

# Kočna gradijanta šumskih klizina

---

**Flogl, Stanko**

*Source / Izvornik:* **Glasnik za šumske pokuse: Annales pro experimentis foresticis, 1953, 11, 239 - 310**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:108:569180>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-21**



*Repository / Repozitorij:*

[University of Zagreb Faculty of Forestry and Wood Technology](#)



## KOČNA GRADIJANTA ŠUMSKIH KLIZINA (DIE BRESENDE GRADIANTE DER FORSTRIESEN)

### *Sadržaj (Inhalt)*

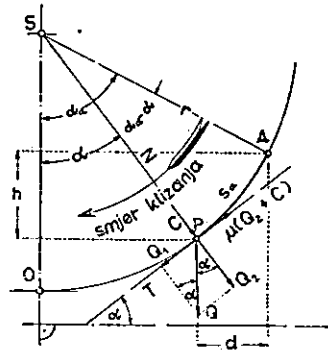
- A) Točniji račun brzine klizanja (Genauere Berechnung der Gleitgeschwindigkeit).
1. Teško tijelo klizi i silazi na udubljenom luku (Ein schwerer Körper gleitet in einer Konkavkreislinie abwärts).
  2. Teško tijelo klizi i uzlazi na udubljenom luku (Ein schwerer Körper gleitet in einer Konkavkreislinie aufwärts).
  3. Teško tijelo klizeći silazi i uzlazi na udubljenom luku (Ein schwerer Körper gleitet in einer Konkavkreislinie ab- und aufwärts).
  4. Teško tijelo klizi i silazi na izbočenom luku (Ein schwerer Körper gleitet auf einer Konvexkreislinie abwärts).
  5. Teško tijelo klizi i uzlazi na izbočenom luku (Ein schwerer Körper gleitet auf einer Konvexkreislinie aufwärts).
  6. Teško tijelo klizeći uzlazi i silazi na izbočenom luku (Ein schwerer Körper gleitet auf einer Konkavkreislinie auf- und abwärts).
- B) Približni račun brzine klizanja (Annähernde Berechnung der Gleitgeschwindigkeit).
1. Uz zanemarenje centrifugalne sile (Unter Ausserachtlassung der Zentrifugalkraft).
  2. Uz zanemarenje težine tijela (Unter Ausserachtlassung des Eigengewichtes).
  3. Uz djelovanje težine tijela i centrifugalne sile (Unter Berücksichtigung des Eigengewichtes und der Zentrifugalkraft).
- C) Polumjer luka na lomu gradijante (Der Bogenhalbmesser am Gefällsbruch).
1. S obzirom na brzinu klizanja (Mit Rücksicht auf die Gleitgeschwindigkeit).
  2. S obzirom na konstrukciju klizine (Mit Rücksicht auf die Konstruktion der Riese).
- D) Nacr (uzdužni profil) kočne gradijante [Der Aufriss (das Längeprofil) der bremsenden Gradiante].
1. Geometrijski elementi gradijante (Geometrische Elemente der Gradiante).
  2. Poligon gradijante (Polygon der Gradiante).
  3. Tetivni poligon gradijante (Sehnenpolygon der Gradiante).
- E) Dijagram brzine klizanja i ispitivanje radne sposobnosti klizine (Gleitgeschwindigkeitsdiagramm und Arbeitsfähigkeitsuntersuchung der Riese).
- F) Određivanje i iskolčivanje kočne gradijante (Bogenanordnung und Absteckung der bremsenden Gradiante).
1. Određivanje glavnih točaka gradijante (Bestimmung der Hauptbogenpunkte).
  2. Određivanje ostalih točaka luka (Bestimmung der übrigen Bogenpunkte).
  3. Prelazna krivulja (Übergangsbogen).

## UVOD

Gradijanta svake klizine obično se sastoji iz dužih pravaca, koji uglavnom padaju u smjeru klizanja s malim razlikama u nagibima. Na kraju pak klizine gradijanta ili slabo pada ili leži u horizontali ili se dapače uspinje u suprotnom smjeru, jer treba da koči i poništi brzinu klizanja. Tu se gradijanta obično sastoji od kraćih pravaca, koji se lome, jer su različito, dapače i suprotno nagnuti. Na svakom takvu lomu treba umetnuti luk, obično kružnice, koji omogućuje klizanje na prijelazu iz pravca jednog nagiba u pravac drugog nagiba. Dinamika klizanja na takvu valovitom dijelu gradijante nije jednostavna, nasuprot stavlja neke teškoće u osnivanju, trasiranju i konstruiranju bilo koje klizine. Svrha je ove radnje popuniti već dosad objelodanjeno o tome te olakšati taj posao.

Na lomovima gradijante razlikujemo *udubljene lukove* (konkavne prema gore) od *izbočenih lukova* (konveksnih prema gore). Jedni i drugi ili padaju ili se uspinju u smjeru klizanja, a i prelaze u pravac ili luk suprotnog nagiba. U svakom takvu dijelu klizanje se odvija po zasebnom zakonu, već prema tome, radi li se o udubljenom ili izbočenom luku, o luku, niz koji klizeći silazi teško tijelo ili se uspinje na nj. Poradi toga prije iskorišćivanja potrebno je da najprije iznesemo te zakone.

### A) TOČNIJI RAČUN BRZINE KLIZANJA



Slika 1

1. Teško tijelo klizi i silazi na udubljenom luku (sl. 1). Na takvo tijelo mase  $m$  i težine  $Q = mg$ , dok klizi djeluje komponenta vlastite težine  $Q \sin \alpha$  i trenje  $\mu N$  u tangenti, zatim rezultanta komponente vlastite težine i centrifugalne sile  $N = Q \cos \alpha + \frac{mv^2}{r}$ , pa

još i reakcija podloge u normali gradijante. Sile u normali nalaze se u stanju ravnoteže i ne utječu na gibanje tijela. Sile u tangenti rezultiraju silu:

$$T = Q \cdot \sin \alpha - \mu N = Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu \frac{mv^2}{r}, \quad (1)$$

zbog koje teško tijelo klizi nizbrdo na udubljenom luku dovoljnog nagiba  $\alpha$  prema horizontali. Kako između koeficijenta ( $\mu$ ) i kuta trenja ( $\tau$ ) postoji poznati snošaj:

$$\mu = \operatorname{tg} \tau \quad (2)$$

to se (1) kraće može napisati i ovako:

$$T = mg \frac{\sin (\alpha - \tau)}{\cos \tau} - \mu \frac{mv^2}{r}.$$

Ubrzanje ove sile:

$$a_t = T : m = g \frac{\sin (\alpha - \tau)}{\cos \tau} - \frac{\mu v^2}{r} \quad (3)$$

može biti veće ili manje od ničice, a i jednako ničici, već prema iznosima kutova  $\alpha$  i  $\tau$ , te prema polumjeru udubljenog luka kružnice  $r$ .

Između ubrzanja ( $a_t$ ), brzine ( $v$ ) i puta ( $s$ ) postoji poznati snošaj:

$$v dv = a_t \cdot ds, \quad (4)$$

koji ćemo upotrebiti u svrhu određenja brzine klizanja. Ako je tijelo počelo kliziti u točki  $A$ , na nagibu luka  $\alpha_a$ , s nekom brzinom  $v_a$ , u času kad je stiglo u točku  $P$ , na nagib  $\alpha$ , s nekom brzinom  $v$ , prevaljeni put (luk) iznosio je  $s = r (\alpha_a - \alpha)$ . Kako se pak  $s$  napredovanjem tijela nagib  $\alpha$  mijenja, to promjena dužine puta iznosi:

$$ds = -r d\alpha. \quad (5)$$

Jednadžbe (3), (4) i (5) daju onda diferencijalnu jednadžbu

$$v dv = -rg \frac{\sin (\alpha - \tau)}{\cos \tau} d\alpha + \mu v^2 d\alpha,$$

koja se može napisati i ovako (ako se podijeli sa  $v d\alpha$ ):

$$\frac{dv}{d\alpha} - \mu v = -\frac{rg}{\cos \tau} \cdot \frac{\sin (\alpha - \tau)}{v}. \quad (6)$$

Rješavamo tu jednadžbu pomoću supstitucije:

$$v = z e^{\mu \alpha}; \quad \frac{dv}{d\alpha} = \frac{dz}{d\alpha} \cdot e^{\mu \alpha} + \mu z e^{\mu \alpha}. \quad (7)$$

(6) prelazi onda u:

$$\frac{dz}{da} e^{\mu a} = - \frac{rg}{\cos \tau} \cdot \frac{\sin(a - \tau)}{z \cdot e^{\mu a}},$$

odnosno u:

$$z dz = - \frac{rg}{\cos \tau} e^{-2\mu a} \cdot \sin(a - \tau) da.$$

Obostranim integriranjem dobivamo:

$$\frac{z^2}{2} = - \frac{rg}{\cos \tau} \int e^{-2\mu a} \cdot \sin(a - \tau) da. \quad (8)$$

Rješenje integrala s desne strane glasi:

$$\int e^{-2\mu a} \sin(a - \tau) da = e^{-2\mu a} \frac{-2\mu \sin(a - \tau) - \cos(a - \tau)}{4\mu^2 + 1} + C$$

a uz supstituciju

$$2\mu = \operatorname{tg} \varepsilon \quad (9)$$

$$\int e^{-2\mu a} \cdot \sin(a - \tau) da = - e^{-2\mu a} \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) + C. \quad (10)$$

Kako je (iz 7):  $z = v \cdot e^{-\mu a}$ , to (8) konačno prelazi u:

$$v^2 \cdot e^{-2\mu a} = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{-2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) + C.$$

Ova jednadžba mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $a_a$  istog udubljenog luka:

$$v_a^2 \cdot e^{-2\mu a_a} = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{-2\mu a_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a_a) + C.$$

Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi onda:

$$\left. \begin{aligned} & v^2 e^{-2\mu a} - v_a^2 e^{-2\mu a_a} = \\ & = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) - e^{-2\mu a_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a_a)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 2\mu = 2 \operatorname{tg} \tau.$$

Ova jednadžba određuje snošaj među brzinom  $v_a$  na nagibu  $a_a$  i brzinom  $v$  na nagibu  $a$  teškog tijela, koje je klizeći silazilo među tim nagibima na udubljenom luku polumjera  $r$ .

Značenje pojedinih oznaka objasnili smo već prije, a ovdje još dodajemo da  $g$  označuje ubrzanje pri prostom padu, a  $e$  bazu naravnih logaritama. U naše svrhe dolazi u obzir ova formula samo za određivanje brzine klizanja nizbrdo udubljenog luka na nagibima, koji se kreću u intervalu  $0^\circ \leq a \leq 90^\circ$ .

Specijalno navodimo ove slučajeve:

Neka je  $v_a$  brzina na nagibu  $\alpha_a$  na početku, a  $v_0$  brzina na nagibu  $\alpha = 0$  na kraju udubljenog luka. Onda iz (11) izlazi:

$$v_0^2 = v_a^2 e^{-2\mu\alpha_a} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau) - e^{-2\mu\alpha_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - \alpha_a)]. \quad (12)$$

T. j.  $v_0$  je brzina, koju još ima teško tijelo na nagibu  $\alpha = 0$  (u točki 0, sl. 1), ako je počelo silaziti na nagibu  $\alpha_a \neq 0$  s brzinom  $v_a > 0$ . Obrnuto jednadžba:

$$v_a^2 = v_0^2 e^{2\mu\alpha_a} - 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{2\mu\alpha_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau) - \cos(\varepsilon + \tau - \alpha_a)] \quad (13)$$

određuje brzinu  $v_a$ , koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\alpha_a > 0$ , da silazeći na udubljenom luku stigne na nagib  $\alpha = 0$  s brzinom  $v_0 > 0$ .

Želimo li pak, da teško tijelo stigne na nagib  $\alpha = 0$  (u točku 0) s brzinom  $v_0 = 0$ , na početku udubljenog luka na nagibu  $\alpha_a > 0$ , mora imati brzinu (slijedi iz 13):

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau - \alpha_a) - e^{2\mu\alpha_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau)]. \quad (13a)$$

U dijelu udubljenog luka, nagiba  $0 < \alpha < \tau$ , teško tijelo ne može kliziti samo zbog djelovanja vlastite težine, jer je nagib u tom dijelu na svakom mjestu manji od kuta trenja. Ipak može teško tijelo kliziti i tim dijelom udubljenog luka i dokliziti do nagiba  $\alpha = 0$  (do točke 0) s brzinom  $v = 0$ , ako je na početku tog poteza, na nagibu  $\alpha_a = \tau$ , imalo brzinu  $v_a$ , koja zadovoljava jednadžbu (slijedi iz 13a):

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos \varepsilon - e^{2\mu\tau} \cdot \cos(\varepsilon + \tau)]. \quad (13b)$$

Kako je  $\operatorname{tg} \varepsilon = 2\mu$ , ova je brzina funkcija samo koeficijenta trenja.

Primjer 1. Za  $\mu = 0,25$  uz pomoć tablice 2 dobivamo:

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,92196 [0,89443 - 1,1303 \cdot 0,75926] = 0,0334.$$

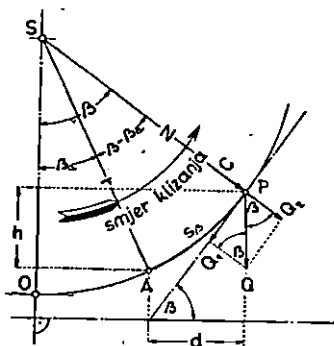
Na svakom udubljenom luku za svaku vrijednost kuta trenja  $\tau$  postoji nagib  $\alpha > \tau$ , s kojeg može krenuti teško tijelo s brzinom  $v_a = 0$  i klizeći sići do nagiba  $\alpha = 0$ , također s brzinom  $v_0 = 0$ . Jer iz (13a) izlazi, da je  $v_a = 0$ , ako je zadovoljen uvjet:

$$e^{-2\mu\alpha_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - \alpha_a) = \cos(\varepsilon + \tau). \quad (14)$$

Tablica 1 donosi vrijednosti kuta  $\alpha_a$ , koje zadovoljavaju ovaj uvjet za označene vrijednosti koeficijenta trenja  $\mu$ .

Tablica 1

$\mu = \operatorname{tg} \tau$	$\alpha_a^\circ$	$\mu = \operatorname{tg} \tau$	$\alpha_a^\circ$	$\mu = \operatorname{tg} \tau$	$\alpha_a^\circ$
0,10	11° 29' 14"	0,30	35° 37' 30"	0,50	65° 39' 32"
0,15	17° 19' 30"	0,35	42° 13' 30"	0,55	75° 55' 00"
0,20	23° 14' 30"	0,40	49° 16' 30"	0,60	88° 58' 00"
0,25	29° 19' 30"	0,45	56° 38' 30"		



Slika 2

2. Teško tijelo klizi i uzlazi na udubljenom luku (sl. 2). Na takvo tijelo dok klizi, djeluju sile kao na tijelo, koje klizi nizbrdo udubljenog luka (usp. točku 1). Sile u normali luka nalaze se u stanju ravnoteže i ne utječu na gibanje tijela. No komponenta težine tijela u tangenti djeluje sad u suprotnom smjeru gibanja i zbog toga ulazi u račun s negativnim predznakom. Zajedno s trenjem ta sila rezultira rezultantu u tangenti luka

$$\begin{aligned} T &= -Q \sin \beta - \mu \left( Q \cos \beta + \frac{mv^2}{r} \right) = \\ &= -Q (\sin \beta + \mu \cos \beta) - \mu \frac{mv^2}{r}, \end{aligned} \quad (15)$$

koja koči brzinu klizanja. Usporenje zbog te sile iznosi:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{T}{m} = -g (\sin \beta + \mu \cos \beta) - \frac{\mu v^2}{r} = \\ &= -g \frac{\sin (\tau + \beta)}{\cos \tau} - \frac{\mu v^2}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Prevaljeni put mjeren u smjeru klizanja od koje čvrste točke  $A$  na nagibu  $\beta_a$ , do koje točke  $P$  na nagibu  $\beta$  mjeri sada  $s = r(\beta - \beta_a)$ . Pritom se kut  $\beta$  mijenja s napredovanjem tijela i poradi toga je

$$ds = r d\beta. \quad (17)$$

Diferencijalna jednadžba brzine (4) prelazi u:

$$v dv = a_t ds = a_t r d\beta = -rg \frac{\sin(\tau + \beta)}{\cos \tau} \cdot d\beta - \mu v^2 d\beta,$$

a može se napisati i ovako (ako se podijeli sa  $v d\beta$ ):

$$\frac{dv}{v} + \mu v = -rg \frac{\sin(\tau + \beta)}{v \cos \tau}. \quad (18)$$

Rješavamo je pomoću supstitucije:

$$v = z e^{-\mu\beta}; \quad \frac{dv}{d\beta} = \frac{dz}{d\beta} e^{-\mu\beta} - \mu z e^{-\mu\beta}. \quad (19)$$

(18) prelazi onda u:

$$\frac{dz}{d\beta} e^{-\mu\beta} = -\frac{rg}{\cos \tau} \cdot \frac{\sin(\tau + \beta)}{z \cdot e^{-\mu\beta}}$$

i dalje u

$$z dz = -\frac{rg}{\cos \tau} e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\tau + \beta) d\beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo:

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{rg}{\cos \tau} \int e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\tau + \beta) d\beta. \quad (20)$$

Rješenje integrala s desne strane glasi:

$$\begin{aligned} \int e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\tau + \beta) d\beta &= e^{2\mu\beta} \cdot \frac{2\mu \sin(\tau + \beta) - \cos(\tau + \beta)}{1 + 4\mu^2} + C \\ &= -e^{2\mu\beta} \cdot \frac{\cos(\tau + \beta) - 2\mu \sin(\tau + \beta)}{1 + 4\mu^2} + C, \end{aligned}$$

a uz supstituciju:

$$2\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$\int e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\tau + \beta) d\beta = -e^{2\mu\beta} \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta) + C. \quad (21)$$

Kako je (iz 19)  $z = v e^{\mu\beta}$ , to konačno (20) prelazi u:

$$v^2 e^{2\mu\beta} = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta) + C.$$



Ova jednadžba mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$  istog udubljenog luka:

$$v_a^2 e^{2\mu\beta_a} = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{2\mu\beta_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a) + C.$$

Posljednje dvije jednadžbe daju onda traženo rješenje:

$$\left. \begin{aligned} & v_a^2 e^{\mu\beta_a} - v^2 e^{2\mu\beta} = \\ & = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{2\mu\beta_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a) - e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)] \\ & \quad \text{tg } \varepsilon = 2\mu = 2\text{tg } \tau. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ova jednadžba određuje snošaj među brzinom  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$  i brzinom  $v$  na nagibu  $\beta$  teškog tijela, koje je klizeći uzlazilo među tim nagibima na udubljenom luku polumjera  $r$ . U naše svrhe dolazi u obzir samo za određivanje brzine klizanja uzbrdo udubljenog luka na nagibima, koji se kreću u intervalu  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ .

Upozorujemo, ovu formulu mogli smo dobiti neposredno i tako, da smo u formuli (11) zamijenili  $-a$  sa  $\beta$ . No bilo je potrebno i dokazati valjanost takvog postupka.

Specijalni su ovi slučajevi.

Neka je  $v_a = v_0$  brzina klizanja na nagibu  $\beta_a = 0$  (u točki  $O$ , sl. 2). Onda za brzinu  $v > 0$  na nagibu u  $\beta > 0$  iz (22) izlazi:

$$v^2 = v_0^2 e^{-2\mu\beta} - 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau) - \cos(\varepsilon + \tau + \beta)]. \quad (23)$$

T. j. ako je teško tijelo krenulo s nagiba  $\beta_a = 0$  s brzinom  $v_0 > 0$  i klizeći uzlazilo na udubljenom luku do nagiba  $\beta \neq 0$ , ono još ima brzinu  $v$ , koju i kako je određuje ova jednadžba. Obrnuto jednadžba

$$v_0^2 = v^2 e^{2\mu\beta} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau) - e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)] \quad (24)$$

određuje brzinu  $v_0$ , koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\beta = 0$ , da klizeći uzide na udubljenom luku do nagiba  $\beta \neq 0$  s brzinom  $v > 0$ .

Za  $v = 0$  iz (24) izlazi:

$$v_0^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau) - e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)]. \quad (24a)$$

T. j.  $v_0$  je brzina koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\beta = 0$ , da klizeći uzide na udubljenom luku do nagiba  $\beta \neq 0$  s brzinom  $v = 0$ . Ako je još i  $\beta = \tau$ , onda (24a) prelazi u:

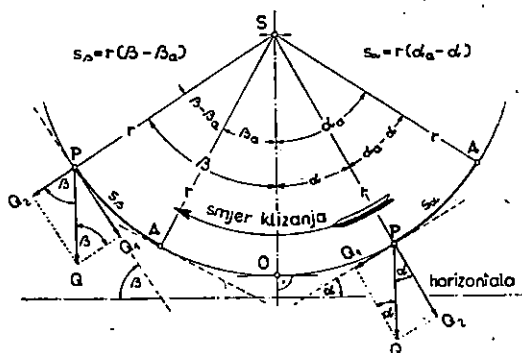
$$v_0^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau) - e^{2\mu\tau} \cdot \cos(\varepsilon + 2\tau)]. \quad (24b)$$

Ova brzina  $v_0$  je funkcija samo koeficijenta trenja.

