate, koji zadovoljavaju formulu (1). Dakle granice pogrešaka kod računanja površina vode računa i o nitnom planimetru t. j. nisu ni prestroge ni preblage za praktičan rad sa nitnim planimetrom. Ali te granice, velikim dijelom, ne vode brigu o sistematskim pogreškama, koje se mogu pojaviti rádi oblika samih parcela. Ako na pr. neku eliptičnu površinu planimetriramo dva puta, otstupanje između oba mjerenja ne će nam pokazati sistematsku pogrešku uslijed eliptičnog oblika.

Upliv oblika na točnost

Na točnost određivanja površina po principu nitnog planimetra od bitnog je utjecaja **oblik površine** kao i točnost **mehaničke integracije**. Razmotrimo najprije utjecaj oblika i razdijelimo likove na konveksne (granične linije is-

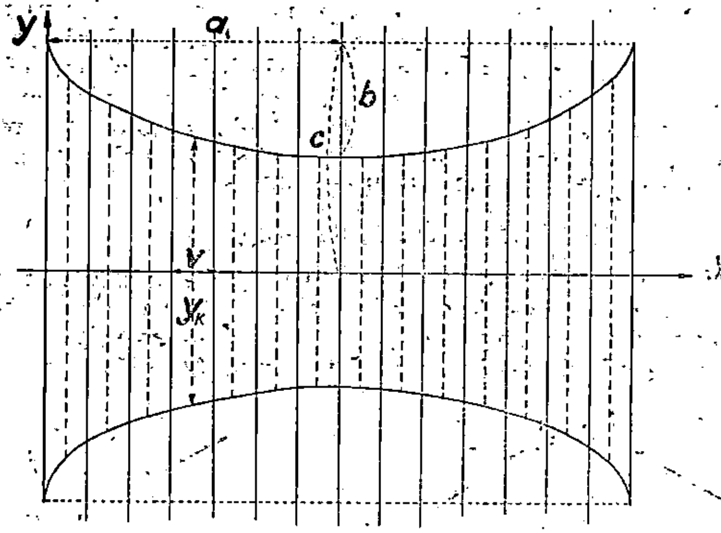
Sl. 2.

pupčene) i konkavne (granice upupčene). Konveksni dijelovi površine daju previsoke, a konkavni preniske rezultate (sl. 2).



Sl. 3.

Da dobijemo neku sliku o utjecaju oblika, uzmimo u razmatranje kao reprezentanta konveksnosti elipsu (sl. 3), a kao pretstavnika konkavnosti površinu omeđenu sa dviju strana lukovima elipse (sl. 4). Površine tih likova neka su razdijeljene



Sl. 4.

u n simetričnih intervala. Površina, koja se dobiva nitnim planimetrom, iznosi onda

$$P = \nu \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Prava površina za prvi slučaj iznosi $ab\pi$, a za drugi $4ac - ab\pi$.

Pomoću jednadžbi zadanih elipsa izračunao sam teoretski površinu, koja bi se dobila planimetriranjem. Ona iznosi za prvi slučaj abS_n, a za drugi $4ac - abS_n$, gdje S_n znači veličinu ovisnu samo o broju intervala n. Za S_n dobiven je izraz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{16}{n^4}[4k(1+n-k)-(2\imath+1)]}$$

Prema tome apsolutna pogreška, koja nastaje radi eliptičnog oblika, iznosi u prvom slučaju

$$\Delta_o = ab\,(S_n - \pi) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

a u drugom slučaju

$$\Delta_o = ab\,(\pi - S_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

S_n teži broju π, kad n teži u beskonačnost. Za razne n iznose izračunao sam vrijednosti S_n Te su uvijek bile veće od π, jer konveksne površine (u našem slučaju elipsa) daju sistematski previsoke, a konkavne površine sistematski preniske rezultate.

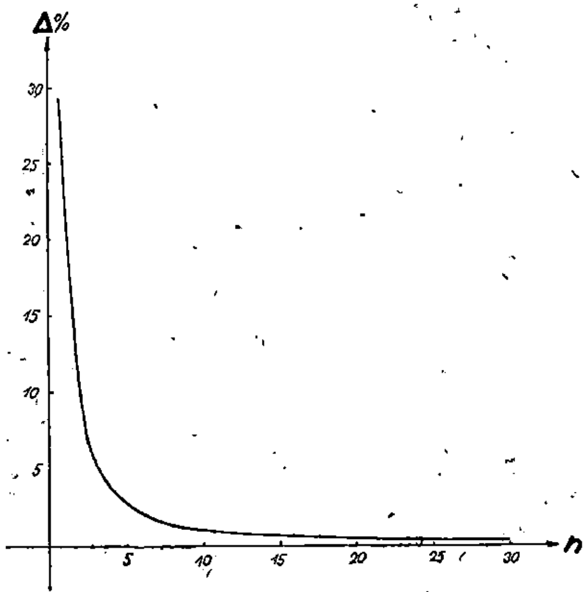
Iz grade formula (2) i (3) možemo zaključiti na još neke činjenice.