Primjer 2. Za  $\mu = 0,25$  je  $\varepsilon + 2\tau = 54^\circ 38' 16''$ , a  $\cos(\varepsilon + 2\tau) = 0,57874$ . Uz pomoć tablice 2 onda iz (24b) izlazi:

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 0,92196 [0,75926 - 1,1303 \cdot 0,57874] = 0,0969.$$

$v_0$  je brzina koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\beta = 0$ , da klizeći uzbrdo na udubljenom luku stigne još nagib  $\beta = \tau$  s brzinom  $v = 0$ .



Slika 3.

3. Teško tijelo klizeći silazi i uzlazi na udubljenom luku. Udubljeni luk šumskih klizina može se sastojati od nizbrdice i od uzbrdice u smjeru klizanja (sl. 3). Za brzinu na nizbrdici važe formule izvedene u točki 1, a na uzbrdici formule izvedene u točki 2. U zajedničkoj točki O, na nagibu  $\alpha = \beta = 0$ , jedne i druge formule važe jednako. No formule izvedene u točki 1 mogu se upotrebiti za jedan i drugi dio udubljenog luka i to na nizbrdici neposredno, a na uzbrdici, ako se kut  $-\alpha$  u njima zamijeni s kutom  $+\beta$ . Analogno važi za formule, izvedene u točki 2.

Iznosimo ove specijalne slučajeve:

Treba li odrediti brzinu  $v_\beta$  na uzlaznoj strani udubljenog luka, na nagibu  $\beta > 0$ , za teško tijelo, koje je počelo kliziti na silaznoj strani tog luka, na nagibu  $\alpha \neq 0$ , s brzinom  $v_\alpha > 0$ , važi formula (izlazi iz 11, za  $\beta = -\alpha$ ;  $\alpha_a = \alpha$  i  $v = v_\beta$ ):

$$v_\beta^2 = v_\alpha^2 e^{-2\mu(\alpha+\beta)} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau + \beta) - e^{-2\mu(\alpha+\beta)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - \alpha)]. \quad (25)$$

Za  $\beta = 0$ , ova formula prelazi u formulu 12.

Obrnuto formula:

$$v_\alpha^2 = v_\beta^2 e^{2\mu(\alpha+\beta)} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau - \alpha) - e^{2\mu(\alpha+\beta)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)]. \quad (26)$$

određuje potrebnu početnu brzinu  $v_a$ , koju mora imati teško tijelo na silaznoj strani udubljenog luka, na nagibu  $\alpha$ , da stigne na nagib  $\beta \neq 0$  na uzlaznoj strani s brzinom  $v_\beta > 0$ .

Želimo li pak, da je na uzlaznoj strani udubljenog luka, na nagibu  $\beta \neq 0$ , brzina  $v_\beta = 0$ , teško tijelo mora početi kliziti na silaznoj strani, na nagibu  $\alpha > 0$ , sa brzinom:

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau - \alpha) - e^{2\mu(\alpha + \beta)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)]. \quad (26a)$$

Želimo li još, da je  $v_a = 0$ , nagibi  $\alpha$  i  $\beta$  moraju zadovoljavati uvjet:

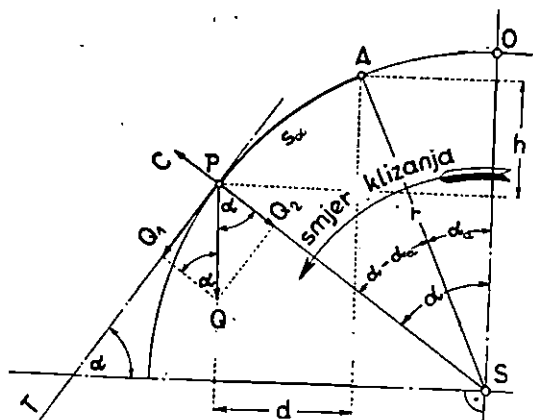
$$e^{-2\mu\alpha} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - \alpha) = e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta). \quad (27)$$

T. j. krene li teško tijelo s nagiba  $\alpha > 0$  na silaznoj strani udubljenog luka, s početnom brzinom  $v_a = 0$ , a želimo li, da još i uzide do nagiba  $\beta \neq 0$  na uzlaznoj strani i ondje stane, iznosi kutova  $\alpha$  i  $\beta$  moraju zadovoljavati uvjet (27).

Za  $\beta = 0$ , formula (27) prelazi u formulu (14).

Da bude  $\beta \neq 0$ , iznos kuta  $\alpha$  u formuli (27) svakako mora biti veći od pripadnog iznosa kuta  $\alpha_a$ , iskazanog u tablici 1.

Formule (14) i (27) mogu se iskoristiti za eksperimentalno određivanje kuta i koeficijenta trenja. Jer na zbiljnom udubljenom luku svagda se može odrediti nagib  $\alpha$  na nizbrdici, s kojeg je teško tijelo krenulo i nagib  $\beta$  na uzbrdici, na kojem je to isto tijelo sustalo.



Slika 4.

4. Teško tijelo klizi i silazi na izbočenom luku (sl. 4). Normalan pritisak tijela na podlogu iznosi  $Q \cos \alpha$ , a umanjuje ga centrifugalna sila  $mv^2 : r$ , dok tijelo klizi. Reakcija podloge  $N$  podržava ravnotežu s tim silama. Zbog toga i te sile – dok reakcija podloge

postoji – i ne utječu na gibanje tijela. U tangenti luka djeluje na tijelo komponenta vlastite težine  $Q \sin \alpha$  u smjeru klizanja i trenje  $\mu N$  u suprotnom smjeru. Te dvije sile rezultiraju rezultantu

$$\begin{aligned} T &= Q \sin \alpha - \mu N = Q \sin \alpha - \mu \left( Q \cos \alpha - \frac{\mu v^2}{r} \right) \\ &= Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \mu \frac{m v^2}{r}, \end{aligned} \quad (28)$$

zbog koje teško tijelo klizi i silazi na izbočenom luku dovoljnog nagiba  $\alpha$  prema horizontali. Kako između koeficijenta trenja i kutā trenja postoji snošaj  $\mu = \operatorname{tg} \tau$ , to se (28) kraće može napisati ovako:

$$T = mg \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau} + \mu \frac{m v^2}{r}.$$

Ubrzanje sile  $T$  je:

$$a_t = \frac{T}{m} = g \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau} + \frac{\mu v^2}{r}. \quad (29)$$

Ono može biti veće ili manje od ništice, a i jednako ništici, već prema iznosima kutova  $\alpha$  i  $\tau$ , odnosno polumjera  $r$  izbočenog luka kružnice.

Prevaljeni put od neke čvrste točke luka  $A$  (na nagibu  $\alpha_a$ ) do točke  $P$  (na nagibu  $\alpha$ ) iznosi  $s = r(\alpha - \alpha_a)$ . Kako se kut  $\alpha$  mijenja za vrijeme klizanja, to promjena dužine puta iznosi

$$ds = r d\alpha. \quad (30)$$

Općenito jednadžba (5) s obzirom na (30) i (29) prelazi u:

$$v dv = a_t ds = a_t r d\alpha = rg \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau} d\alpha + \mu v^2 d\alpha,$$

a podijeljena sa  $v d\alpha$  u:

$$\frac{dv}{d\alpha} - \mu v = \frac{rg}{\cos \tau} \cdot \frac{\sin(\alpha - \tau)}{v}. \quad (31)$$

uz supstituciju:

$$v = ze^{\mu\alpha}; \quad \frac{dv}{d\alpha} = \frac{dz}{d\alpha} e^{\mu\alpha} + \mu z e^{\mu\alpha} \quad (32)$$

dalje prelazi u:

$$z dz = \frac{rg}{\cos \tau} e^{-2\mu\alpha} \cdot \sin(\alpha - \tau) d\alpha. \quad (33)$$

Obostrano integrirana jednadžba daje:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{rg}{\cos \tau} \int e^{-2\mu\alpha} \cdot \sin(\alpha - \tau) d\alpha.$$

Kako je

$$\int e^{-2\mu a} \cdot \sin(a-\tau) da = e^{-2\mu a} \cdot \frac{-2\mu \sin(a-\tau) - \cos(a-\tau)}{1+4\mu^2} + C,$$

a uz supstituciju  $2\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$

$$\int e^{-2\mu a} \cdot \sin(a-\tau) da = -e^{-2\mu a} \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) + C,$$

zatim, kako je  $z = v \cdot e^{-\mu a}$ , konačno (33) prelazi u

$$v^2 \cdot e^{-2\mu a} = -2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{-2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) + C.$$

Ova jednadžba mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $a_a$  istog izbočenog luka:

$$v_a^2 e^{-2\mu a_a} = -2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{-2\mu a_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a_a) + C.$$

Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi onda:

$$\left. \begin{aligned} v^2 e^{-2\mu a} - v_a^2 e^{-2\mu a_a} &= \\ = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu a_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a_a) - e^{-2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a)] & \quad (35) \\ \operatorname{tg} \varepsilon = 2\mu = 2 \operatorname{tg} \tau. & \end{aligned} \right\}$$

Ova jednadžba određuje snošaj među brzinom  $v_a$  na nagibu  $a_a$  i brzinom  $v$  na nagibu  $a$  teškog tijela koje je klizilo i silazilo, među tim nagibima na izbočenom luku polumjera  $r$ . U naše svrhe ova formula dolazi u obzir samo u intervalu nagiba  $0 \leq a \leq 90^\circ$ .

Iznosimo ove specijalne slučajeve:

Za  $a_a = 0$  i  $v_a = v_0$  formula (35) prelazi u

$$v^2 = v_0^2 e^{2\mu a} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau) - \cos(\varepsilon + \tau - a)]. \quad (36)$$

Ova jednadžba određuje brzinu  $v > 0$  na nagibu  $a > 0$  teškog tijela, koje je počelo silaziti s nagiba  $a_a = 0$  na izbočenom luku s brzinom  $v_0 > 0$ . Obrnuto jednadžba

$$v_0^2 = v^2 e^{-2\mu a} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - a) - \cos(\varepsilon + \tau)] \quad (37)$$

određuje brzinu  $v_0$  na nagibu  $a = 0$ , koju mora imati teško tijelo, da klizeći nizbrdo izbočenog luka stigne na nagib  $a > 0$  s brzinom  $v > 0$ .

Na potezu izbočenog luka nagiba  $0 \leq a \leq \tau$  teško tijelo ne može kliziti ni silaziti samo zbog vlastite težine, jer je kut trenja veći od nagiba luka na svakom mjestu tog poteza. No želimo li, da tijelo klizi i silazi i na tom potezu, pa još na kraju, na nagibu  $a = \tau$ , da ima i brzinu  $v > 0$ , na početku tog poteza, na nagibu  $a = 0$ , mora imati brzinu  $v_0$ , koja zadovoljava jednadžbu:

$$v_0^2 = v^2 e^{-2\mu \tau} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu \tau} \cdot \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \tau)]. \quad (37a)$$

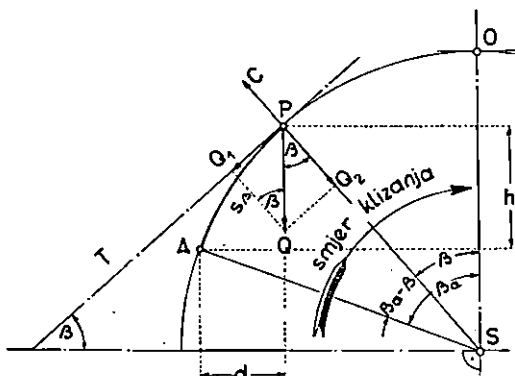
Zadovoljavamo li se time, da je na kraju luka, na nagibu  $\alpha = \tau$ , brzina tijela  $v = 0$ , na početku luka, na nagibu  $\alpha_a = 0$ , to tijelo mora imati brzinu (slijedi iz 37a):

$$v_0^2 = rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu\tau} \cdot \cos \varepsilon - \cos (\varepsilon + \tau)]. \quad (37b)$$

I ta je brzina funkcija samo koeficijenta trenja.

Primjer 3. Za  $\mu = 0,25$  iz (37b) i tablice 2 dobivamo

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 0,92196 \left[ \frac{0,89443}{1,1303} - 0,75926 \right] = 0,0296.$$



Slika 5.

5. Teško tijelo klizi i uzlazi na izbočenom luku (sl. 5). Sa  $\beta = -\alpha$  iz (35) neposredno dobivamo jednadžbu:

$$\left. \begin{aligned} &v_a^2 e^{2\mu\beta_a} - v^2 e^{2\mu\beta} = \\ &= 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{2\mu\beta} \cdot \cos (\varepsilon + \tau + \beta) - e^{2\mu\beta_a} \cdot \cos (\varepsilon + \tau + \beta_a)] \\ &\quad \text{tg } \varepsilon = 2\mu = 2 \text{tg } \tau. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

koja određuje snošaj među brzinom  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$  i brzinom  $v$  na nagibu  $\beta$  i to za teško tijelo, koje klizi i uzlazi na izbočenom luku kružnice od jednog do drugog nagiba.

Da je to tako, dokazujemo posve analogno kao u predašnjim točkama. Kako komponenta vlastite težine tijela djeluje u suprotnom smjeru klizanja to je sada tangencijalna sila

$$\begin{aligned} T &= -Q \sin \beta - \mu \left( Q \cos \beta - \frac{mv^2}{r} \right) = \\ &= -mg \frac{\sin (\beta + \tau)}{\cos \tau} + \frac{\mu mv^2}{r}, \end{aligned} \quad (38^*)$$

a usporenje te sile

$$a_t = \frac{T}{m} = -g \frac{\sin(\beta + \tau)}{\cos \tau} + \frac{\mu v^2}{r}.$$

Prevaljen put u smjeru klizanja iznosi

$$s = r(\beta_a - \beta), \text{ dakle je } ds = -r d\beta.$$

Diferencijalna jednadžba brzine glasi:

$$v dv = -a_t r d\beta = rg \frac{\sin(\beta + \tau)}{\cos \tau} d\beta - \mu v^2 d\beta$$

ili nakon sređenja:

$$\frac{dv}{d\beta} + \mu v = rg \frac{\sin(\beta + \tau)}{v \cos \tau}.$$

Uz supstituciju

$$v = ze^{-\mu\beta}, \quad \frac{dv}{d\beta} = \frac{dz}{d\beta} e^{-\mu\beta} - \mu z e^{-\mu\beta}$$

prelazi ta jednadžba u:

$$z dz = \frac{rg}{\cos \tau} e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\beta + \tau) d\beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{rg}{\cos \tau} \int e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\beta + \tau) d\beta.$$

Kako je

$$\int e^{2\mu\beta} \cdot \sin(\beta + \tau) d\beta = -e^{2\mu\beta} \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta) + C,$$

ako je  $\text{tg } \varepsilon = 2\mu$ , zatim kako je  $z = ve^{\mu\beta}$ , to konačno rješenje diferencijalne jednadžbe brzine glasi:

$$v^2 e^{2\mu\beta} = -2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{2\mu\beta} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta) + C.$$

Ova jednadžba važi i za brzinu  $v_a$ , na nagibu  $\beta_a$ :

$$v_a^2 e^{2\mu\beta_a} = -2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} e^{2\mu\beta_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a) + C.$$

Obje posljednje jednadžbe pak rezultiraju jednadžbu (38).

Iznosimo ove specijalne slučajeve:

Neka je  $\beta_a \neq 0$  i  $v_a > 0$ , a  $\beta = 0$  i  $v = v_0 > 0$ . Iz (38) onda dobivamo:

$$v_a^2 = v_0^2 e^{-2\mu\beta_a} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu\beta_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau) - \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a)]. \quad (39)$$

Ova jednadžba određuje brzinu  $v_a$ , koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\beta_a \neq 0$ , da klizeći uzide na tjeme izbočenog luka kružnice, do nagiba  $\beta = 0$  s brzinom  $v_0 > 0$ .

Obrnuto jednadžba:

$$v_0^2 = v_a^2 e^{2\mu\beta_a} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{2\mu\beta_a} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a) - \cos(\varepsilon + \tau)] \quad (40)$$

određuje brzinu  $v_0$ , na nagibu  $\beta = 0$ , koju još ima teško tijelo, ako je klizeći krenulo uzbrdo izbočenog luka, s nagiba  $\beta_a \neq 0$ , s brzinom  $v_a > 0$ .

Uz  $\beta_a = \tau$  i  $v_0 = 0$  jednadžba (39) prelazi u

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu\tau} \cdot \cos(\varepsilon + \tau) - \cos(\varepsilon + 2\tau)] \quad (41)$$

te određuje brzinu  $v_a$ , koju mora imati teško tijelo na nagibu  $\beta_a = \tau$ , da klizeći uzide na tjeme izbočenog luka, do nagiba  $\beta = 0$ , s brzinom  $v_0 = 0$ . I ova je brzina funkcija samo koeficijenta trenja.

Primjer 4. Za  $\mu = 0,25$  iz (41) dobivamo (usp. i tabl. 2):

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,92196 \left[ \frac{0,75926}{1,1303} - 0,57874 \right] = 0,0857.$$

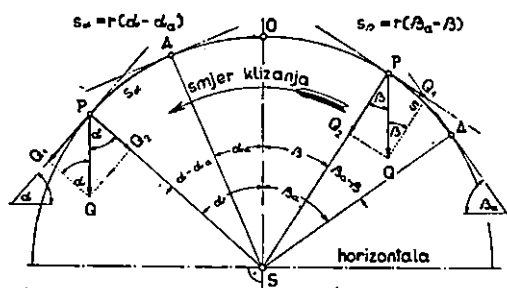
Pregledno možemo sada napisati rezultate dosadašnjih primjera:

formula (13 b), udubljeni luk, nizbrdo  $\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,0334$

formula (24 b), udubljeni luk, uzbrdo  $\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,0969$

formula (37 b), izbočeni luk, nizbrdo  $\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,0296$

formula (41), izbočeni luk, uzbrdo  $\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = 0,0857$



Slika 6.

6. Teško tijelo klizeći uzlazi i silazi na izbočenom luku (sl. 6). Sastoji li se izbočeni luk od uzbrdice s jedne, a od nizbrdice s druge strane, za brzinu klizanja uzbrdo važe formule izvedene pod 5, a za brzinu klizanja nizbrdo formule izvedene pod 4. U zajedničkoj



točki  $O$ , na nagibu  $\alpha = \beta = 0$ , jedne i druge formule važe jednako. No formule izvedene za brzinu klizanja uzbrdo mogu se upotrebiti i za brzinu klizanja nizbrdo, ako u njima zamijenimo kut  $\beta$  s kutom  $-\alpha$  (i obrnuto).

Iznosimo neke specijalne slučajeve:

Zamijenimo li u formuli (38)  $\beta$  s  $-\alpha$ , dobivamo jednadžbu:

$$v^2 = v_a^2 e^{2\mu(\alpha+\beta_a)} - 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau - \alpha) - e^{2\mu(\alpha+\beta_a)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a)]. \quad (42)$$

T. j.  $v$  je brzina, koju još ima teško tijelo na silaznoj strani izbočenog luka, na nagibu  $\alpha \neq 0$ , ako je to tijelo počelo kliziti na uzlaznoj strani istog luka, na nagibu  $\beta_a \neq 0$ , s brzinom  $v_a > 0$ . Obrnuto jednadžba

$$v_a^2 = v^2 e^{-2\mu(\alpha+\beta_a)} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu(\alpha+\beta_a)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau - \alpha) - \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a)] \quad (43)$$

određuje brzinu  $v_a$ , koju teško tijelo treba da ima na uzlaznoj strani izbočenog luka, na nagibu  $\beta_a > 0$ , da klizeći preko tjemena na silaznoj strani istog luka stigne do nagiba  $\alpha \neq 0$ , još s brzinom  $v > 0$ .

Za  $\alpha = \tau$  jednadžba (43) prelazi u

$$v_a^2 = v^2 e^{-2\mu(\tau+\beta_a)} + 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu(\tau+\beta_a)} \cdot \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a)]. \quad (43a)$$

T. j.  $v_a$  je brzina, koju teško tijelo treba da ima na uzlaznoj strani izbočenog luka, na nagibu  $\beta_a \neq 0$ , da klizeći preko tjemena stigne do nagiba  $\alpha = \tau$  silazne strane istog luka s brzinom  $v > 0$ . Ako je  $v = 0$ , onda (43a) prelazi u

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-2\mu(\tau+\beta_a)} \cdot \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \tau + \beta_a)]. \quad (43b)$$

T. j.  $v_a$  je brzina, koju teško tijelo treba da ima na uzbrdici izbočenog luka, na nagibu  $\beta_a \neq 0$ , da klizeći preko tjemena stigne na nizbrdicu istog luka, na nagib  $\alpha = \tau$  s brzinom  $v = 0$ .

Konačno, ako je još i  $\beta_a = \tau$ , iz (43b) dobivamo

$$v_a^2 = 2rg \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [e^{-4\mu\tau} \cdot \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + 2\tau)]. \quad (43c)$$

T. j.  $v_a$  je brzina, koju teško tijelo treba da ima na uzlaznoj strani izbočenog luka, na nagibu  $|\beta| = \tau$ , da klizeći preko tjemena stigne na silaznu stranu istog luka, na nagib  $|\alpha| = \tau$  s brzinom  $v = 0$ . I ova brzina je funkcija samo koeficijenta trenja.

Upotrebu izvedenih formula olakšava tablica 2.

Tablica 2

$e = 2,718282; \log e = 0,434294.$

$\mu = \text{tg } \tau$	$\tau^{\circ}$	arc $\tau$	cos $\tau$	sin $\tau$	$2 \mu \tau$	$e^{2\mu\tau}$
0,04	2°17'26"	0,039978	0,999202	0,039967	0,003198	1,00320
0,05	2°51'45"	0,049960	0,998750	0,049939	0,004996	1,00501
0,06	3°26'01"	0,059928	0,998242	0,059892	0,007191	1,00722
0,10	5°42'38"	0,099667	0,995052	0,099503	0,019933	1,02013
0,15	8°31'51"	0,148891	0,988936	0,148342	0,044667	1,04568
0,20	11°18'36"	0,197397	0,980580	0,196117	0,078959	1,08216
0,25	14°02'11"	0,244981	0,970141	0,242532	0,122491	1,13031
0,30	16°41'57"	0,291455	0,957827	0,287346	0,174873	1,19109
0,35	19°17'24"	0,336674	0,943859	0,330349	0,235672	1,26576
0,40	21°48'05"	0,380506	0,928477	0,371390	0,304405	1,35582
0,45	24°13'40"	0,422855	0,911921	0,410365	0,380570	1,46311
0,50	26°33'54"	0,463647	0,894427	0,447212	0,463647	1,58986
0,55	28°48'39"	0,502844	0,876216	0,481919	0,553128	1,73868
0,60	30°57'49"	0,540418	0,857494	0,514494	0,648502	1,91267
tg $\tau = \mu$	tg $\varepsilon = 2 \mu$	$\varepsilon^{\circ}$	cos $\varepsilon$	cos $\varepsilon : \cos \tau$	$(\varepsilon + \tau)^{\circ}$	cos $(\varepsilon + \tau)$
0,04	0,08	4°34'26"	0,996816	0,997614	6°51'52"	0,992832
0,05	0,10	5°42'38"	0,995041	0,996286	8°34'23"	0,988827
0,06	0,12	6°50'34"	0,992777	0,994664	10°16'35"	0,983959
0,10	0,20	11°18'36"	0,980580	0,985477	17°01'14"	0,956200
0,15	0,30	16°41'57"	0,957827	0,968543	25°13'48"	0,904602
0,20	0,40	21°48'05"	0,928477	0,946865	33°06'41"	0,837610
0,25	0,50	26°33'54"	0,894427	0,921955	40°36'05"	0,759256
0,30	0,60	30°57'49"	0,857494	0,895249	47°39'46"	0,673492
0,35	0,70	34°59'31"	0,819232	0,867960	54°16'55"	0,583784
0,40	0,80	38°39'35"	0,780870	0,841023	60°27'40"	0,493014
0,45	0,90	41°59'14"	0,743293	0,815085	66°12'54"	0,403306
0,50	1,00	45° 0' 0"	0,707107	0,790569	71°33'54"	0,316228
0,55	1,10	47°43'35"	0,672672	0,767700	76°32'14"	0,232810
0,60	1,20	50°11'40"	0,640184	0,746576	81°09'29"	0,153709

## B) PRIBLIŽNI RAČUN BRZINE KLIZANJA

1. Uz pretpostavku, da za vrijeme klizanja na teško tijelo ne djeluje centrifugalna sila

Na silaznoj strani udubljenog luka teško tijelo klizi zbog tangencijalnog ubrzanja (1) i (3):  $a_t = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$ .

Kako promjena puta na toj strani iznosi (5)  $ds = -r d\alpha$ , to općenita diferencijalna jednačba (4) prelazi u

$$v dv = -a_t r d\alpha = -rg \sin \alpha d\alpha + \mu rg \cos \alpha d\alpha.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednačbu

$$\frac{v^2}{2g} = r \cos \alpha + \mu r \sin \alpha + C,$$

koja mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\alpha_a$  udubljenog luka

$$\frac{v_a^2}{2g} = r \cos \alpha_a + \mu r \sin \alpha_a + C.$$

Iz posljednjih dviju jednačbi izlazi:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_a^2}{2g} = r (\cos \alpha - \cos \alpha_a) - \mu r (\sin \alpha_a - \sin \alpha). \quad (44)$$

Iz sl. 1 se razabira, da je:

$h = r (\cos \alpha - \cos \alpha_a)$  vertikalni razmak točaka  $A$  i  $P$ , zatim vertikalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetiva  $AP$ ;

$d = r (\sin \alpha_a - \sin \alpha)$  horizontalan razmak točaka  $A$  i  $P$ , horizontalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ ;

Jednačba promjene brzine silaznog klizanja na udubljenom luku (44) zbog toga može se napisati kraće:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_a^2 - 2g(\mu d - h); & d &= r(\sin \alpha_a - \sin \alpha); \\ & & h &= r(\cos \alpha - \cos \alpha_a). \end{aligned} \quad (44a)$$

Uzbrdo udubljenog luka teško tijelo klizi zbog kinetičke energije, koju ima, a usporenje (iz 15 ili 16 za  $v = 0$ ):

$$a_t = -g \sin \beta - \mu g \cos \beta$$

koči to klizanje. Kako promjena puta iznosi (17)  $ds = r d\beta$ , to općenita diferencijalna jednačba (4) prelazi u:

$$v dv = a_t r d\beta = -rg \sin \beta d\beta - \mu rg \cos \beta d\beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednačbu:

$$\frac{v^2}{2g} = r \cos \beta - \mu r \sin \beta + C,$$

koja mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\alpha_a$  udubljenog luka:

$$\frac{v_a^2}{2g} = r \cos \beta_a - \mu r \sin \beta_a + C.$$

Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi:

$$\frac{v_a^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = r (\cos \beta_a - \cos \beta) + \mu r (\sin \beta - \sin \beta_a). \quad (45)$$

Iz sl. 2 se vidi, da je

$h = r (\cos \beta_a - \cos \beta)$  vertikalni razmak točkaka  $A$  i  $P$ , zatim vertikalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ ;

$d = r (\sin \beta - \sin \beta_a)$  horizontalni razmak točkaka  $A$  i  $P$ , horizontalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ . Jednadžba promjene brzine uzlaznog klizanja na udubljenom luku zbog toga može se napisati kraće:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_a^2 - 2g(\mu d + h); & d &= r(\sin \beta - \sin \beta_a); \\ h &= r(\cos \beta_a - \cos \beta). \end{aligned} \quad (45a)$$

Nizbrdo *izbočenog* luka teško tijelo klizi zbog tangencijalnog ubrzanja (28 i 29 za  $v = 0$ )  $a_t = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$ .

Kako promjena puta iznosi (30):  $ds = r da$ , to općenita diferencijalna jednadžba (4) prelazi u:

$$v dv = a_t r da = rg \sin \alpha da - \mu rg \cos \alpha da.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu

$$\frac{v^2}{2g} = -r \cos \alpha - \mu r \sin \alpha + C,$$

koja mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\alpha_a$  izbočenog luka:

$$\frac{v_a^2}{2g} = -r \cos \alpha_a - \mu r \sin \alpha_a + C.$$

Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_a^2}{2g} = r (\cos \alpha_a - \cos \alpha) - \mu r (\sin \alpha - \sin \alpha_a). \quad (46)$$

Iz sl. 4 vidi se, da je

$h = r (\cos \alpha_a - \cos \alpha)$  vertikalni razmak točkaka  $A$  i  $P$ , zatim vertikalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ ;

$d = r (\sin \alpha - \sin \alpha_a)$  horizontalni razmak točkaka  $A$  i  $P$ , horizontalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ . Jednadžba promjene brzine silaznog klizanja na izbočenom luku (46) zbog toga se može napisati kraće:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_a^2 - 2g(\mu d - h); & h &= r(\cos \alpha_a - \cos \alpha); \\ d &= r(\sin \alpha - \sin \alpha_a). \end{aligned} \quad (46a)$$

Uzbrdo izbočenog luka teško tijelo klizi zbog kinetičke energije, koju ima, a usporenje  $a_t = -g \sin \beta - \mu g \cos \beta$  koči to klizanje. Kako promjena puta iznosi  $ds = -r d\beta$ , to općenita diferencijalna jednačnja (4) prelazi u:

$$v dv = -a_t r d\beta = r g \sin \beta d\beta + \mu r g \cos \beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednačnju:

$$\frac{v^2}{2g} = -r \cos \beta + \mu r \sin \beta + C,$$

koja mora važiti i za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\alpha_a$  izbočenog luka:

$$\frac{v_a^2}{2g} = -r \cos \beta_a + \mu r \sin \beta_a + C.$$

Iz posljednjih dviju jednačnji izlazi:

$$\frac{v_a^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = r (\cos \beta - \cos \beta_a) + \mu r (\sin \beta_a - \sin \beta). \quad (47)$$

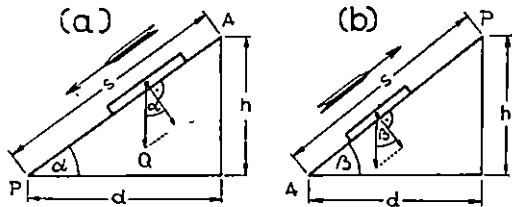
Iz sl. 5 vidi se, da je:

$h = r (\cos \beta - \cos \beta_a)$  vertikalni razmak točaka  $A$  i  $P$ , zatim vertikalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ ;

$d = r (\sin \beta_a - \sin \beta)$  horizontalni razmak točaka  $A$  i  $P$ , horizontalna projekcija luka  $\widehat{AP}$  i tetive  $AP$ . Jednačnja promjene uzlaznog klizanja na izbočenom luku (47) zbog toga se može napisati kraće:

$$v^2 = v_a^2 - 2g (\mu d + h); \quad d = r (\sin \beta_a - \sin \beta);$$

$$h = r (\cos \beta - \cos \beta_a). \quad (47a)$$



Slika 7.

U pravcu, niz kosinu nagiba  $\alpha$  (sl. 7a), kako je poznato, teško tijelo klizi zbog ubrzanja  $a_t = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ . To je ubrzanje konstantno, jer je i nagib  $\alpha$  konstantan. Zbog toga opća jednačnja brzine (4)  $v dv = a_t ds$  nakon izvršenog obostranog integriranja u označenim granicama

$$\int_{v_a}^v v dv = a_t \int_0^s ds$$

prelazi u  $v^2 - v_a^2 = 2 a_t ds = 2g (s \cdot \sin \alpha - \mu s \cos \alpha)$ .

Jednadžba brzine silaznog klizanja niz ravnu kosinu onda glasi:

$$v^2 = v_a^2 - 2g(\mu d - h); \quad d = s \cdot \cos \alpha; \quad h = s \cdot \sin \alpha. \quad (48)$$

Klizi li teško tijelo u pravcu uz kosinu nagiba  $\beta$  (sl. 7 b) zbog kinetičke energije, koju ima, nailazi na otpor, koji potječe od stalnog usporenja  $a_t = -g(\sin \beta + \mu \cos \beta)$ . Opća jednadžba brzine (4)  $v dv = a_t ds$  u ovom slučaju nakon izvršenog integriranja u označenim granicama

$$\int_v^{v_a} v dv = a_t \int_s^0 ds$$

prelazi u  $v_a^2 - v^2 = -2a_t s = 2g(s \cdot \sin \beta + \mu s \cdot \cos \beta)$ .

Jednadžba brzine uzlaznog klizanja uz ravnu kosinu zbog toga glasi:

$$v^2 = v_a^2 - 2g(\mu d + h); \quad d = s \cdot \cos \beta; \quad h = s \cdot \sin \beta. \quad (49)$$

U formulama (48) i (49) označuje:

$h$  vertikalni razmak točaka  $A$  i  $P$ , ujedno i vertikalnu projekciju puta  $s = \overline{AP}$ ;

$d$  horizontalni razmak točaka  $A$  i  $P$  ujedno i horizontalnu projekciju puta  $s = \overline{AP}$ .

Uspoređivanjem pak formula (44a), (45a), (46a) i (47a) s formulama (48) i (49) dolazimo do ovog zaključka:

Ne uzimamo li u račun utjecaj centrifugalne sile, promjena brzine klizanja na udubljenom i izbočenom luku događa se kao da i ne klizi teško tijelo na tim lukovima nego na tetivama tih lukova.

Taj zaključak izlazi još i iz ove činjenice:

Identične formule (44a), (46a) i (48) umnožene masom teškog tijela, daju jednadžbu:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = Qh - \mu Qd. \quad (50)$$

Identične pak formule (45 a), (47 a) i (49 a) umnožene masom teškog tijela, daju jednadžbu:

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = Qh + \mu Qd. \quad (51)$$

T. j. ne uzimamo li u račun utjecaj centrifugalne sile, promjena kinetičke energije kod silaznog klizanja na udubljenom i na izbočenom luku jednaka je promjeni kinetičke energije kod silaznog klizanja na pravcu, koji ima isti nagib s tetivama tih lukova; ta je pak promjena jednaka radnji težine tijela (na vertikalnoj), umanjenoj za radnju trenja (na horizontalnoj projekciji puta).

Isto tako je i promjena kinetičke energije kod uzlaznog klizanja na udubljenom i na izbočenom luku jednaka promjeni kinetičke energije kod uzlaznog klizanja u pravcu, koji ima isti nagib s teti-

vama tih lukova; ta je pak promjena jednaka radnji težine tijela (na vertikalnoj), uvećanoj za radnju trenja (na horizontalnoj projekciji puta).

2. Uz pretpostavku, da na tijelo djeluje samo centrifugalna sila. Centrifugalna sila djeluje u normali na podlogu klizanja, neposredno ne izvršuje nikakvu radnju i ne utječe na promjenu kinetičke energije tijela, koje klizi. No na udubljenom luku izaziva trenje  $\mu C = \mu m v^2 : r$ , koje izvršuje negativnu radnju i koči klizanje tijela. Usporenje zbog tog trenja iznosi  $a_t = -\mu C : m = -\mu v^2 : r$ .

Opća jednadžba brzine (4), uz to usporenje, prelazi u

$$v dv = a_t ds = -\frac{\mu v^2}{r} ds; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{r} ds.$$

Uz silazno klizanje na udubljenom luku je  $ds = -r da$ , a posljednja jednadžba prelazi u:

$$\frac{dv}{v} = \mu da.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu:  $\ln v = \mu a + C$ , koja također važi za brzinu  $v_a$  na nagibu  $a_a$ :  $\ln v_a = \mu a_a + C$ .

Odbijanjem posljednjih dviju jednadžbi dobivamo:

$$\ln v - \ln v_a = \mu (a - a_a), \quad \text{ili} \quad v = v_a e^{-\mu (a_a - a)}. \quad (52)$$

Uz uzlazno klizanje na udubljenom luku je  $ds = r d\beta$ , a opća jednadžba brzine (4) prelazi u

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu:  $\ln v = -\mu \beta + C$ , koja također važi za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$ :  $\ln v_a = -\mu \beta_a + C$ .

Odbijanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$\ln v - \ln v_a = \mu (\beta_a - \beta) \quad \text{ili} \quad v = v_a \cdot e^{-\mu (\beta - \beta_a)}. \quad (53)$$

Na izbočenom luku centrifugalna sila smanjuje trenje, koje nastaje zbog komponente težine tijela u normali podloge ( $Q_2$ ). Ovo smanjenje trenja uzrokuje ubrzanje

$$a_t = \mu C : m = \mu v^2 : r,$$

a opća jednadžba brzine (4) dobiva oblik:

$$v dv = a_t ds = \frac{\mu v^2}{r} ds; \quad \frac{dv}{v} = \frac{\mu}{r} ds.$$

Uz silazno klizanje na izbočenom luku je  $ds = r da$ , a opća jednadžba brzine (4) prelazi u

$$\frac{dv}{v} = \mu da.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu:  $lnv = \mu\alpha + C$ , koja također važi za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\alpha_a$ :  $lnv_a = \mu\alpha_a + C$ . Ove dvije jednadžbe rezultiraju jednadžbu silazne brzine na izbočenom luku:

$$v = v_a e^{\mu(\alpha - \alpha_a)}. \quad (54)$$

Uz *uzlazno* klizanje na *izbočenom* luku je  $ds = -rd\beta$ , a opća jednadžba brzine (4) prelazi u

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\beta.$$

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu:  $lnv = -\mu\beta + C$ , koja također važi za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$ :  $lnv_a = -\mu\beta_a + C$ . Ove dvije jednadžbe rezultiraju jednadžbu uzlazne brzine na izbočenom luku:

$$v = v_a e^{\mu(\beta_a - \beta)}. \quad (55)$$

3. Superponiranjem rezultata dobivenih u točki 1., gdje smo računali samo s djelovanjem težine tijela, pa rezultata dobivenih u točki 2., gdje smo računali samo s djelovanjem centrifugalne sile, dolazimo do približnih formula, koje računaju s jednim i s drugim djelovanjem. I to

a) za *silaznu* brzinu klizanja na *udubljenom* luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 e^{-2\mu(\alpha_a - \alpha)} - 2g(\mu d - h), \text{ ili} \\ v_a^2 &= [v^2 + 2g(\mu d - h)] e^{2\mu(\alpha_a - \alpha)} \\ d &= r(\sin \alpha_a - \sin \alpha), \quad h = r(\cos \alpha - \cos \alpha_a) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

b) za *uzlaznu* brzinu klizanja na *udubljenom* luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 e^{-2\mu(\beta - \beta_a)} - 2g(\mu d + h), \text{ ili} \\ v_a^2 &= [v^2 + 2g(\mu d + h)] e^{2\mu(\beta - \beta_a)} \\ d &= r(\sin \beta - \sin \beta_a), \quad h = r(\cos \beta_a - \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

c) za *silaznu* brzinu klizanja na *izbočenom* luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 e^{2\mu(\alpha - \alpha_a)} - 2g(\mu d - h) \\ d &= r(\sin \alpha - \sin \alpha_a), \quad h = r(\cos \alpha_a - \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

d) za *uzlaznu* brzinu klizanja na *izbočenom* luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 e^{2\mu(\beta_a - \beta)} - 2g(\mu d + h) \\ d &= r(\sin \beta_a - \sin \beta), \quad h = r(\cos \beta - \cos \beta_a) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$



Od ovih jednostavnije približne formule nastaju, ako u posljednje formule uvrstimo – namjesto potencija  $s$  bazom  $e$  – ekvivalentne redove beskonačnih potencija, a od tih redova upotrebimo samo prva dva člana. Tako preučešene približne formule onda glase:

a) za silaznu brzinu klizanja na udubljenom luku:

$$\left. \begin{aligned} v_a^2 &= [v^2 + 2g(\mu d - h)] \cdot [1 + 2\mu(a - a)] \\ d &= r(\sin \alpha_a - \sin \alpha), \quad h = r(\cos \alpha - \cos \alpha_a) \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

b) za uzlaznu brzinu klizanja na udubljenom luku:

$$\left. \begin{aligned} v_a^2 &= [v^2 + 2g(\mu d + h)] \cdot [1 + 2\mu(\beta - \beta_a)] \\ d &= r(\sin \beta - \sin \beta_a), \quad h = r(\cos \beta_a - \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (57a)$$

c) za silaznu brzinu klizanja na izbočenom luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 [1 + 2\mu(\alpha - \alpha_a)] - 2g(\mu d - h) \\ d &= r(\sin \alpha - \sin \alpha_a), \quad h = r(\cos \alpha_a - \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

d) za uzlaznu brzinu klizanja na izbočenom luku:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_a^2 [1 + 2\mu(\beta_a - \beta)] - 2g(\mu d + h) \\ d &= r(\sin \beta_a - \sin \beta), \quad h = r(\cos \beta - \cos \beta_a) \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

Posljednje približne formule mogli smo dobiti i tako, da smo u formule ubrzanja (3), (16), (29) i (38) uvrstili konstantnu brzinu  $v_a$  na mjestu promjenljive brzine  $v$ , pa iz tako određenih ubrzanja izveli jednadžbe brzine klizanja.