Smatramo li ab konstantnim, pogreška Δ_o biti će to manja, što je manji izraz u zagradi, a ovaj se izraz smanjuje, kada n raste. Dakle: što je veći broj intervala n kod planimetriranja, to je manja apsolutna pogreška, koja se javlja radi oblika površine.

Ako je pak izraz u zagradi konstantan (znači konstantan broj intervala n), apsolutna će pogreška biti to manja, što su manji a i b i obratno. Dakle: malene površine daju radi oblika malu, a veće površine veću apsolutnu pogrešku.

Napokon ako smatramo konstantnim izraz u zagradi i veliku poluos a, pogreška će biti to veća, što je veći b i obratno. Naraste li b na iznos a, elipsa prelazi u kružnicu, koja daje razmjerno veću pogrešku. To znači: nitni planimetar je povoljan za uske, duguljaste površine, a nepovoljan za kompaktne oblike (kružnici slične). Ili drugim riječima: točnost je to veća, što je manji stepen konveksnosti dotično konkavnosti.

Poraste li b preko iznosa a, elipsa dolazi u položaj zaokrenut za 90°. Velika os dolazi u smjer osi Y, mala u smjer osi X. Niti neka budu u tom slučaju paralelne sa velikom osi t. j. sa osi Y. Ista točnost radi oblika (formula 2) kao u slučaju kad su niti o k o m i t e na veću dimenziju — dobila bi se samo onda, ako se upotrijebi i s t i b r o j n i t i za oba slučaja (ista vrijednost S_n'). A to znači: trebalo bi u takvom slučaju stegnuti širinu intervala. S druge strane mjerenje srednjica šestarom postaje nesigurnije radi nepovoljnog kuta, pod kojim se sijeku srednjice sa graničnom linijom. Osim toga zbroj srednjica je kudikamo veći u tom slučaju nego kad su niti okomite na veću dimenziju, što ima, kako ćemo kasnije vidjeti, znatnog utjecaja na točnost planimetriranja. Odatle slijedi, da je bolje smjestiti niti tako, da budu okomite na veću dimenziju.



Sl. 5.

Grafikon u sl. 5 prikazuje tok p r o c e n t u a l n e pogreške, koja nastaje radi eliptičnog oblika, kod raznih brojeva intervala n. Procentualna pogreška izračuna se stavljanjem formule (2) i (3) u procentualni odnos sa pravim iznosom eliptične površine ($ab\pi$ i $4\,ac - ab\pi$).

Procentualna pogreška ovisna je uglavnom samo o broju n. Odavle bi se moglo zaključiti, da će se za slične likove, bez obzira na njihovu veličinu, dobiti radi oblika ista procentualna pogreška samo, ako se upotrijebi jednak broj niti.

Upliv slučajnih pogrešaka

Poznato je, da se srednjice dionih trapeza zbrajaju šestarom. Kod tog zbrajanja srednjica dolazi do neizbježivog nagomilavanja slučajnih pogrešaka. Traženu površinu možemo prikazati formulom

$$P = uv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gdje je u zbroj srednjica, a v ekvidistanta. Neka pogreška u zbroju srednjica iznosi $\pm \Delta u$, a pogreška visine trapeza, dotično ekvidistante $\pm \Delta v$, onda će uslijed toga pogreška u površini iznositi uglavnom

$$\pm \Delta P = \pm u \Delta v \pm v \Delta u$$

Smatramo li $\pm \Delta u$ i $\pm \Delta v$ srednjim pogreškama, to će srednja pogreška površine iznositi

$$M_p = \pm \sqrt{(u \Delta v)^2 + (v \Delta u)^2} \quad . \quad . \quad (5)$$

Ako je mjerenje pojedinih srednjica opterećeno srednjom pogreškom $\pm m$, tada će suma od n srednjica biti opterećena pogreškom $\Delta u = \pm m \sqrt{n}$. Pojedina visina dionih trapeza neka je analogno opterećena iznosom $\pm m$. Prosječna visina trapeza određena kao aritmetska sredina iz n visina, dotično kao n-ti dio izmjerene dužine n visina, biti će onda opterećena pogreškom

$$\Delta v = \frac{\pm m}{\sqrt{n}}$$

Tako bi sada formula (5) poprimila oblik

$$M_p = \pm m \sqrt{\frac{u^2}{n} + nv^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Srednja pogreška M_p po ovoj formuli upravno je proporcionalna srednjoj pogreški m mjerenja srednjica pojedinih dionih trapeza (dotično i ustanovljivanja zbroja visina tih trapeza).