*Primjer 5.* Kod silaznog klizanja na udubljenom luku za  $\alpha = \tau$ ,  $\alpha = 0$  i  $v = 0$  iz (44a) izlazi:

$$d = r \sin \tau, \quad h = r(1 - \cos \tau) \quad \text{i} \quad \frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = \mu \sin \tau + \cos \tau - 1. \quad (a)$$

U istom slučaju iz (56a) dobivamo drugu približnu vrijednost

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = (\mu \sin \tau + \cos \tau - 1)(1 + 2\mu\tau), \quad (b)$$

a iz (56) treću:

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = (\mu \sin \tau + \cos \tau - 1) e^{2\mu\tau}. \quad (c)$$

Točna je vrijednost te brzine (slijedi iz 13b):

$$\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos \varepsilon - e^{2\mu\tau} \cdot \cos(\varepsilon + \tau)]. \quad (d)$$

U tablici 3 iskazane vrijednosti  $\frac{1}{2r} \cdot \frac{v_a^2}{g}$  izračunate su po formulama (a), (b), (c) i (d) za vrijednosti koeficijenta trenja od praktičkog značenja. Iz te tablice vidi se, da je razlika između točnih (d) i približnih vrijednosti (a), (b), (c) to veća, što je koeficijent trenja veći, kako se i predvidjeti moglo. Iz tablice 3 i 4 pak vidi se, da se iskazane približne vrijednosti, izračunate po formuli (b), odnosno po formulama (56a), (57a), najbolje pokrivaju s točnim vrijednostima izračunatima po formuli (d), odnosno po formulama (13b), (24b) kod računanja brzine klizanja na udubljenom luku; približne vrijednosti izračunate po formuli (a), odnosno po formulama (46a) i (47a) najbolje se pokrivaju s točnim vrijednostima izračunatima po formuli (d), odnosno po formulama (37b) i (41) kod računanja brzine klizanja na izbočenom luku.

Tablica 3

$\mu$	$v_a^2 : 2rg$			
	(a)	(b)	(c)	(d)
0,05	0,00125	0,00125	0,00125	0,00126
0,10	0,00500	0,00510	0,00510	0,00506
0,15	0,01119	0,01169	0,01170	0,01153
0,20	0,01980	0,02136	0,02143	0,02088
0,25	0,03077	0,03455	0,03478	0,03340
0,30	0,04403	0,05173	0,05244	0,04951
0,35	0,05948	0,07350	0,07529	0,06970
0,40	0,07703	0,10048	0,10444	0,09456
0,45	0,09659	0,13334	0,14131	0,12488
0,50	0,11803	0,17259	0,18766	0,16155
0,55	0,14127	0,21941	0,24563	0,20566
0,60	0,16619	0,27396	0,31787	0,25846

Tablica 4

Oznaka brzine	Formula	$v_a^2 : 2rg$	Oznaka brzine	Formula	$v_a^2 : 2rg$
<i>Udubljeni luk</i>	44a (a)	0,03077	<i>Izbočeni luk</i>	46a (a)	0,03077
silazna brzina	56a (b)	0,03455	silazna brzina	58a (b)	0,02742
$\alpha_a = \tau, \alpha = 0$	56 (c)	0,03478	$\alpha_a = 0, \alpha = \tau$	58 (c)	0,02723
$v = 0, \mu = 0,25$	13b (d)	0,03400	$v = 0, \mu = 0,25$	37b (d)	0,02955
<i>Udubljeni luk</i>	45a (a)	0,09049	<i>Izbočeni luk</i>	47a (a)	0,09049
uzlazna brzina	57a (b)	0,10158	uzlazna brzina	59a (b)	0,08062
$\beta_a = 0, \beta = \tau$	57 (c)	0,10228	$\beta_a = \tau, \beta = 0$	59 (c)	0,10228
$v = 0, \mu = 0,25$	24b (d)	0,09689	$v = 0, \mu = 0,25$	41 (d)	0,08572

C) POLUMJER LUKA NA LOMU GRADIJANTE

1. *S obzirom na brzinu klizanja.* Uz dovoljno veliku brzinu kod klizanja na *izbočenom luku* može se desiti, da su uravnotežene sile, koje djeluju u normali luka, t. j. da je:  $C = Q \cos \beta$  (usp. sl. 5), odnosno  $C = Q \cos \alpha$  (usp. sl. 4). (60)

Dok ta ravnoteža postoji, reakcija podloge jednaka je ničtici; dakle i trenje je jednako ničtici, a podloge kao da i nema: samo zbog kinetičke energije i tangencijalne sile  $T = -Q \sin \beta$  tijelo uzlazi, a zbog kinetičke energije i tangencijalne sile  $T = Q \sin \alpha$  tijelo silazi u krivulji, koja ima polumjer krivosti (slijedi iz 60, za  $C = mv^2 : \rho$ ):

$$\rho = \pm \frac{v^2}{g \cos \beta}, \quad \text{odnosno} \quad \rho = \pm \frac{v^2}{g \cos \alpha}. \quad (61)$$

Kod krivulje, izbočene prema gore (u pozitivnom smjeru osi  $y$ ), u obzir dolazi negativan predznak.

Uzide li dakle teško tijelo klizeći na izbočeni luk s tolikom kinetičkom energijom, da su sile u normali luka uravnotežene, zbog tromosti ono će i dalje opisivati krivulju polumjera krivosti

$$\rho = -v^2 : g \cos \beta. \quad (61a)$$

Ako su pak sile u normali krivulje uravnotežene, kao aktivna preostaje samo tangencijalna sila  $T = -Q \sin \beta$ , koja ima negativan predznak, jer djeluje na tijelo u suprotnom smjeru gibanja (sl. 5). Ubrzanje te sile iznosi:  $a_t = -g \sin \beta$ .

Zbog tog ubrzanja općenita jednadžba brzine (4) prelazi u:

$$v dv = a_t ds = -g \sin \beta ds = -g \sin \beta \cdot \rho d\beta = v^2 \operatorname{tg} \beta d\beta$$

ili  $\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} \beta d\beta.$  (62)

Obostranim integriranjem dobivamo jednadžbu:

$$\ln v = -\ln \cos \beta + C,$$

koja također važi za brzinu  $v_a$  na nagibu  $\beta_a$ :  $\ln v_a = -\ln \cos \beta_a + C$ . Odbijanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$\ln \left( \frac{v_a}{v} \right) = \ln \left( \frac{\cos \beta}{\cos \beta_a} \right),$$

što je jedino moguće, ako je:

$$v_a \cos \beta_a = v \cos \beta. \quad (63)$$

Kako kut  $\beta$  (odnosno  $\beta_a$ ) označuje nagib tangente krivulje prema horizontali (osi apscisa  $x$ ), to je  $v \cos \beta$  (odnosno  $v_a \cos \beta_a$ ) horizontalna projekcija brzine klizanja. Zbog toga se posljednji rezultat može napisati i ovako:

$$v_{ax} = v_x. \quad (63a)$$

Iz (63) nadalje izlazi:

Ako je  $\beta < \beta_a$ , onda je  $\cos \beta > \cos \beta_a$  i  $v < v_a$  }  
 ako je  $\beta > \beta_a$ , onda je  $\cos \beta < \cos \beta_a$  i  $v > v_a$  }

Za

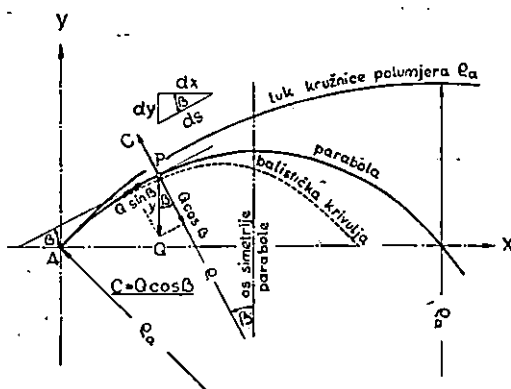
$$\beta = 0 \quad \text{je} \quad v = v_a \cos \beta_a.$$

Uostalom, na svakom je mjestu horizontalna projekcija brzine konstantna:  $v_x = v_{ax} = v_a \cos \beta_a$ .

Jednadžba polumjera krivosti krivulje (61a) s obzirom na (63) prelazi u:

$$\varrho = -\frac{v_a^2 \cos^2 \beta_a}{g \cos^3 \beta} = -\frac{v_{ax}^2}{g \cos^3 \beta} = -\frac{p}{\cos^3 \beta}; \quad p = \frac{v_{ax}^2}{g}. \quad (64)$$

Jednadžbu krivulje klizanja u slučaju ravnoteže sila u normali izvodimo ovako (usp. sl. 8): Iz snošaja:



Slika 8.

$$dx = ds \cdot \cos \beta = \varrho d\beta \cos \beta = -\frac{p d\beta}{\cos^2 \beta}$$

$$dy = ds \cdot \sin \beta = \varrho d\beta \sin \beta = -\frac{p \sin \beta d\beta}{\cos^3 \beta}$$

obostranim integriranjem:

$$\int dx = -p \int \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}; \quad \int dy = -p \int \cos^3 \beta d(\cos \beta)$$

dobivamo:

$$x = -p \operatorname{tg} \beta + C_1; \quad y = -\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} + C_2.$$

Za  $\beta = \beta_a$  neka je  $x = 0$  i  $y = 0$ . Konstante integriranja moraju onda iznositi:

$$C_1 = p \operatorname{tg} \beta_a, \quad C_2 = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta_a},$$

a posljednje jednadžbe prelaze u:

$$\begin{aligned} x &= p (\operatorname{tg} \beta_a - \operatorname{tg} \beta); & y &= \frac{p}{2} \left( \frac{1}{\cos^2 \beta_a} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) = \\ & & &= \frac{p}{2} (\operatorname{tg}^2 \beta_a - \operatorname{tg}^2 \beta). \end{aligned} \quad (65)$$

To je parametrički oblik (parametar je kut  $\beta$ ) krivulje, koju opisuje teško tijelo, ako sile, koje djeluju na nj, rezultiraju kao aktivnu – samo silu  $T = -Q \sin \beta$  u tangenti krivulje.

Da pak odredimo ordinate ( $y$ ) neposredno kao funkcije apscisa ( $x$ ) točaka ove krivulje, iznosimo najprije da je:

$$y = \frac{p}{2} (\operatorname{tg} \beta_a - \operatorname{tg} \beta) (\operatorname{tg} \beta_a + \operatorname{tg} \beta) = \frac{x}{2} (\operatorname{tg} \beta_a + \operatorname{tg} \beta),$$

zatim, da je:  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_a - \frac{x}{2}$ , odakle konačno slijedi:

$$y = x \left( b - \frac{x}{2p} \right), \text{ ako kratkoće radi } \left. \vphantom{y = x \left( b - \frac{x}{2p} \right)} \right\} \quad (66)$$

stavljamo:  $b = \operatorname{tg} \beta_a, \quad p = \frac{v_{ax}^2}{g} = \frac{v_a^2}{g} \cdot \cos^2 \beta_a,$

(65) i (66) određuju iz mehanike poznatu krivulju: parabolu *kosog hica*. Teško tijelo na klizini izbočenoj u luk kružnice nastoji dakle opisivati parabolu kosog hica, ako sile, koje djeluju na nj, u normalni luka rezultiraju rezultantu jednaku ničtici.

Podaci, koji slijede, olakšavaju konstrukciju te parabole (66): Ishodište horizontalno-vertikalnog sustava ( $x, y$ ) leži u točki ( $A$ ; sl. 9), u kojoj tangenta parabole ima nagib  $\beta_a$  i polumjer krivosti iznosa (64):  $|e_n| = v_a^2 : g \cos \beta_a$ .

U vrhu parabole ( $V$ ) je  $\beta_v = 0$  i  $|e_n| = p = v_{ax}^2 : g$ .

Parabola siječe os apscisa u točki  $A$  ( $x=0, y=0$ ) i u točki  $A'$  ( $x=2bp, y=0$ ).

Dužina polovice tetive je dakle  $\frac{1}{2} AA' = AS = SA' = bp$ .

Za  $x_v = bp$  je  $y_v = \frac{1}{2} b^2 p$  (koordinate vrha parabole  $V$ ).

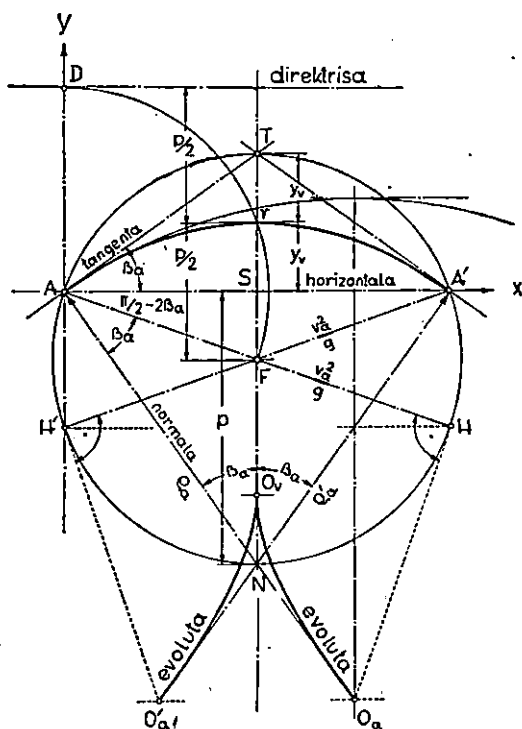
Polumjer krivosti u točki  $A$  konstruira se ovako: U točki  $A$  postavimo normalu  $ANO_a$  na tangentu  $AT$  zadanog nagiba prema horizontali  $\beta_a$ . Povučemo pravac  $AFH$  pod kutom  $\beta_a$  prema normali  $ANO_a$ . Na taj pravac nanesimo dužinu  $AH = v_a^2 : g$ . U točki  $H$  postavimo okomicu na pravac  $AH$ . Ta okomica siječe na normali točku  $O_a$ , a to je središte kružnice krivosti parabole u točki  $A$ . Polumjer je te kružnice  $e_a = O_a A$ , jer je u tom slučaju zaista  $\cos \beta_a = AH : O_a A = v_a^2 / g : e_a$  ili  $e_a = v_a^2 : g \cos \beta_a$ .

Žarište  $F$  leži na simetrali parabole od vrha  $VF = \frac{1}{2}p$  daleko. U istoj udaljenosti od vrha leži i direktrisa parabole usporedno s osi apscisa. Dužina subnormala je  $SN = p$ , a dužina subtangente je  $ST = 2y_v = b^2/p$ .

U točki  $A$  važi

$$AF = AD = \frac{p}{2} + y_v = \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g}$$

(temeljna definicija parabole).



Slika 9.

Kako je pak

$$FT = \frac{p}{2} + y_v = \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g}, \text{ a } TN = p + 2y_v.$$

to je i

$$FN = TN - FT = \frac{p}{2} + y_v = \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g}.$$

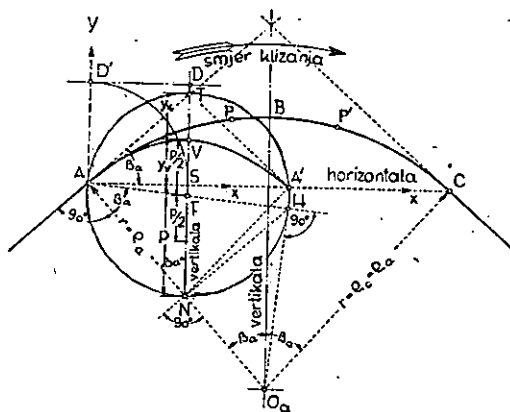
Žarište  $F$  je dakle središte kružnice polumjera

$$AF = \frac{p}{2} + y_v = \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g} = A'F,$$

na kojoj leže glavne točke:  $A$ ,  $T$ ,  $A'$ ,  $H$ ,  $N$  i  $H'$  koje pobliže određuju parabolu (65), odnosno (66).

U svakoj točki zbiljnog izbočenog luka sile, koje djeluju u normalni luka, mogu rezultirati rezultantu jednaku ničici, ako polumjer tog luka zadovoljava jednadžbu (61a):  $|r| = v^2 : g \cos \beta$ . Nije li to tako, t. j. ako je  $|r| < v^2 : g \cos \beta$ , krivost izbočenog luka klizine *veća* je od krivosti parabole kosog hica; teško tijelo ne će slijediti izbočeni luk klizine, nego će se izdignuti s podloge, a težište zbog velike kinetičke energije tijela opisivat će parabolu nad tom podlogom. Obrnuto, ako je  $|r| > v^2 : g \cos \beta$ , krivost izbočenog luka klizine je *manja* od krivosti parabole kosog hica, a podloga klizine primorat će teško tijelo, da ne slijedi tu parabolu, nego izbočeni luk klizine nad parabolom.

Iz formule (61a) vidi se, da je iznos polumjera krivosti to veći, što je brzina klizanja veća i što je veći nagib vektora te brzine prema horizontali. Zbog toga za iznos polumjera bit će mjerodavna ona točka izbočenog luka, u kojoj je brzina klizanja i nagib tangente najveći. Ta točka leži u smjeru klizanja na početku luka pred



Slika 10.

lomom gradijante (točka A, sl. 10) ili na kraju luka iza loma gradijante (točka P, sl. 11), već prema veličini nagiba gradijante i brzine klizanja u tim točkama. U mjerodavnoj točki treba pak odrediti polumjer izbočenog luka kružnice  $r$  tako, da je veći od polumjera krivosti parabole  $q$ :

$$r = kq = k \frac{v^2}{g \cos \beta} \quad (67)$$

Koeficijent sigurnosti  $k$  neka je po mogućnosti velik, neka se kreće p. p. u granicama  $1 < k < 2$ , a iznos polumjera neka je zaokružen broj.

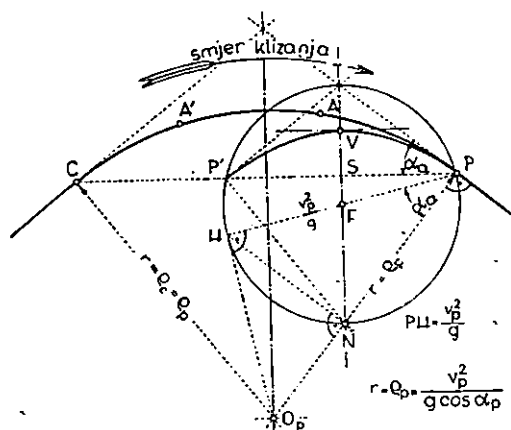
Zavedenje koeficijenta sigurnosti je potrebno, da ne bude ni u jednoj točki luka ni za čas reakcija podloge jednaka ničici. Na-

suprot u svakoj točki i u svakom času neka postoji komponenta u normali, koja će pritiskivati teško tijelo na podlogu. Uz premleni takav pritisak lako se dogodi, da zbog kakve slučajne smetnje ili nepravilnosti drvo iskoči iz klizine. Može se desiti i to, da drvo rotira oko vlastite težišne osi kod klizanja. Ono se onda ponaša poput zvrka, a krivulja gibanja zvrka je manje krivosti od krivosti kosog hica.

Zapravo, zbog otpora zraka težište teškog tijela ne nastoji opisivati teorijsku parabolu kosog hica ni onda, kad je reakcija podloge jednaka ničiti, nego t. zv. balističku krivulju:

$$y = x \operatorname{tg} \beta_a - \frac{gx^2}{2 \cos^2 \beta_a} \left( \frac{1}{v_a^2} + z \cdot x \right). \quad (68)$$

Koeficijent otpora zraka  $z$  zavisi o obliku i o izmjerama tijela, o položaju tijela prema smjeru gibanja, dakle i o samoj klizini,



Slika 11.

zatim o početnoj brzini  $v_a$  i o nagibu  $\beta_a$  njezinog vektora prema horizontali. Taj se koeficijent može odrediti samo empirički, i to za svaki sortiment drva zasebno. Kod eksperimenta treba izmjeriti kut  $\beta_a$ , dužinu  $x > 0$  za  $y = 0$  i izračunati  $z$  iz (68). Kako je balistička krivulja uostalom veće krivosti od parabole kosog hica, nismo je niti ćemo je u daljem radu upotrebiti u naše svrhe (usp. sl. 8).

2. *S obzirom na konstrukciju klizine.* Polumjer luka kružnice na lomu gradijante ne zavisi samo od brzine klizanja i od nagiba gradijante, nego i od konstrukcije same klizine.

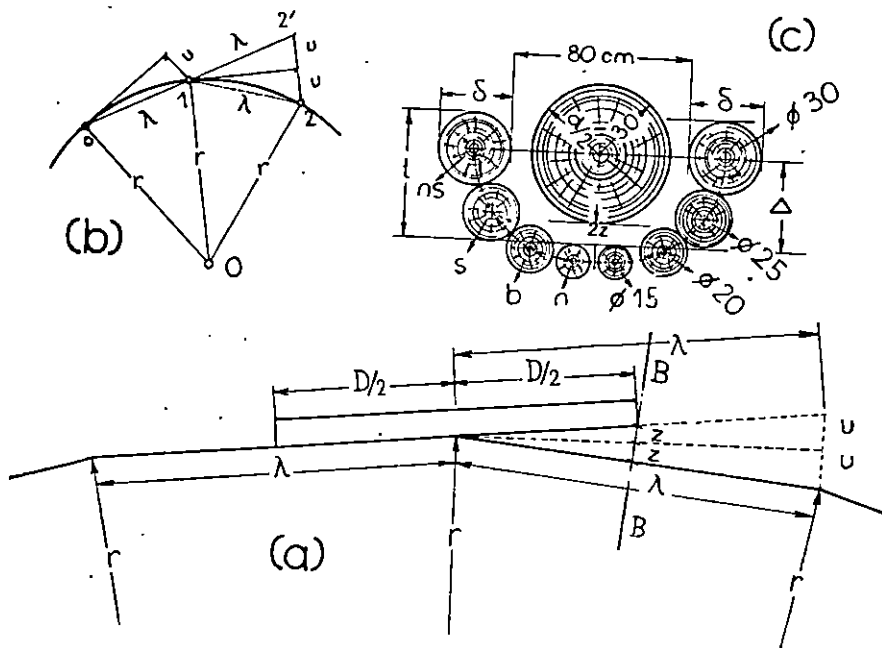
Drveno točilo na pr., u luku na lomu gradijante, složeno je od 4 do 8 m dugih žljebova, a ti su zbiti od isto tako dugih i ravnih oblika. Zbog toga gradijanta na lomu nagiba i nije luk, nego



tetivni mnogokut  $\lambda$  dugih stranica (sl. 12). Svaka produžena tetiva čini s idućom tetivom trokut  $(1, 2, 2')$ ; a taj je sličan trokutu  $(1, 0, 2)$ , koji čine polumjeri luka s tetivom (sl. 12b). Iz sličnosti tih trokuta pak izlazi razmjer  $2u : \lambda = \lambda : r$ , koji određuje podnicu tetivnog trokuta, dužinu

$$2u = \lambda^2 : r. \quad (69)$$

Na sl. 12a nacrtano  $D$  dugo oblo drvo stiglo je sa svojim polovištem upravo na vrh tetivnog poligona, koji čine dva susjedna odsječka drvenog točila na lomu nagiba. S jednom polovicom p. p.



Slika 12.

leži to drvo još na dnu jednoga, a s drugom polovicom nad dnom susjednog žlijeba u labilnom položaju. Neka  $2z$  označuje visinu, kojom se prednji kraj drva izdignuo nad dno točila. Iz sličnosti trokuta dobivamo onda razmjer:

$$z : \frac{1}{2}D = u : \lambda \quad \text{ili} \quad 2z = uD : \lambda,$$

koji s obzirom na (69) prelazi u:

$$2z = \lambda D : 2r \quad \text{ili} \quad u 2r = \lambda D : 2z. \quad (70)$$

Stijene točila treba da sprovode drvo, koje klizi (promjera  $d$ ) i na izbočenom luku gradijante. Uspješno će pak sprovoditi, ako su

braniči (*b*, sl. 12c) osedlani sedlicama (*s*) i nasedlicama (*ns*) tako, do sprovodna dubina točila iznosi:

$$\Delta = 2z + \frac{1}{2}d. \text{ Dakle je: } 2z = \Delta - \frac{1}{2}d. \quad (71)$$

Označuje li *t* najveću dubinu, a  $\delta$  promjer najgornje oblice točila, onda je sprovodna dubina također

$$\Delta = t - \delta/2. \quad (72)$$

Kod točila na pr. predočenog na sl. 12c je  $t = 55$  cm,  $\delta = 30$  cm, dakle sprovodna dubina  $\Delta = 55 - 15 = 40$  cm. Drvo, koje klizi, ima promjer  $d = 60$  cm; dakle je  $2z = 40 - 30 = 10$  cm.

Ima točila različnih vrsta i dimenzija. Pritom su izmjere točila udešene prema izmjerama, naročito prema promjeru sortimenata, koji će se otpremati. Ta i razlikujemo laka, srednje teška i teška točila. No što je veći promjer sortimenta (*d*), potrebna je veća dubina točila (*t*) i jače oblice ( $\delta$ ) za nj. Poradi toga će dati formula (71) i za sva ostala točila prilično jednaki rezultat kao u gornjem primjeru  $2z = 10$  cm. Uz tu pak vrijednost i  $\lambda = 4$  m iz (70) dobivamo:  $2r = 400 D : 10$  ili  $r = 20 D$ .

Uzimamo li još i koeficijent sigurnosti u račun sa  $s = 1,5$ , konačno dobivamo iz konstrukcije točila kao minimalnu vrijednost za polumjer izbočenog luka gradijante:

$$r_{\min} \doteq 30 D. \quad (73)$$

Uvođenje koeficijenta sigurnosti potrebno je, jer  $2z = 10$  cm važi kao neka osrednja vrijednost, koja nešto varira ne samo s konstrukcijom točila nego i s dužinom drva *D*, koje se otprema. Osim toga niti se točilo sastoji od savršeno oblog drva, niti je savršeno pravilno izrađeno. Isto tako nije ni drvo, koje klizi, savršeno ravno ni oblo. Od kakve nepravilnosti oblika ili izrade može nastati impuls, zbog kojega drvo poskoči možda i toliko, da se više i ne vrati u točilo. Iz tih razloga, kako smo upozorili već i prije, potrebno je osedlati braniče sedlicama i nasedlicama i u lukovima na lomovima gradijante, kao što se to čini u lukovima na lomovima trase zbog centrifugalne sile.

Iz (73) proizlazi onda, da minimalni polumjeri izbočenog luka gradijante kod drvenog točila, izrađenog iz oblica, za otpremanje *D* dugog oblog drva iz *konstruktivnih* razloga treba da iznosi:

$D =$	4	6	8 m
$r_{\min} =$	120	180	240 m

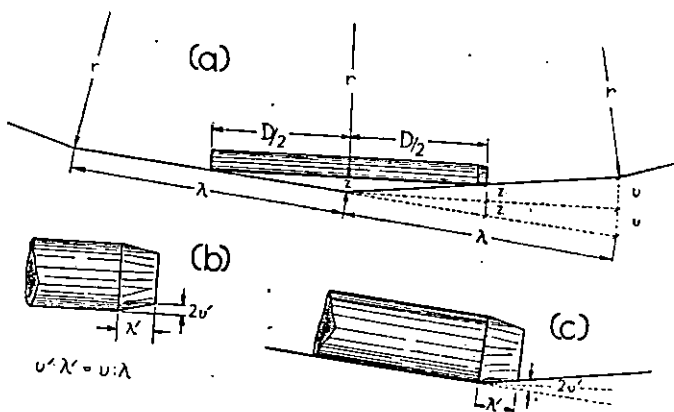
Vrijednosti pak takva polumjera prema brzini klizanja, izračunate po formuli (67), dolaze u obzir samo kad *premašuju* iznose, izračunate po formuli (73). Ova konstruktivna pravila važe za sva drvena točila, izrađena od oblica: laka, srednje teška i teška, bila ona suha, ovlažena, osnježena ili oledena. Izuzetak čini prvi izbočeni

luk gradijante, odmah iza početka (usta) točila. Kako je ovdje još brzina klizanja mala, a i postavljeni radnici rukovode drvom, moći će se i smanjiti polumjer na neko 100 m (prema dosadašnjoj praksi).

Kod drvenih točila, koja imaju u prijesjeku oblik slova V, zbog jačeg kočnog djelovanja, pa kod putoklizina i onda, kad su im braniči osedlani, zbog manje sprovodne dubine umjesto formule (73) bolje će poslužiti formula:

$$r_{\min} = 35 D. \quad (74)$$

za određivanje minimalnog polumjera izbočenog luka gradijante iz konstruktivnih obzira. Uz veće i velike brzine klizanja osim toga bit će potrebno istražiti iznos tog polumjera i po formuli (67).



Slika 13.

Udubljeni luk na lomu gradijante drvenog točila također je tetivni poligon luka kružnice (sl. 13a). Oblo drvo, ako klizi bez zaruba, kad stigne do stika dvaju odsječaka, zbog kinetičke energije prednjim krajem udari i časovito zapne o dno prednjeg, a stražnji kraj izdigne nad dno stražnjeg odsječka točila. Svladavši otpor dna, krené li drvo dalje, stražnjim se krajem opet vraća u točilo, i to obično snažnim udarcem. Ta se pojava, iako u manjoj mjeri, viđa i onda, kad je prednji kraj drva zarubljen. Poradi toga obično i brže propada točilo na udubljenom lomu gradijante. Smetnje i štetne posljedice su zbog te pojave to veće, što je krivost luka i brzina klizanja veća. Pomno izrađeni i zaobljeni zarub na prednjem kraju drva, koje klizi, znatno smanjuje te smetnje i te štetne posljedice. No da bude od koristi, omjer visine ( $2u'$ ) i dužine zaruba ( $\lambda'$ ) treba da iznosi najmanje  $2u' : \lambda$  (sl. 13 b i c).

Dno putoklizine obloženo je poprečnim pragovima u primjerenim razmacima i nastorom prikladnog tla među pragovima. I kod putoklizine kod klizanja na udubljenom luku opažaju se opisane

pojave i smetnje, i to zbog pragova. I tu je potreban zarub i luk po mogućnosti velikog polumjera, da se smanje te smetnje i štetne posljedice, zatim su za sprovođenje drva potrebni i ošedlani braniči.

Poradi toga polumjer *udubljenog luka* na lomu gradijante drvenih točila i putoklizina iz konstruktivnih razloga neka ne bude manji od iznosa definiranog formulom (74).

#### D) UZDUŽNI PROFIL (KOČNE) GRADIJANTE

Da se lakše i preglednije izvrši dinamički račun, koji će istražiti sposobnost rada klizine, potrebno je svrsishodno izraditi nacrt, t. j. uzdužni profil klizine na potezu kočne gradijante.

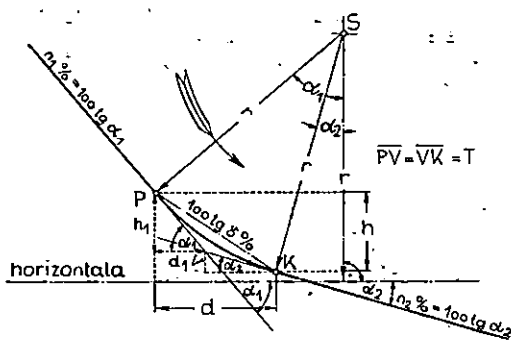
1. *Geometrijski elementi gradijante su ovi.* Ako je gradijanta pravac dužine  $s$ , horizontalna i vertikalna je projekcija tog pravca (sl. 7a):

$$d = s \cdot \cos \alpha, \quad h = -s \cdot \sin \alpha. \quad (75a)$$

Negativni predznak vertikalne projekcije znači, da pravac  $s$  pada prema horizontali pod kutom  $\alpha$ .

Uspinje li se pravac  $s$  pod kutom  $\beta$  prema horizontali, obje su mu projekcije pozitivne:

$$d = s \cdot \cos \beta, \quad h = s \cdot \sin \beta. \quad (75b)$$



Slika 14.

Padaju li obje susjedne stranice poligona prema horizontali u smjeru klizanja, a nagib stražnje stranice je veći od nagiba prednje stranice ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ) za prelaženje iz jednog nagiba u drugi nagib, potreban je *udubljeni luk* polumjera  $r$  (sl. 14). Projekcije su toga luka:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalna} \quad d = r (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \\ \text{vertikalna} \quad h = r (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \end{array} \right\} \quad (76)$$

Kako je  $\cos \alpha_2 > \cos \alpha_1$ , projekcija  $h$  je negativna, jer gradijanta pada od početka prema kraju luka. Obje tangente luka  $T = \overline{PU} = \overline{UK}$  zajedno daju istu projekciju:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalnu } d = d_1 + d_2 = T (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \\ \text{i vertikalnu } h = -(h_1 + h_2) = -T (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \end{array} \right\} \quad (77)$$

Iz (76) i (77) dobivamo onda dužinu tangente:

$$T = \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} r = -\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} r. \quad (78)$$

Za kontrolu može poslužiti i jednadžba:

$$T = r \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (78a)$$

Tangenta  $T = \overline{PU}$  stražnje stranice ima projekcije:

$$d_1 = T \cdot \cos \alpha_1, \quad h_1 = -T \cdot \sin \alpha_1, \quad (79a)$$

a tangenta  $T = \overline{UK}$  prednje stranice:

$$d_2 = T \cdot \cos \alpha_2, \quad h_2 = -T \cdot \sin \alpha_2, \quad (79b)$$

Nagib tetive luka  $PK$  iznosi (iz 76 i 77):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{d} = \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2} = -\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}. \quad (80)$$

Negativan predznak znači, da tetiva pada u smjeru klizanja

*Primjer 6.* (usp. sl. 18 i 19). Zadano je  $r = 250$  m,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,25$  i  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0$ . Onda je  $\sin \alpha_1 = 0,24253$ ;  $\cos \alpha_1 = 0,97014$ .

Iz (78)

$$T = -250 \frac{0,97014 - 1}{0,24253} = 30,778 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Iz (76) projekcije luka: } \quad d &= 250 \cdot 0,24253 = 60,633 \text{ m} \\ h &= 250 \cdot (0,97014 - 1) = -7,465 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Projekcije tangente (79a) } \quad d_1 &= 30,778 \cdot 0,97014 = 29,859 \text{ m} \\ h_1 &= -30,778 \cdot 0,24253 = -7,464 \text{ m.} \end{aligned}$$

Nagib tetive luka (80)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \alpha_1 - 1}{\sin \alpha_1} = \frac{0,97014 - 1}{0,24253} = -0,123 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1.$$

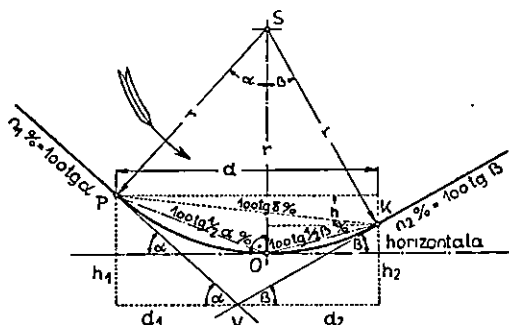
Pada li stražnja stranica poligona pod kutom  $\alpha$ , a prednja se stranica uspinje pod kutom  $\beta$  prema horizontali u smjeru klizanja, potreban je udubljeni luk polumjera  $r$ , na kojem drvo djelomično

silazi (do točke  $O$ , sl. 15), a djelomično uzlazi kod klizanja. Projekcije su tog luka:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalna: } d = r (\sin \alpha + \sin \beta) \\ \text{vertikalna: } h = r (\cos \alpha - \cos \beta), \end{array} \right\} \quad (81)$$

Obje tangente luka:  $T = \overline{PU} = \overline{VK}$  zajedno daju iste projekcije:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalnu: } d = T (\cos \alpha + \cos \beta) \\ \text{vertikalnu: } h = T (\sin \beta - \sin \alpha). \end{array} \right\} \quad (82)$$



Slika 15.

Vertikalna projekcija  $h$  može biti pozitivna, negativna, a i jednaka ničiti; predznak zavisi o visinskom razmaku početka (točka  $P$ ) i svršetku (točka  $K$ ) luka. Iz (81) i (82) dobivamo dužinu tangente:

$$T = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} r = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta - \sin \alpha} r. \quad (83)$$

Za kontrolu može poslužiti i jednačba:

$$T = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta). \quad (83a)$$

Tangenta  $T = \overline{PU}$  stražnje stranice ima projekcije:

$$d_1 = T \cdot \cos \alpha, \quad h_1 = -T \cdot \sin \alpha, \quad (84a)$$

a tangenta  $T = \overline{VK}$  prednje stranice:

$$d_2 = T \cdot \cos \beta, \quad h_2 = T \cdot \sin \beta. \quad (84b)$$

Nagib tetive  $\overline{PK}$  iznosi (iz 81 i 82):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{d} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}. \quad (85)$$

Projekcije su tetive  $\overline{PO}$ :

$$d'_1 = r \cdot \sin \alpha, \quad h'_1 = -r (1 - \cos \alpha), \quad (86)$$

a njezin nagib iznosi:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{h'_1}{d'_1} = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{tg}^{1/2} \alpha. \quad (87)$$

Projekcije su tetive  $\overline{OK}$ :

$$d'_2 = r \cdot \sin \beta, \quad h'_2 = r (1 - \cos \beta), \quad (88)$$

a njezin nagib iznosi:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{h'_2}{d'_2} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{tg}^{1/2} \beta. \quad (89)$$

*Primjer 7* (usp. sl. 18 i 19). Zadano je  $r = 300$  m;  $\operatorname{tg} \alpha = 0,40$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 0,15$ . Onda je  $\sin \alpha = 0,37139$ ;  $\sin \beta = 0,14834$ ;  $\cos \alpha = 0,92848$ ;  $\cos \beta = 0,98894$ .

Iz (81)  $d = (0,37139 + 0,14834) 300 = 155,920$  m.

$h = (0,92848 - 0,98894) 300 = -18,138$  m.

Iz (83):

$$T = \frac{0,92848 - 0,98894}{0,14834 - 0,37139} 300 = 81,318 \text{ m.}$$

Kontrola (83a):

$$\alpha + \beta = 21^\circ 48' 05'' + 8^\circ 31' 51'' = 30^\circ 19' 56''; \quad \left| \frac{1}{2} \right| (\alpha + \beta) = 15^\circ 9' 58''$$

$$\operatorname{tg}^{1/2} (\alpha + \beta) = 0,27106; \quad T = 300 \cdot 0,27106 = 81,318 \text{ m.}$$

Iz (84a):

$$d_1 = 81,318 \cdot 0,92848 = 75,502 \text{ m}$$

$$h_1 = -81,318 \cdot 0,37139 = -30,201 \text{ m.}$$

Iz (84b):

$$d_2 = 81,318 \cdot 0,98894 = 80,419 \text{ m}$$

$$h_2 = 81,318 \cdot 0,14834 = 12,063 \text{ m.}$$

Iz (85) nagib tetive  $\overline{P_1 K_1}$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{0,92848 - 0,98894}{0,37139 + 0,14834} = -0,11632.$$

Tetiva pada od početka prema kraju luka.

Projekcija tetive  $P_1 O_1$  iz (86):

$$d'_1 = 300 \cdot 0,37139 = 111,417 \text{ m}; \quad h'_1 = -300 (1 - 0,92848) = -21,457 \text{ m,}$$

a njezin nagib

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = -\frac{1 - 0,92848}{0,37139} = -0,1926 = -\operatorname{tg}^{1/2} \alpha.$$

Projekcije tetive  $\overline{OK} = 23$  iz (88)

$$d'_2 = 300 \cdot 0,14834 = 44,513 \text{ m}; \quad h'_2 = 300 (1 - 0,98894) = 3,319 \text{ m.}$$

Nagib te tangente iznosi

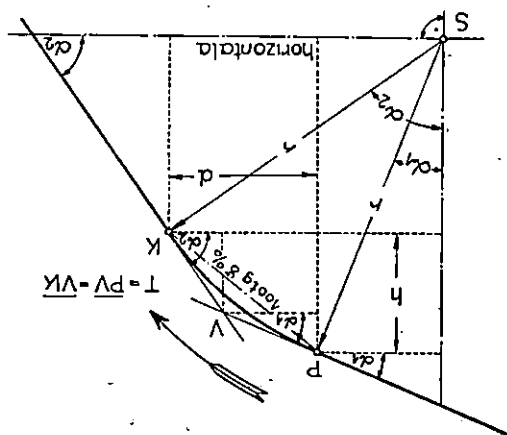
$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{1 - 0,98894}{-0,14834} = 0,0745 = \operatorname{tg}^{1/2} \beta.$$

Padaju li obje susjedne stranice prema horizontali u smjeru klizanja, a nagib stražnje stranice je manji od nagiba prednje stranice ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), za prelazenje potreban je izbočeni luk polumjera  $r$  (sl. 16). Projekcije su tog luka:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalna} \quad d = r (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \\ \text{vertikalna} \quad h = r (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{array} \right\} \quad (90)$$

Obje tangente luka  $T = \overline{P\bar{U}} = \overline{U\bar{K}}$  zajedno daju iste projekcije:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalnu} \quad d = T \cdot (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \\ \text{vertikalnu} \quad h = -T \cdot (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \end{array} \right\} \quad (91)$$



Slika 16.