Uz pomoć još petorice opažača (slušača šumarstva) ustanovio sam pokusima u pet serija (67 opažanja) srednju pogrešku određivanja dužine šestarom $M = \pm 0{,}074$ mm. Pojedina mjerenja očitavana su na metalnom transverzalnom razmjerniku tako, da dobiveni iznos za M rezultira iz hvatanja odgovarajućih dužina šestarom i čitanja na razmjerniku. Pretpostavi li se jednaka grafička točnost hvatanja šestarom i očitavanja na razmjerniku, to će srednja pogreška samog mjerenja dužine šestarom uglavnom biti

$$m = \frac{\pm M}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}052 \text{ mm}$$

Rezultanta sistematske i slučajnih pogrešaka

Uslijed oblika i netočnosti mehaničke integracije nastaje ukupna pogreška, koja bi bila (na pr. kod eliptičnih površina) rezultanta obiju komponenata po formuli (2) odnosno (3) i po formuli (6) t. j.

$$\Delta P = \pm \sqrt{\Delta_o^2 + M_p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Optimalan broj intervala

Pokušajmo na temelju gornjeg razmatranja odrediti optimalan broj intervala n za neke veličine površina u mjerilu 1 : 2880 (1" : 40⁰).

Provedimo najprije diskusiju za površinu od 0,1 ha. Uzmimo da površina ima razmjerno nepovoljan, konveksan oblik; neka to bude opet elipsa. Odnos poluosi $a : b = 5$. Za taj slučaj iznosi velika poluos elipse $a \doteq 13{,}85$ mm u mjerilu 1 : 2880.

Pokusno računanje po formuli (7) pokazalo je, da bi ukupna procentualna pogreška za $n = 12$ iznosila $\pm$ 1,08%, za $n = 16$ ...... $\pm$ 0,95%, za $n = 20$ ...... $\pm$ 0,93%, za $n = 30$ ...... $\pm$ 1,07%. Iz ovoga se vidi, da po samu točnost nije svejedno, kolik broj intervala pri planimetriranju upotrebljavamo. Vidi se osim toga i to, da postoji neki **optimalni** broj intervala. Sa povećanjem broja niti pada pogreška radi oblika Δ_o, ali raste pogreška M_p samog planimetriranja. Tu dakle te dvije komponente djeluju jedna nasuprot druge. Za površinu od 0,1 ha najbolje bi prema gornjem izvodu odgovarao broj niti $n = 20$. Ako postavimo niti okomito na veliku poluos a, onda bi visina dionih trapeza iznosila

$$v = \frac{2a}{n} = \frac{27{,}70 \text{ mm}}{20} = 1{,}4 \text{ mm}$$

Teoretska srednja pogreška, kako je gore navedeno, iznosila bi za taj slučaj $\pm$ 0,93%. Komponenta oblika (formula 7) sudjeluje u iznosu + 0,34%, a komponenta nastala mehaničkom integracijom sa $\pm$ 0,87% Na ukupnu srednju pogrešku (rezultantu) ima jačeg utjecaja pogreška samog planimetriranja.

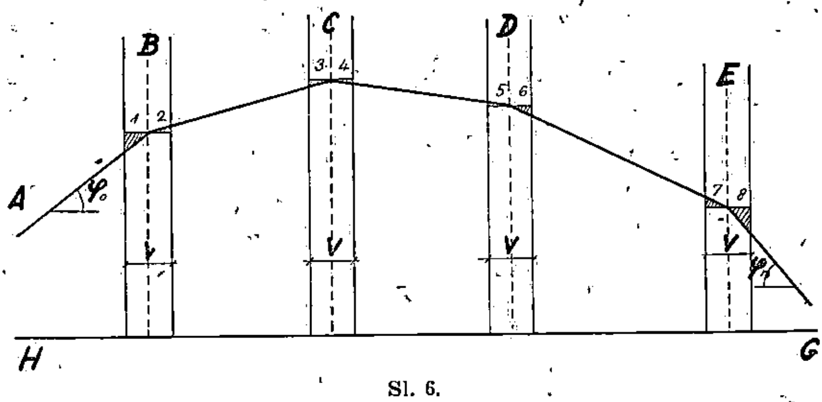
Za površinu od 0,5 ha pod inače jednakim uvjetima kao gore našao sam, da bi najbolje odgovarao $n = 26$, koji bi dao $\Delta P\% = \pm 0{,}49\%$. Za taj je slučaj $v = 2{,}4$ mm.