Iz (90) i (91) dobivamo onda dužinu tangente:

$$T = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} r = - \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} r = r \operatorname{tg}^{1/2} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (92)$$

Tangenta  $T = \overline{P\bar{U}}$  stražnje stranice ima projekcije:

$$d_1 = T \cdot \cos \alpha_1, \quad h_1 = -T \cdot \sin \alpha_1, \quad (93a)$$

a tangenta  $T = \overline{U\bar{K}}$  prednje stranice:

$$d_2 = T \cdot \cos \alpha_2, \quad h_2 = -T \cdot \sin \alpha_2, \quad (93b)$$

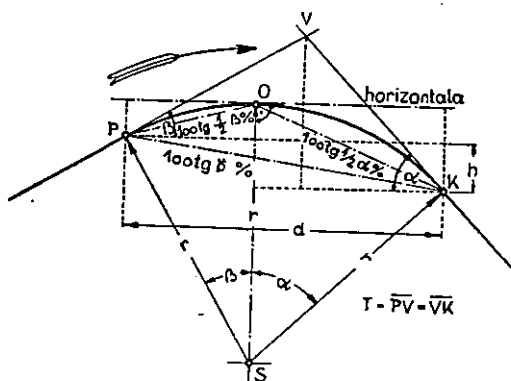
Nagib tetive luka  $PK$  iznosi:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{d} = \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1} = - \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}. \quad (94)$$



Uspinje li se prema vrhu  $U$  stražnja stranica poligona gradijante pod kutom  $\beta$  prema horizontali, a prednja stranica pada pod kutom  $\alpha$ , za prelaženje potreban je izbočeni luk polumjera  $r$  (sl. 17). Projekcije su tog luka:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalna: } d = r \cdot (\sin \alpha + \sin \beta) \\ \text{vertikalna: } h = r (\cos \alpha - \cos \beta). \end{array} \right\} \quad (95)$$



Slika 17.

Iste te projekcije imaju i obje tangente  $T = \overline{PU} = \overline{UK}$  zajedno:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontalnu } d = T \cdot (\cos \alpha + \cos \beta) \\ \text{vertikalnu } h = T \cdot (\sin \beta - \sin \alpha) \end{array} \right\} \quad (96)$$

Vertikalna projekcija  $h$  može biti pozitivna, negativna, a i jednaka ničici, već prema visinskom razmaku početka ( $P$ ) i kraja luka ( $K$ ). Iz (95) i (96) izlazi dužina tangente:

$$T = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} r = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta - \sin \alpha} r = r \cdot \operatorname{tg}^{1/2} (\alpha + \beta). \quad (97)$$

Projekcije su tangente  $PU$  stražnje stranice:

$$d_1 = T \cdot \cos \beta, \quad h_1 = T \cdot \sin \beta, \quad (98a)$$

Projekcije su tangente  $UK$  prednje stranice:

$$d_2 = T \cdot \cos \alpha, \quad h_2 = -T \cdot \sin \alpha. \quad (98b)$$

Nagib tetive  $\overline{PK}$  iznosi:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{d} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}. \quad (99)$$

Projekcije su tetive  $\overline{PO}$ :

$$d'_1 = r \cdot \sin \beta, \quad h'_1 = r (1 - \cos \beta), \quad (100)$$

a njezin nagib je:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{h'_1}{d'_1} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{tg}^{1/2} \beta. \quad (101)$$

Projekcije su tetive  $\overline{OK}$ :

$$d'_2 = r \cdot \sin \alpha, \quad h'_2 = -r (1 - \cos \alpha), \quad (102)$$

a njezin nagib je

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{h'_2}{d'_2} = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{tg}^{1/2} \alpha. \quad (103)$$

*Primjer 8* (usp. sl. 18 i 19). Zadano je  $r = 250$  m,  $\operatorname{tg} \beta = 0,15$  i  $\operatorname{tg} \alpha = 0,25$ .  
Onda je

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 0,14834, & \sin \alpha &= 0,24253 \\ \cos \beta &= 0,98894, & \cos \alpha &= 0,97014. \end{aligned}$$

Iz (95)

$$\begin{aligned} d &= 250 (0,24253 + 0,14834) = 97,7185 \text{ m}, \\ h &= 250 (0,97014 - 0,98894) = -4,699 \text{ m}. \end{aligned}$$

Iz (97)

$$T = \frac{0,97014 - 0,98894}{0,14834 - 0,24253} 250 = 49,885 \text{ m}.$$

Iz (98a)

$$\begin{aligned} d_1 &= 49,885 \cdot 0,98894 = 49,333 \text{ m} \\ h_1 &= 49,885 \cdot 0,14834 = 7,400 \text{ m}. \end{aligned}$$

Iz (98b)

$$\begin{aligned} d_2 &= 49,885 \cdot 0,97014 = 48,396 \text{ m} \\ h_2 &= -49,885 \cdot 0,24232 = -12,099 \text{ m} \end{aligned}$$

Iz (99)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{d} = \frac{0,97014 - 0,98894}{0,24253 + 0,14834} = -0,04808.$$

Iz (100)

$$\begin{aligned} d'_1 &= 250 \cdot 0,14834 = 37,085 \text{ m} \\ h'_1 &= 250 (1 - 0,98894) = 2,766 \text{ m}. \end{aligned}$$

Iz (101)

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{1 - 0,98894}{0,14834} = 0,07458.$$

Iz (102)

$$\begin{aligned} d'_2 &= 250 \cdot 0,24253 = 60,633 \text{ m} \\ h'_2 &= -250 (1 - 0,97014) = -7,465 \text{ m}. \end{aligned}$$

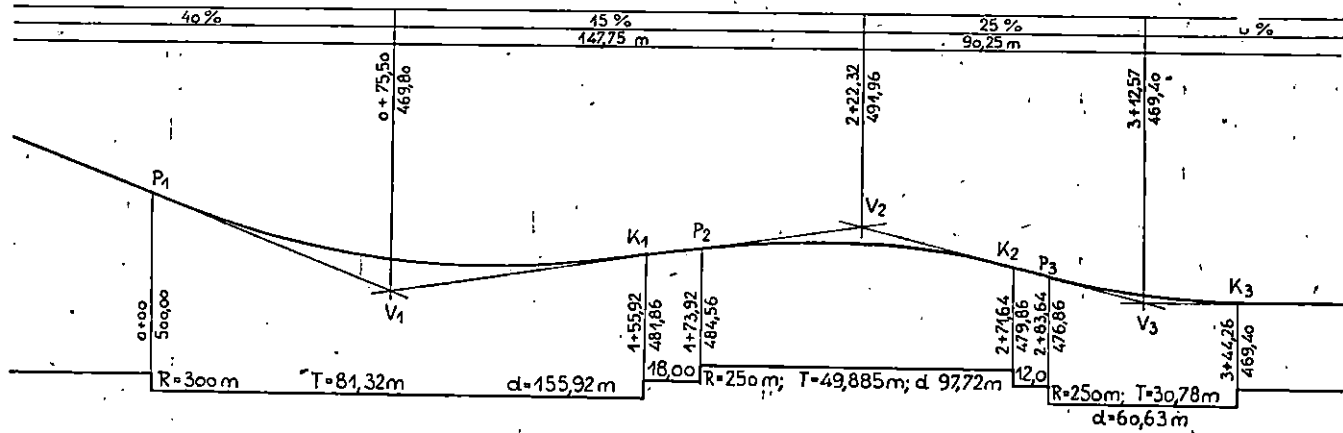
Iz (103)

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{1 - 0,97014}{0,24253} = -0,12311.$$

Na temelju ovih geometrijskih podataka konstruiramo poligon gradijante i zatim tetivni poligon gradijante kako slijedi.

2. *Poligon gradijante* je zapravo uzdužni profil klizine u njezinu kočnom dijelu (usp. sl. 18). Sastoji se od stranica, koje se lome u

Poligon gradijante (Uzdužni profil klizine)



Slika 18.

vrhovima  $U_1, U_2, U_3 \dots$ . Kako su nagibi klizina znatni, nanesene su dužine i visine, apscise i ordinate u poligonu gradijante i u tetivnom poligonu svrsishodno u istom mjerilu. U gornjem dijelu nacрта poligona gradijante nalaze se označeni nagibi pojedinih stranica i dužine njihovih horizontalnih projekcija. Kroz svaki vrh poligona povučena je vertikala, a uz gornji kraj te vertikale napisane brojke označuju apscisu i ordinatu vrha ( $U$ ), t. j. loma gradijante. U donjem dijelu nacрта, uz običajnu shematsku oznaku ubilježene su brojke, koje određuju apscise i ordinate početka ( $P$ ) i kraja ( $K$ ), zatim iznos polumjera ( $R$ ) i tangente ( $T$ ) i dužinu ( $d$ ) svakog luka. Isto su tako označene i dužine pravaca među lukovima.

Među lukovima stranice  $V_1V_2$  nalazi se pravac  $s = 18,20$  m dug s horizontalnom i vertikalnom projekcijom  $d = 18,0$  m,  $h = 2,70$  m. U vezi s primjerom 7. i 8. dužina te stranice iznosi:

$$V_1V_2 = 81,318 + 18,201 + 49,885 = 149,404 \text{ m.}$$

Njeziná horizontalna projekcija iznosi  $149,404 \cdot 0,98894 = 147,751$  m, a vertikalna  $147,751 \cdot 0,15 = 22,163$  m. Kao kontrola služe podaci iz rečenih primjera za horizontalnu projekciju te stranice:  $80,419 + 18,0 + 49,332 = 147,751$  m, a za vertikalnu:  $12,063 + 2,700 + 7,400 = 22,163$  m.

U nacrtu su izmjerne dužina zaokružene na cm.

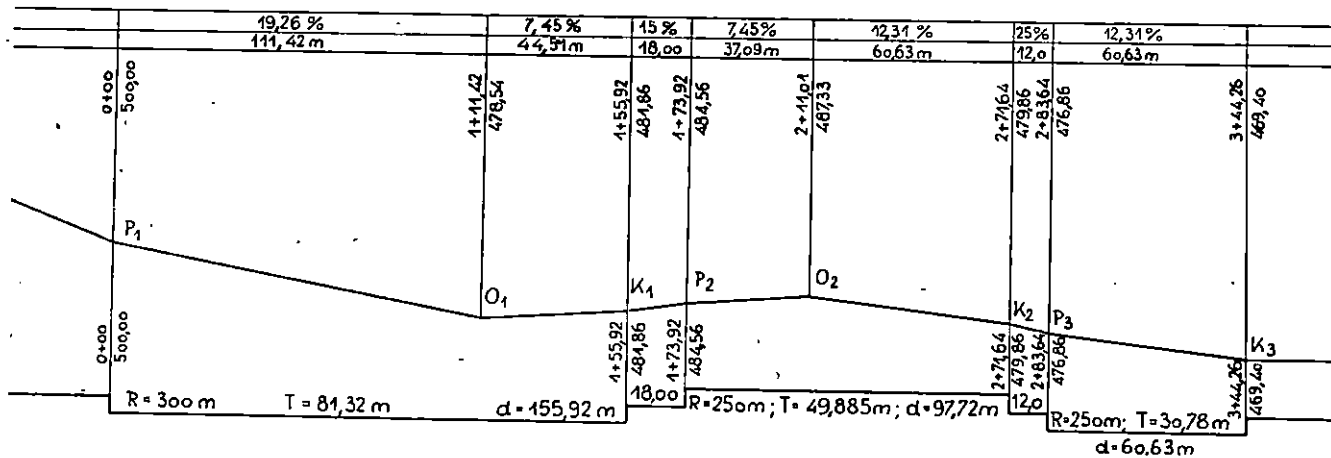
Na slici, da bude jasnija, izostavljena je crta tla i kote tla.

3. *Tetivni poligon gradijante* (sl. 19). U tom nacrtu tetive zamjenjuju lukove. U gornjem dijelu nacрта nalaze se upisane apscise i ordinate točaka lomova  $P_1, O_1, K_1, P_2, \dots$ , zatim nagibi i dužine pojedinih stranica tog poligona. U donjem dijelu nacрта iskazani su podaci o lukovima, kao prijašnjem poligonu gradijante. Po pravilu samo po jedna tetiva zamjenjuje luk, koji se prislanja na susjedne silazne ili uzlazne stranice, a po dvije tetive zamjenjuju luk, koji se prislanja na silaznu i susjednu uzlaznu stranicu (na pr. tetiva  $\overline{P_3K_3}$ ) ili obrnuto na uzlaznu i susjednu silaznu stranicu. Ako dvije stranice zamjenjuju luk (na pr.  $P_1O_1$  i  $O_1K_1$ , pa  $P_2O_2$  i  $O_2K_2$ ), one se sijeku u točki luka, u kojoj je tangenta horizontalna (na pr. točke  $O_1$  i  $O_2$ ). Slika 19 izrađena je poput slike 18 na temelju podataka izračunatih u primjerima 6, 7 i 8.

## E) DIJAGRAM BRZINA KLIZANJA I ISTRAŽIVANJE RADNE SPOSOBNOSTI KLIZINE

Da se može prosuditi radna sposobnost klizine, potrebno je odrediti dijagram brzine klizanja za dvije granične vrijednosti koeficijenta trenja. Te dvije vrijednosti neka su odabrane tako, da se među njima nalaze predvidljive vrijednosti koeficijenta trenja zbiljne klizine. Za račun pak i za crtanje dijagrama brzina klizanja neposredno nam služi tetivni poligon gradijante.

### Tetivni poligon gradijante



Slika 19.

U primjeru, koji slijedi, ispitujemo radnu sposobnost kočne gradijante neke klizine u intervalu koeficijenta trenja  $0,25 \leq \mu \leq 0,30$ . U tom intervalu naime p. p. leže srednje vrijednosti koeficijenta trenja šumskih klizina. Najprije odredujemo dijagrame brzina uz vrijednost  $\mu=0,25$ , a onda uz vrijednost  $\mu=0,30$ . Brzine pak računamo po približnim i po točnim formulama. Na taj se način iz dijagrama može vidjeti, koliko odmiču približne od točnih vrijednosti brzina.

Za prvu približnost iskorišćujemo pod točkom B) 1. utvrđenu činjenicu: Ne uzimamo li u račun utjecaj centrifugalne sile, promjena brzine klizanja odvija se na udubljenom i izbočenom luku gradijante, kao da i ne klizi teško tijelo na tim lukovima nego na tetivama tih lukova. Uz tu pretpostavku možemo dakle računati brzinu klizanja na tetivama lukova kao i na pravcima, koji silaze, po formuli (usp. 44a, 46a i 48):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} - (\mu d - h), \quad (104)$$

a na tetivama lukova kao i na pravcima, koji uzlaze, po formuli (usp. formule 45a, 47a i 49):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} - (\mu d + h). \quad (105)$$

Na horizontalnim tetivama lukova i na horizontalnim pravcima brzina se klizanja mijenja pak po formuli:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} - \mu d. \quad (106)$$

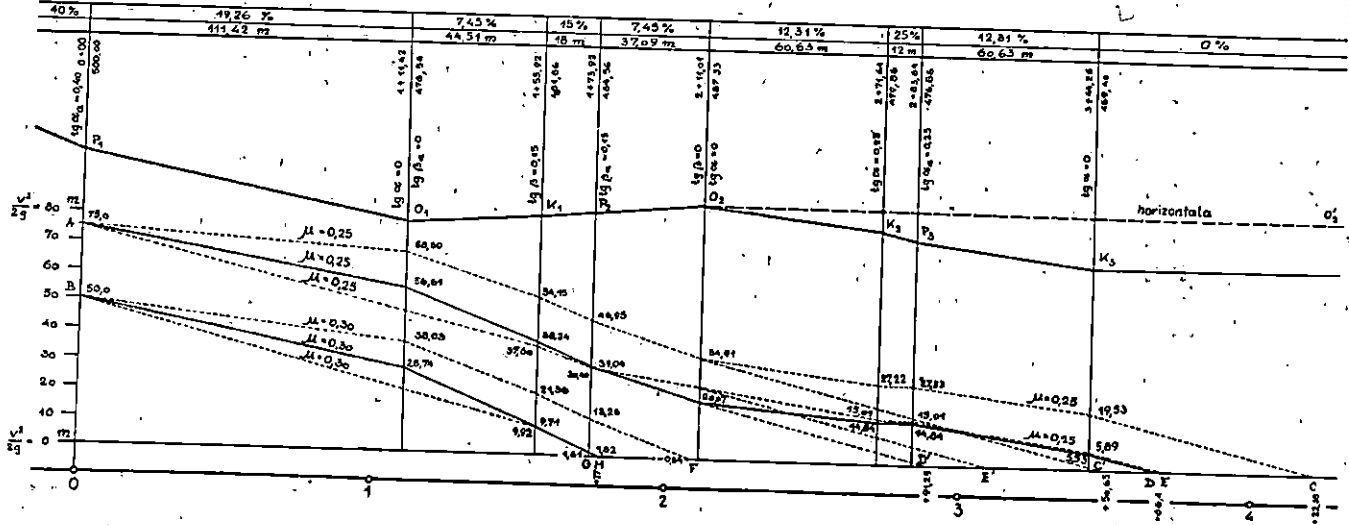
U tim formulama  $v_a$  označuje brzinu na početku, a  $v$  brzinu na kraju tetive, odnosno pravca. Kvocijent  $v^2 : 2g$  je dužina; dimenzija je tog kvocijenta metar.  $d$  je horizontalna, a  $h$  je vertikalna projekcija tetive luka, odnosno pravca gradijante. Projekcija  $d$  je svagda pozitivna. Projekcija  $h$  je pozitivna kod tetive i pravca, koji uzlaze, a negativna kod tetive i pravca, koji silaze; na horizontali je  $h = 0$ .

Ako je dakle gradijanta horizontalna, linija promjene brzine klizanja je pravac, koji silazi pod nagibom  $\mu = \text{tg } \tau$ .

U našem primjeru, na početku kočne gradijante (u točki  $P_1$ ), pretpostavili smo  $v_a^2 : g = 75$  m (t. j.  $v_a = 38,4$  m/sec) uz  $\mu = 0,25$ , a  $v_a^2 : g = 50$  m (t. j.  $v_a = 31,3$ ) uz  $\mu = 0,30$ .<sup>\*</sup> U vezi sa sl. 19 tablica 5 donosi brzine klizanja, izračunate po gornjim formulama u označenim točkama gradijante uz  $\mu = 0,25$ , a tablica 6 uz  $\mu = 0,30$ . U dijagramu brzina (sl. 20) crtkana linija AC pripada brzini klizanja uz  $\mu = 0,25$ , a crtkana linija BF uz  $\mu = 0,30$ .

\* Tablice  $v^2 : g$  za iznose brzine klizanja u praktičnim granicama nalaze se odštampane u »Glasnik za šumske pokuse« br. 3 (god. 1931) na str. 110-112.

### Dijagram brzina



Slika 20.

Tablica 5

Brzine klizanja uz  $\mu = 0,25$ . Usp. sl. 20

U točki	$v_a^2 : 2g$	$d$	$\mu d$	$-h$	$+h$	$\mu d \pm h$	$v^2 : 2g$	U točki	Form.
	m								
P <sub>1</sub>	75,00	111,42	27,86	21,46	—	6,40	68,60	O <sub>1</sub>	104
O <sub>1</sub>	68,60	44,51	11,13	—	3,32	14,45	54,15	K <sub>1</sub>	105
K <sub>1</sub>	54,15	18,00	4,50	—	2,70	7,20	46,95	P <sub>2</sub>	105
P <sub>2</sub>	46,95	37,09	9,27	—	2,77	12,04	34,91	O <sub>2</sub>	105
O <sub>2</sub>	34,91	60,63	15,16	7,47	—	7,69	27,22	K <sub>2</sub>	104
K <sub>2</sub>	27,22	12,00	3,00	3,00	—	—	27,22	P <sub>3</sub>	104
P <sub>3</sub>	27,22	60,63	15,16	7,47	—	7,69	19,53	K <sub>3</sub>	104
Zbroj:		344,28	86,08	39,40	8,79	55,47			
Kontrola: $75,00 - [86,08 - (39,40 - 8,79)] = 19,53$ m.									

Tablica 6

Brzine klizanja uz  $\mu = 0,30$ . Usp. sl. 20.

U točki	$v_a^2 : 2g$	$d$	$\mu d$	$-h$	$+h$	$\mu d \pm h$	$v^2 : 2g$	U točki	Form.
	m								
P <sub>1</sub>	50,00	111,42	33,43	21,46	—	11,97	38,03	O <sub>1</sub>	104
O <sub>1</sub>	38,03	44,51	13,35	—	3,32	16,67	21,36	K <sub>1</sub>	105
K <sub>1</sub>	41,36	18,00	5,40	—	2,70	8,10	13,26	P <sub>2</sub>	105
P <sub>2</sub>	13,26	37,09	11,13	—	2,77	13,90	0,64	O <sub>2</sub>	105
Zbroj:		211,02	63,31	21,46	8,79	50,64			
Kontrola: $50 - [63,31 - (21,46 - 8,79)] = -0,64$ .									

Točnije rezultate daju formule (56a) do (59a). Te formule, za račun u prikladnijem obliku napisane glase:

Za silazno klizanje na udubljenom luku

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + 2\mu(\alpha_a - \alpha)} - (\mu d - h), \quad (56a)$$

za uzlazno klizanje na udubljenom luku

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + 2\mu(\beta - \beta_a)} - (\mu d + h), \quad (57a)$$



za silazno klizanje na izbočenom luku

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} [1 + 2\mu(\alpha - \alpha_a)] - (\mu d - h), \quad (58a)$$

za uzlazno klizanje na izbočenom luku

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} [1 + 2\mu(\beta_a - \beta)] - (\mu d + h). \quad (59a)$$

U ovim formulama  $\alpha_a$ , odnosno  $\beta_a$  označuje nagib tangente na početku, a  $\alpha$  odnosno  $\beta$  na kraju luka. Ako je tangenta horizontalna, ti su kutovi jednaki ničici.

Račun po ovim formulama za naš primjer pregledno donosi tablica 7 za brzine klizanja uz  $\mu = 0,25$ , a tablica 8 za brzine klizanja uz  $\mu = 0,30$ .

Tablica 7

Brzine klizanja uz  $\mu = 0,25$ . Usp. sl. 20.

U točki	$\alpha, \alpha_a$ $\beta, \beta_a$	$2\mu(\alpha_a - \alpha)$ $2\mu(\beta_a - \beta)$	$\frac{v_a^2}{2g}$	$\mu d \pm h$	$\frac{v^2}{2g}$	U točki	Form.
P <sub>1</sub>	0,38051	0,19025	75,00	6,40	56,61	O <sub>i</sub>	56a
O <sub>1</sub>	0,14889	0,07445	56,61	14,45	38,24	K <sub>1</sub>	57a
K <sub>1</sub>	—	—	38,24	7,20	31,04	P <sub>2</sub>	105
P <sub>2</sub>	0,14889	0,07445	31,04	12,04	20,07	O <sub>2</sub>	59a
O <sub>2</sub>	0,24498	0,12249	20,07	7,69	14,84	K <sub>2</sub>	58a
K <sub>2</sub>	—	—	14,84	—	14,84	P <sub>3</sub>	104
P <sub>3</sub>	0,24498	0,12249	14,84	7,69	5,53	K <sub>3</sub>	56a

Tablica 8

Brzine klizanja uz  $\mu = 0,30$ . Usp. sl. 20.

U točki	$\alpha, \alpha_a$ $\beta, \beta_a$	$2\mu(\alpha_a - \alpha)$ $2\mu(\beta_a - \beta)$	$\frac{v_a^2}{2g}$	$\mu d \pm h$	$\frac{v^2}{2g}$	U točki	Form.
P <sub>1</sub>	0,38051	0,22830	50,00	11,97	28,74	O <sub>1</sub>	56a
O <sub>1</sub>	0,14889	0,08934	28,74	16,67	9,71	K <sub>1</sub>	57a
K <sub>1</sub>	—	—	9,71	8,10	1,61	P <sub>2</sub>	105

U dijagramu brzina (sl. 20) izvučena linija AD pripada brzini klizanja uz  $\mu = 0,25$ , a izvučena linija BG uz  $\mu = 0,30$ . Ove dvije izvučene linije praktički dostaju, da se utvrdi sposobnost rada klizine u označenom intervalu koeficijenta trenja. Prva linija siječe liniju  $v_a^2 : 2g = 0$  u točki D (profil 3 + 66,38), a druga u točki G

(profil 1 + 79). Među tim profilima, već prema sortimentu i trenju u označenim granicama, zaustavit će se nadošlo drvo i ispadati iz klizine na stovarište, koje se nalazi uz taj potez. Dužina ovog poteza iznosi okruglo 190 m. Da je od točke dalje gradijanta bila osnovana u horizontali ( $O_2-O_2'$ ), dužina stovarišta skratila bi se na potez  $GD'$ , cca 113 m dug. Točku  $D'$  lako je konstruirati, ako se uvaži, da je linija brzine klizanja, koja pripada horizontali gradijante, pravac nagiba  $\tau$ .

U dijagramu se nalaze još dvije crtkane linije brzina klizanja:  $AE$  (odnosno  $AE'$ ) uz  $\mu = 0,25$  i  $BH$  uz  $\mu = 0,30$ . Konstruirane su ove linije na temelju računa po točnim formulama, kako slijedi:

a) Linija brzine klizanja  $AE$  uz koeficijent trenja  $\mu = 0,25$ .

1. Udubljeni luk  $P_1K_1$ ;  $r = 300$  m;  $\text{tg } \alpha = 0,40$ ,  $\text{tg } \beta = 0,15$ . Silazno i uzlazno klizanje; dolazi u obzir formula (25).

Prema podacima tablice 2 je:

$$\begin{array}{r} \alpha = 0,38051 \\ \beta = 0,14889 \\ \hline \alpha + \beta = 0,52940 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\mu(\alpha + \beta) = 2 \cdot 0,25 \cdot 0,52940 = 0,26470 \\ \log e^{2\mu(\alpha + \beta)} = 0,26470 \cdot 0,43429 = 0,11496 \\ e^{2\mu(\alpha + \beta)} = 1,30304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \varepsilon + \tau = 40^\circ 36' 05'' \\ \alpha = 21^\circ 48' 05'' \\ \hline \varepsilon + \tau - \alpha = 18^\circ 48' 00'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \varepsilon + \tau = 40^\circ 36' 05'' \\ \beta = 8^\circ 31' 51'' \\ \hline \varepsilon + \tau + \beta = 49^\circ 07' 56'' \end{array}$$

$\cos(\varepsilon + \tau - \alpha) = 0,94665$ ;  $\cos(\varepsilon + \tau + \beta) = 0,65432$ . Po formuli (25):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{75,0}{1,30304} + 0,92196 \left[ 0,65432 - \frac{0,94665}{1,30304} \right] 300 = 37,60 \text{ m.}$$

2. Pravac  $K_1P_2$ ; uzlazno klizanje;  $\text{tg } \beta = 0,15$ . Po formuli (105):

$$\frac{v^2}{2g} = 37,60 - (0,25 \cdot 18 + 2,70) = 30,40 \text{ m.}$$

3. Izbočeni luk  $P_2K_2$ ;  $r = 250$  m;  $\text{tg } \beta = 0,15$ ;  $\text{tg } \alpha = \text{tg } \tau = 0,25$ .

U obzir dolazi formula (42), koja za  $\alpha = \tau$  prelazi u:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} e^{2\mu(\tau + \beta)} - \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos \varepsilon - e^{2\mu(\tau + \beta)} \cdot \cos(\varepsilon + \tau + \beta)] r. \quad (42a)$$

Prema podacima tablice 2 je:

$$\begin{array}{r} \tau = 0,24498 \\ \beta = 0,14889 \\ \hline \tau + \beta = 0,39387 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\mu(\tau + \beta) = 2 \cdot 0,25 \cdot 0,39387 = 0,19694 \\ \log e^{2\mu(\tau + \beta)} = 0,19694 \cdot 0,43429 = 0,08553 \\ e^{2\mu(\tau + \beta)} = 1,22047 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \varepsilon + \tau = 40^\circ 36' 05'' \\ \beta = 8^\circ 31' 51'' \\ \hline \varepsilon + \tau + \beta = 49^\circ 07' 56'' \end{array} \quad \cos(\varepsilon + \tau + \beta) = 0,65432$$

$$\frac{v^2}{2g} = 30,40 \cdot 1,22047 - 0,92196 [0,89443 - 1,22047 \cdot 0,65432] 250 = 15,01 \text{ m.}$$

4. Na pravcu  $K_2P_3$  nagiba  $\alpha = \tau$  brzina klizanja se ne mijenja.

5. Udubljeni luk  $P_3K_3$ ; silazno klizanje;  $r = 250$  m;  $\text{tg } \alpha = \text{tg } \tau = 0,25$ ;  $\text{tg } \alpha = 0$ .

U obzir dolazi formula (12), koja za  $\alpha_a = \tau$  prelazi u:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} e^{-2\mu\tau} + \frac{\cos \varepsilon}{\cos \tau} [\cos(\varepsilon + \tau) - e^{-2\mu\tau} \cdot \cos \varepsilon] r. \quad (12a)$$

Upotrebom podataka tablice 2 dobivamo:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{15,01}{1,1303} + 0,92196 \left[ 0,75926 - \frac{0,89443}{1,1303} \right] 250 = 5,89 \text{ m.}$$

b) Linija brzine klizanja BH uz koeficijent trenja  $\mu = 0,30$ .

1. Udubljeni luk  $P_1K_1$ ;  $r = 300$  m;  $\text{tg } \alpha = 0,40$ ;  $\text{tg } \beta = 0,15$ . Silazno i uzlazno klizanje; dolazi u obzir formula (25) kao pod a), 1:

$$\alpha + \beta = 0,52940; \quad 2\mu(\alpha + \beta) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,5294 = 0,31764$$

$$\log e^{2\mu(\alpha+\beta)} = 0,31764 \cdot 0,43429 = 0,13795; \quad e^{2\mu(\alpha+\beta)} = 1,37388.$$

$$\varepsilon + \tau = 47^\circ 39' 46''$$

$$\varepsilon + \tau = 47^\circ 39' 46''$$

$$\alpha = 21^\circ 48' 05''$$

$$\beta = 8^\circ 31' 51''$$

$$\varepsilon + \tau - \alpha = 25^\circ 51' 41''$$

$$\varepsilon + \tau + \beta = 56^\circ 11' 37''$$

$$\cos(\varepsilon + \tau - \alpha) = 0,89985; \quad \cos(\varepsilon + \tau + \beta) = 0,55639$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{50,0}{1,37388} + 0,89525 \left[ 0,55639 - \frac{0,89985}{1,37388} \right] 300 = 9,92 \text{ m.}$$

2. Pravac  $K_1P_2$ ; uzlazno klizanje;  $\text{tg } \beta = 0,15$ . Po formuli (105):

$$\frac{v^2}{2g} = 9,92 - (0,30 \cdot 18 + 2,70) = 1,82 \text{ m.}$$

Svrha je na temelju ovog računa konstruiranih crtkanih linija  $AE$  i  $BH$  samo zorno predočenje odmicanja linija konstruiranih na temelju rezultata izračunatih po približnim formulama. Među ovima najtočnije rezultate daju približne formule (56a) do (59a), a odgovaraju im neprekinuto izvučene linije brzine klizanja  $AD$  i  $BC$  na sl. 20. Te formule daju točnije rezultate ne samo od formula (104) i (105), nego općenito i od formula (56) do (59), kako smo već prije pokazali na nekim primjerima (tabl. 3 i 4). Ukoliko pak odmiču neprekinuto izvučene od točnih (crtkanih) linija brzine klizanja  $AE$  i  $BH$ , nije od praktičnog značenja. Jer, kako je poznato, razmjerno već mala brzina na kraju klizine može se regulirati: bilo još smanjiti vještačkim povećanjem, bilo povećati vještačkim smanjenjem trenja. Pomoću vještačkih naprava također se može izbaci drvo iz klizine na povoljnom mjestu na stovarište.

Ordinata bilo koje linije brzine, nacrtana na sl. 20, zapravo ne određuje brzinu klizanja, nego dužinu  $v^2 : 2g$  u promatranom profilu klizine. A to je i dovoljno. Ako je naime ta ordinata različna od ništice, različna je od ništice i brzina klizanja; ako je pak ta ordinata jednaka ništici, na ništicu je također spala brzina klizanja. Dovoljan je dokaz, da drvo ne će nigdje zapeti ni sustati na klizini, nego nasuprot dosegnuti stovarište, ako je u svakom profilu klizine pred stovarištem ordinata  $v^2 : 2g > 0$ . Isto tako je dovoljan dokaz,

da će se drvo zaustaviti na kraju klizine, na potezu određenom za to, ako obje linije brzine, jedna konstruirana uz  $\mu_{max}$ , a druga uz  $\mu_{min}$ , sijeku os apscisa  $v^2 : 2g = 0$  na tom potezu. Prema tome nas neposredni iznos brzine klizanja i ne zanima, osim, možda, maksimuma. Najveća naime brzina prometanja na klizinama neka je manja od 40 m/sec, dakle najveća dužina  $v^2 : 2g$  neka je manja od 80 m, a to je p. p. put prevaljen u 2 sekunde.

U našem primjeru najveća brzina klizanja na izbočenom luku  $P_2K_2$  nastupa u točki  $P_2$ . Ordinata izvučene linije brzine klizanja na tom mjestu iznosi  $v^2 : 2g = 31,04$ , a nagib gradijante  $\text{tg } \beta = 0,15$  (dakle je  $\cos \beta = 0,98894$ ). S obzirom na ove podatke, uz koeficijent sigurnosti  $k = 1,5$ , polumjer tog luka po formuli (67) treba da je

$$r \geq 1,5 \cdot 2 \cdot 31,04 : 0,98894 = 94 \text{ m.}$$

Ako gradijanta pripada na pr. drvenom točilu, a najveća dužina drva, koja se otprema, iznosi samo  $D = 4$  m, po formuli (73) polumjer luka treba da je  $r \geq 30 \cdot 4 = 120$  m. Odatle se vidi, da za izbor iznosa polumjera luka u ovom slučaju nije mjerodavna brzina klizanja, nego konstrukcija točila. Općenito bit će tako i u najviše slučajeva kod ostalih klizina.

## F) ODREĐIVANJE I ISKOLČIVANJE LUKOVA KOČNE GRADIJANTE

Kao kod putova, tako i kod klizina nakon dovršenog trasiranja najprije izrađujemo uzdužni profil, izvlačimo u njem crtu tla te upisujemo u nj apscise i ordinate točaka te crte. Iza toga možemo prijeći na konstruiranje gradijante. Da se taj posao valjano izvrši kod klizina je potrebno već na terenu kolčiti trasu tako, da kasnije umetanje ispravnih lukova na lomovima gradijante ne bude otežčano ili čak i onemogućeno. To se napose tiče nagiba trase. Trasa neka omogućuje polaganje gradijante dugačkih stranica, jednoličnog nagiba. Kraće stranice na lomovima nagiba neka ne pokazuju velike skokove u nagibima. Pred očima treba imati već kod trasiranja, koja će nam od tih kraćih stranica služiti kao tetiva luka na lomu nagiba. Ukratko na terenu treba kolčiti trasu klizine već tako, da crta tla u glavnim potezima određuje prije opisani tetivni poligon gradijante.

1. *Određivanje glavnih točaka luka.* Tangenta ( $T$ ) poblizje određuje sam luk, t. j. njegovu početnu ( $P$ ) i završnu točku ( $K$ ). Na silaznom ili uzlaznom *udubljenom* luku formula (78) određuje dužinu te tangente. No kako je

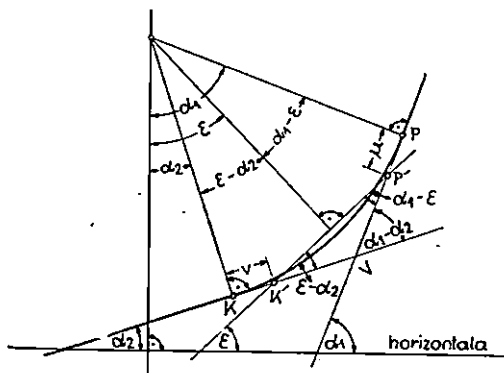
$$\text{tg}^{1/2} (a_1 - a_2) = \frac{1 - \cos (a_1 - a_2)}{\sin (a_1 - a_2)} = \frac{1}{2} (\text{tg } a_1 - \text{tg } a_2), \quad a_1 > a_2,$$

kao približna u tu svrhu može poslužiti i formula:

$$T \doteq \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) r. \quad (107)$$

*Primjer 9.* Zadano je kao u primjeru 6:  $r = 250$  m;  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,25$  i  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0$ . Iz (107) izlazi  $T = 1/2 \cdot 0,25 \cdot 250 = 30,125$  m. Točna je vrijednost  $T = 30,778$  m.

Želimo li iskolčiti početak ( $P$ ) i kraj udubljenog luka ( $K$ ) već pri trasiranju, možemo postupiti ovako (sl. 21). Na lomu gradijante ( $V$ ),



Slika 21

koji obično nije pristupačan, iskolčimo pomoćnu stranicu  $P'K'$  prikladne dužine  $a$  i nagiba  $\varepsilon$  u granicama  $\alpha_2 < \varepsilon < \alpha_1$ . Iz trokuta  $P'VK'$  po sinusovu pravilu izlazi

$$\left. \begin{aligned} P'U &= a \frac{\sin(\varepsilon - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \\ &= a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{1 + 1/2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{1 + 1/2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} a \\ K'U &= a \frac{\sin(\alpha_1 - \varepsilon)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \\ &= a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{1 + 1/2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + 1/2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} a \end{aligned} \right\} (108)$$

Udaljenosti  $u = PP'$  i  $v = KK'$ , koje određuju početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ), dobivamo onda iz (78) odnosno (107) i (108):

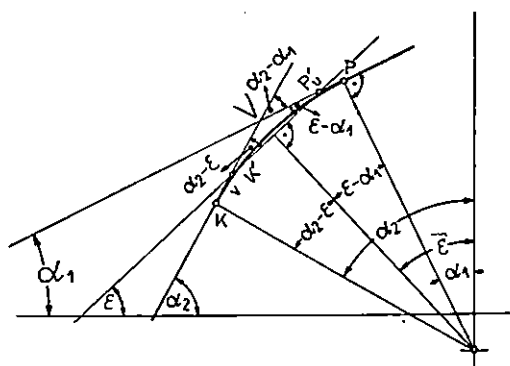
$$\left. \begin{aligned} u = PP' &= PV - P'V = T - P'V \\ v = KK' &= KV - K'V = T - K'V. \end{aligned} \right\} (109)$$

Na silaznom ili uzlaznom *izbočenom* luku formula (92) određuje dužinu tangente  $T$ . No kako je

$$\operatorname{tg}^{1/2}(a_2 - a_1) = \frac{1 - \cos(a_2 - a_1)}{\sin(a_2 - a_1)} \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{tg} a_2 + a_1), \quad a_2 > a_1,$$

kao približna u tu svrhu može poslužiti i formula

$$T \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1) r. \quad (110)$$



Slika 22

Želimo li iskolčiti početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ) već pri trasiranju, možemo postupiti analogno kao malo prije (sl. 22). Na lomu gradijante ( $V$ ), koji obično nije realan, iskolčimo pomoćnu stranicu  $P'K'$  prikladne dužine  $a$  i nagiba  $\varepsilon$  u granicama  $a_1 < \varepsilon < a_2$ . Iz trokuta  $P'V'K'$  po sinusovom pravilu izlazi:

$$\left. \begin{aligned} P'U &= a \frac{\sin(a_2 - \varepsilon)}{\sin(a_2 - a_1)} = \\ &= a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 a_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1} \doteq \frac{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 a_1}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1} a \\ K'U &= a \frac{\sin(\varepsilon - a_1)}{\sin(a_2 - a_1)} = \\ &= a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 a_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1} \doteq \frac{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 a_2}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1} a \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Udaljenosti  $u = PP'$  i  $v = KK'$  koje određuju početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ), dobivamo onda iz (92) ili (110) i (111):

$$\left. \begin{aligned} u = PP' &= PV - P'V = T - P'V \\ v = KK' &= KV - K'V = T - K'V. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Radi li se o *udubljenom* luku na lomu *silazne* i *uzlazne* tangente (sl. 15), to form. (83) i (83 a) određuju dužinu tangente ( $T$ ). No kako je

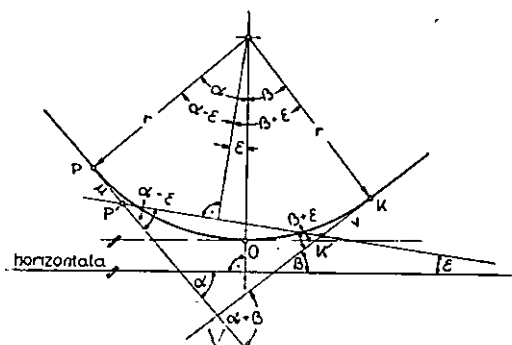
$$\operatorname{tg}^{1/2}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta),$$

namjesto (83a) može poslužiti i približna formula:

$$T \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) r. \quad (113)$$

Želimo li iskolčiti početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ) već pri trasiranju, možemo to učiniti opet pomoću stranice  $P'K'$  prikladne dužine  $a$  i povoljnog nagiba  $\varepsilon$  (sl. 23). Iz trokuta  $P'VK'$  po sinusovu pravilu izlazi:

$$P'U = a \frac{\sin(\beta \pm \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta \pm \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (114a)$$



Slika 23

Predznak plus važi u ovoj formuli, ako kut  $\varepsilon$  označuje pad (kao kut  $\alpha$ ); označuje li taj kut uspon (kao kut  $\beta$ ), važi negativan predznak. Nadalje je

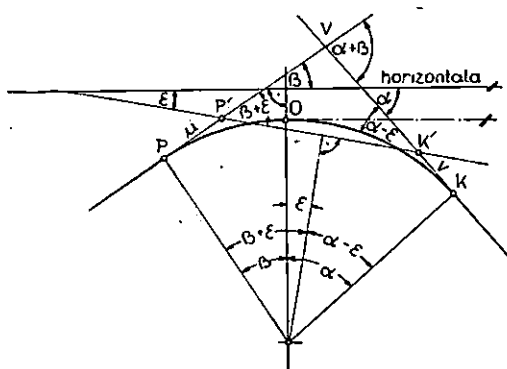
$$K'U = a \frac{\sin(\alpha \mp \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (114b)$$

Obrnuto: u ovoj formuli važi predznak minus, ako kut  $\varepsilon$  označuje pad (kao kut  $\alpha$ ), a predznak plus, ako kut  $\varepsilon$  označuje uspon (kao kut  $\beta$ ). Udaljenosti  $u = PP'$  i  $v = KK'$ , koje određuju početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ), dobivamo onda iz (83) ili (113), pa iz (114a) i (114b):

$$\left. \begin{aligned} u = PP' = PV - P'V &= T - P'V; \\ v = KK' = KV - K'V &= T - K'V. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Točku  $O$ , u kojoj je tangenta luka horizontalna, možemo odrediti pomoću tetiva  $PO$  i tetive  $OK$ , dakle pomoću formula (86), (87), (88) i (89). Ako je moguće iskolčiti tu točku na terenu, luk se raspada u dva udubljena luka, za koje važe i form. (78), (107), (108) i (109).