Kod površine od 1 ha našao sam optimalan broj $n = 30$, $\Delta P\% = \pm 0{,}38\%$. Uz ovaj broj niti, a za površinu od 1 ha iznosila bi visina pojedinih intervala $v = 2{,}9$ mm. Sa povećanjem površina teoretski izračunate srednje pogreške sve jače odmiču od srednjih pogrešaka, koje bi se izračunale iz maksimalno dozvoljenog otstupanja.

Što se tiče rasporeda niti, planimetar (harfa) obično je konstruiran tako, da mu razmaci (ekvidistante) iznose 2,5 mm, 5 mm i 10 mm ili 1,6 mm (2,5 hv u mjerilu 1" : 40⁰), 3,2 mm (5 hv) i 6,4 mm (10 hv). Prema gornjim rezultatima trebalo bi za manje površine upotrijebiti najgušći razmak niti (1,6 mm), a za veće površine (0,5 ha i više) dvostruko veći razmak (3,2 mm). Kad bismo imali nitni planimetar sa razmakom niti 2,5 mm, 5,0 mm i 10 mm, ne bismo mogli potpuno za gornje slučajeve udovoljiti postavljenim zahtjevima.

Utjecaj lomova

Razmotrimo utjecaj oblika i na poligonu $A, B, C, \ldots\ldots$ (sl. 6). Za taj bi se slučaj upliv oblika sasvim eliminirao, kad bi niti planimetra slučajno prolazile upravo lomovima $B, C, \ldots\ldots$ Drugi ekstrem nastaje, kad bi vrhovima prolazile srednjice dionih trapeza. U tom slučaju hvatamo srednjice kod $B, C, \ldots\ldots$ koje će dati previsoke rezultate (ispupčene površine) ili preniske rezultate (upupčene površine). Kod ovog ekstremno nepovoljnog razmještaja niti dobivene pogreške se dje-



Sl. 6.

lomično kompenziraju, radi različitih predznakova (šrafirani trokuti 2 i 3, 4 i 5, itd. su međusobno jednaki). Preostala pogreška radi oblika (trokuti 1 i 8) zavisi od kutova φ_o i φ_n, te od visine intervala v. Pokusna računanja za razne visine intervala (dakle različite n), te za razne φ pokazala su, da se dobivaju iznosi procentualnih pogrešaka, koji nadilaze one za eliptične površine (osim za kuteve φ_o i φ_n, koji su bili manji od 20⁰).

Što se tiče rasporeda niti, rijetko će nastupiti jedan od ekstremnih položaja. Vjerojatniji je neki općeniti položaj, koji će dati pogrešku radi oblika veću od 0, a manju od teoretskih ekstrema. Utjecaj oblika znatno se poništava kod površina sa konkavnim i konveksnim granicama.

Ponajčešći oblik parcela je zapravo s ispupčenim čoškovima (na pr. četverokut i slično), pa je vjerojatno, da nitni planimetar u praksi daje sistematski za nešto previsoke rezultate. Za koliko otprilike, pokušati ću prikazati drugom prilikom poređenjem površina dobivenih nitnim planimetrom sa površinama izračunatim iz koordinata.

RÉSUMÉ

Les résultats des 633 parcelles montrent que la détermination des surfaces avec la harpe satisfait les tolérences prescrites (formule 1). Fig. N° 1 représente la relation entre les discordances moyennes admissibles $\frac{\Delta P_{max}}{3\sqrt{2}}$ et réelles $\frac{\Delta P}{\sqrt{2}}$.
Ensuite sont considerées: l'influence de la forme des parcelles (erreurs systématiques) et l'influence des erreurs de l' addition mécanique avec le compas (erreurs accidentelles). On tient seulement compte des surfaces éliptiques.

Aussi le numéro optimal des intervalles sur la harpe (pour quelques grandeurs des surfaces) est déterminé à l'aide de la résultante (formule 7) de l'erreur systématique (formules 2 et 3) et des erreurs accidentelles (formule 6). L'intégration mécanique fait, sur l'erreur totale, une influence plus grande que la forme des parcelles.