Izbočeni luk na lomu gradijante također može imati horizontalnu tangentu (sl. 24). Dužinu tangente  $T = PV = VK$  točno određuje formula (97), a približno formula (113).



Slika 24

Želimo li iskolčiti početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ) već pri trasiranju, činimo to opet pomoću stranice  $P'K'$ , prikladne dužine  $a$  i povoljnog nagiba  $\varepsilon$ . Onda je:

$$P'U = a \frac{\sin(\alpha \mp \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (115a)$$

Predznak minus važi u ovoj formuli, ako kut  $\varepsilon$  označuje pad (kao kut  $\alpha$ ), a predznak plus, ako kut  $\varepsilon$  označuje uspon (kao kut  $\beta$ ). Nadalje je:

$$K'U = a \frac{\sin(\beta \pm \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta \pm \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (115b)$$

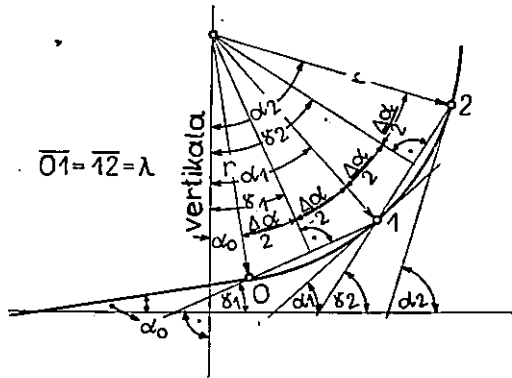
Ovdje pak važi predznak plus, ako  $\varepsilon$  označuje pad (kao kut  $\alpha$ ), a predznak minus, ako kut  $\varepsilon$  označuje uspon (kao kut  $\beta$ ). Udaljenosti  $u = PP'$  i  $v = KK'$ , koje određuju početak ( $P$ ) i kraj luka ( $K$ ), dobivamo onda iz form. (97) ili (113) i iz (115a) i (115b):

$$\left. \begin{aligned} u = PP' = PV - P'V = T - P'V \\ v = KK' = KV - K'V = T - K'V. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$



Točku  $O$ , u kojoj je tangenta luka horizontalna, možemo odrediti pomoću tetive  $PO$  i tetive  $OK$ , dakle pomoću formula (100), (101), (102) i (103). Ako je moguće iskolčiti tu točku na terenu, luk se raspada u dva izbočena luka, za koje važe i formule (90), (91), (92), (93) i (94).

2. *Određivanje ostalih točaka luka.* Početak ( $P$ ) i kraj ( $K$ ), zatim točka ( $O$ ), u kojoj je tangenta horizontalna, glavne su točke luka na lomu nagiba. Kod dužih lukova bit će potrebno iskolčiti ili odrediti položaj i još kojoj točki luka među ovima. Činimo to ovako:



Slika 25

Neka je  $\lambda$  razmak, u kojem želimo odrediti ili kolčiti točke luka 1, 2, 3, .....  $n$ , a točka  $o$  neka je zadana po položaju i po nagibu tangente u njoj prema horizontali ( $\alpha_0$ ). Nagibi tangenata u točkama 1, 2, 3 .....  $n$  neka su  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , a nagibi  $\lambda$  dugih tetiva među tim točkama neka su  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ . Nadalje neka je  $\Delta a = \widehat{\lambda} : r$  središnji kut luka  $\lambda$ , koji pripada tetivi  $\lambda$ . Onda stoje snošaji (sl. 25):

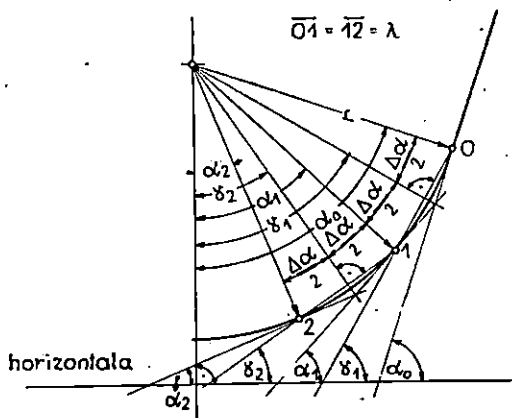
$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = \alpha_0 \pm 1/2 \Delta a & \text{ili } \gamma_1 = \alpha_0 \pm 1/2 \Delta a \\ \alpha_1 = \gamma_1 \pm 1/2 \Delta a & \text{,, } \alpha_1 = \alpha_0 \pm \Delta a \\ \gamma_2 = \alpha_1 \pm 1/2 \Delta a & \text{,, } \gamma_2 = \alpha_0 \pm 3/2 \Delta a \\ \alpha_2 = \gamma_2 \pm 1/2 \Delta a & \text{,, } \alpha_2 = \alpha_0 \pm 2 \Delta a \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} \pm 1/2 \Delta a = \gamma_{n-1} \pm \Delta a; \text{ ili } \gamma_n = \alpha_0 \pm \frac{2n-1}{2} \Delta a \quad (117a)$$

$$\alpha_n = \gamma_n \pm 1/2 \Delta a = \alpha_{n-1} \pm \Delta a; \text{ ili } \alpha_n = \alpha_0 \pm n \Delta a. \quad (117b)$$

Pritom je:  $\Delta a = \widehat{\lambda} : r. \quad (117c)$

U ovim formulama predznak plus važi, kad se u luku povećavaju nagibi gradijante prema nagibu početne tangente (u točki  $O$ , sl. 25): predznak minus pak važi, kad se luku smanjuju nagibi gradijante prema nagibu početne tangente (u točki  $O$ , sl. 26).



Slika 26

Razlika među dužinom luka  $\widehat{\lambda}$  i dužinom tetive  $\lambda$ , kako je poznato, približno iznosi:

$$\widehat{\lambda} - \lambda = \frac{\lambda^3}{24 r^2}.$$

Stavimo li  $\widehat{\lambda} - \lambda = 0,001$  m, onda je ta razlika praktički toliko mala, da možemo u naše svrhe dovoljno točno staviti:  $\Delta\alpha = \lambda : r$ , ako odaberemo:

$$\lambda \leq \sqrt[3]{0,024 r^2},$$

ili

$r =$	100	150	200	250	300 m	(118)
$\lambda \leq$	6	8	10	12	13 m	

Onda će biti praktički i dovoljno točno:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \operatorname{tg} (\alpha_0 \pm 1/2 \Delta\alpha) \doteq \operatorname{tg} \alpha_0 \pm 1/2 \Delta\alpha \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \operatorname{tg} (\gamma_1 \pm \Delta\alpha) \doteq \operatorname{tg} \gamma_1 \pm \Delta\alpha \\ \operatorname{tg} \gamma_3 &= \operatorname{tg} (\gamma_2 \pm \Delta\alpha) \doteq \operatorname{tg} \gamma_2 \pm \Delta\alpha \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

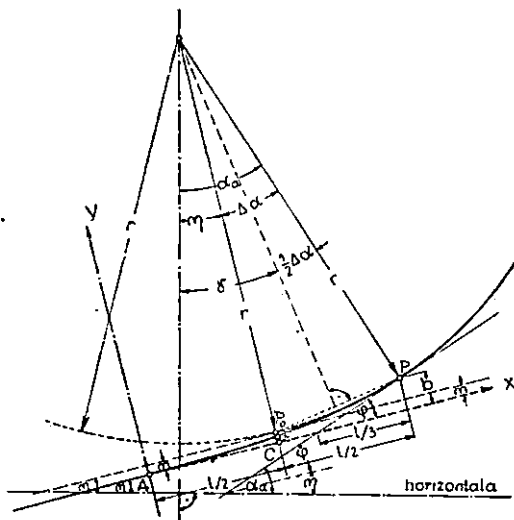
Dademo li pak  $n$ -toj  $\lambda$  dugoj tetivi samo nagib

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \operatorname{tg} (\gamma_{n-1} \pm 1/2 \Delta\alpha) \doteq \operatorname{tg} \gamma_{n-1} \pm 1/2 \Delta\alpha, \quad (120)$$

onda na taj način određena točka  $n$  ne leži više u luku kružnice, nego u tangenti luka; određuje dakle tangentu u  $n$ -toj točki luka.

*Primjer 10.* Zadana je točka  $o$  na pravcu nagiba  $\operatorname{tg} \alpha = 0,24$ . Na taj pravac priključuje se udubljeni luk polumjera  $r = 250$  m. U luku će se dakle smanjivati nagibi gradijante prema nagibu zadanog pravca, ujedno i tangente tog luka. Odabiramo  $\lambda = 10$  m. Onda je  $\Delta \alpha = \lambda : r = 10 : 250 = 0,04$ ;  $\frac{1}{2} \Delta \alpha = 0,02$ . Prvu točku (1) iza zadane točke ( $O$ ) određuje  $\lambda = 10$  m duga tetiva, nagiba  $\operatorname{tg} \gamma_1 = 0,24 - 0,02 = 0,22$ . Nagibi tetiva daljih točaka luka jesu:  $\operatorname{tg} \gamma_2 = 0,22 - 0,04 = 0,18$ ;  $\operatorname{tg} \gamma_3 = 0,14$ ;  $\operatorname{tg} \gamma_4 = 0,10$ ;  $\operatorname{tg} \gamma_5 = 0,6$ ;  $\operatorname{tg} \gamma_6 = 0,02$ . Dademo li sedmoj  $\lambda = 10$  m dugoj tetivi nagib:  $\operatorname{tg} \gamma_7 = \operatorname{tg} \gamma_6 - \frac{1}{2} \Delta \alpha = 0,02 - 0,02 = 0$ , onda ta sedma točka ne leži u luku, nego zajedno sa šestom točkom određuje tangentu u šestoj točki luka. U ovom primjeru ta je tangenta horizontalna.

Da se pogreške ne gomilaju, po pravilu kolčić će se točke na ovaj način od krajeva prema sredini, odnosno od točke  $O$ , u kojoj je tangenta horizontalna, ako takva točka postoji, prema krajevima luka.



Slika 27

3. *Prelazna krivulja.* Općenito priključuje se luk kružnice na pravac gradijante, koji je nagnut prema horizontali pod nekim kutom  $\eta$  (sl. 27). Neka je  $P_0$  točka, u kojoj bi taj pravac tangirao luk kružnice bez prelazne krivulje. Da se uzmogne umetnuti među pravac i luk još i prelazna krivulja, na pr. kubna parabola,

$$y = \frac{x^3}{6rl}, \quad y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{x^2}{2rl}, \quad (120)$$

potrebno je odmaknuti luk od pravca prema središtu luka ili pravac od luka na suprotnu stranu za neki iznos  $m$ . Umetnemo li sada kubnu parabolu kao prelaznu krivulju, njezin početak ( $A$ ) leži u odmaknutom pravcu,  $l/2$  daleko od prijašnje dodirne točke pravca i luka ( $P_0$ ), a njezin kraj leži isto toliko daleko od prijašnje dodirne točke na suprotnoj strani, u točki luka  $P$ . Pritom  $l$  označuje dužinu prelazne krivulje, koja se praktički izjednačuje s dužinom njezine projekcije u pravcu, na koji se luk priključuje.

Najmanja dužina prelazne krivulje šumskih klizina neka je jednaka barem najvećoj dužini drva, koje se otprema, a neka nije kraća od  $l_{\min} = 8$  m.

U slučaju dakle kubne parabole, u označenom koordinatnom sustavu  $xy$  točka  $F$  ima koordinate:

$$x = l, \quad y = b = l^2 : 6 r, \quad (121)$$

a nagib tangente u toj točki iznosi

$$\text{tg } \varphi = b : \frac{1}{3} l = l : 2 r. \quad (122)$$

Odmak luka od pravca iznosi

$$m = \frac{1}{4} b = l^2 : 24 r. \quad (123)$$

Točka  $E$  ima koordinate

$$x = \frac{1}{2} l, \quad y = \frac{1}{2} m = \frac{1}{8} b = l^2 : 48 r. \quad (124)$$

Položaj točke  $P$  prema točki  $P_0$  određujemo pomoću tetive  $P_0P \doteq \doteq \frac{1}{2} l$  i nagiba te tetive prema horizontali: (usp. 117):

$$\text{tg } \gamma = \text{tg } \eta \pm \frac{1}{2} \Delta \alpha; \quad \Delta \alpha = l : 2 r \doteq \text{tg } \varphi \doteq \varphi. \quad (125)$$

Tetiva  $AE$  ima nagib prema osi apscisa:

$$\text{tg } \vartheta = m : l = l : 24 r \doteq \vartheta,$$

a prema horizontali:

$$\text{tg } \gamma' \doteq \text{tg } \eta \pm \vartheta. \quad (126)$$

Tablica 9

Podaci o  $l = 8$  m dugoj prelaznoj krivulji

$r =$	100	150	200	250	300 m
$b$	0,107	0,071	0,053	0,043	0,036 m
$m$	0,027	0,018	0,013	0,011	0,009 m
$\Delta \alpha$	0,040	0,027	0,020	0,016	0,013
$\vartheta$	0,003	0,002	0,0016	0,0013	0,0011

Tablica 10

Podaci o  $l = 20$  m dugoj prelaznoj krivulji

$r =$	100	150	200	250	300 m
$b =$	0,666	0,444	0,333	0,266	0,222 m
$m =$	0,166	0,111	0,083	0,066	0,055 m
$\Delta \alpha$	0,100	0,066	0,050	0,040	0,033
$\vartheta$	0,0083	0,0055	0,0042	0,0033	0,0028

Izostavlja li se prelazna krivulja, centrifugalna sila nastupa odmah u punom iznosu. Poradi toga prelazna krivulja neka je po mogućnosti duga, to duža, što je brzina klizanja veća. Ukoliko se u praksi pokazala nesigurnost klizanja na lomovima gradijante, osobito na izbočenom luku, ne će biti možda krivnja samo na prekratko odmjerenom polumjeru luka, nego i na prekratko odmjerenoj prelaznoj krivulji ili dapače njezinu izostanku uopće.

Tabl. 9 donosi podatke o 8 m dugoj (za male brzine i kratko drvo) i o 20 m dugoj (za srednje brzine) prelaznoj krivulji. Iz tih tablica se vidi, da je odmak pravca i luka  $m$  općenito malen. Zbog toga će biti možda jednostavnije pomicati kraći pravac među dugim lukovima a kraće lukove na krajevima dugih pravaca.

*Primjer 11.* Zadaću, izradenu u primjeru 10 bez prelazne krivulje, izradujemo sada s prelaznom krivuljom. Dužinu prelazne krivulje odabiramo  $l = 20$  m. Dakle je  $\frac{1}{2}l = 10$  m =  $\lambda$  i

$$\Delta\alpha = l : 2r = \lambda : r = 10 : 250 = 0,04$$

kao i prije. Poradi toga sve točke luka (osim prve i posljednje) ostaju na istom mjestu kao u zadaci 10. Da pak možemo umetnuti prelaznu krivulju, odmaknut ćemo pravac nagiba  $\text{tg } \alpha = 0,24$ , usporedno od točke  $o$  ( $P_0$ ) na početku i horizontalu od točke 6 usporedno na kraju za dužinu  $m = l^2 : 24r = 0,06$  m (usp. tabl. 10). Ispod točaka 0 i 6 u udaljenosti  $\frac{1}{2}m = 0,03$  m prema odmaknutom pravcu i horizontali leže točke  $E$  prelazne krivulje na jednom i drugom kraju luka. Počeci ( $A$ ) prelazne krivulje leže u odmaknutim tangentama, od točaka  $E$  daleko  $\frac{1}{2}l = 10$  m, na jednom i drugom kraju izvan prijašnjeg luka. Kako je  $\vartheta = m : l = 0,06 : 20 = 0,003$ , to tetiva  $AE$  na jednom kraju ima nagib  $\text{tg } \gamma' = 0,24 - 0,003 = 0,237$ , a na drugom  $\text{tg } \gamma' = 0,003$ . Nadalje je  $b = 0,266$  (usp. tabl. 10), a razlika ordinata točaka  $P$  i  $E$  iznosi  $b = \frac{1}{2}m = 0,266 - 0,033 = 0,233$ . Nagib tetive  $EP$  prema osi apscisa onda iznosi  $0,233 : 10 = 0,023$ , a prema horizontali na jednom kraju  $0,24 - 0,023 = 0,217$ , a na drugom kraju  $0,023$ . Točka  $E$  leži na jednom kraju pod prijašnjom točkom  $O$ , a na drugom kraju pod prijašnjom točkom 6 i to  $0,033$  m duboko. Luk kružnice sad se proteže samo od točke 1 do točke 5, a nagib je tetiva među tim točkama isti kao i prije.

Slijedi li udubljeni luk izbočeni luk ili obrnuto, razmak među njima neka je barem tolik, da ima dovoljno mjesta za umetanje prelaznih krivulja. Nagibi prve polovice prelazne krivulje malo se razlikuju od nagiba pravca, s kojeg polazi prelazna krivulja; nagibi pak druge polovice prelazne krivulje sve većma se približuju nagibima luka kružnice, u kojem svršava prelazna krivulja. Poradi toga se i ne čini praktički primjetljiva pogreška, ako se vanjska polovica prelazne krivulje pripoji pravcu, a nutarnja polovica luku kružnice, kad se računa brzina klizanja. T. j. praktički ćemo dovoljno točno istraživati sposobnost rada klizine, ako računamo s gradijantom, koja je složena samo od pravaca i lukova bez prelaznih krivulja.

## LITERATURA

- Simonović B. Milutin, Nekoliko reči o projektovanju uzdužnog profila suvog točila. Zagreb, Sumarski list 1947.
- Flögl Stanko, Klizanje u luku kružnice. Zagreb, Tehnički list, 1928.
- Flögl Stanko, Prilog teoriji klizina. Zagreb, Godišnjak sveučilišta 1929.
- Flögl Stanko, Das Riesweg-Längenprofil. Berlin, Tharandter forstliches Jahrbuch 1934.
- Flögl Stanko, Klizine, plavljenje i žičare. Zagreb 1936, litograf. skripta.

## ZUSAMMENFASSUNG

### Abschnitt A)

1. In der Formel (11) ist die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v_a$  mit der Neigung  $\alpha_a$  und der Geschwindigkeit  $v$  mit der Neigung  $\alpha$  eines schweren Körpers, der in einer Konkavkreislinie abwärts gleitet, zum Ausdruck gebracht. Bei der Ableitung dieser Formel ist von den wirkenden Kräften das Eigengewicht ( $Q = mg$ ), die Reibung (mit Reibungszahl, bzw. Reibungswinkel  $\mu = \operatorname{tg} \tau$ ) und die Fliehkraft ( $mv^2 : r$ ) berücksichtigt (Fig. 1).

Im Sonderfalle  $\alpha = 0$  und  $v = v_0$  geht die Gleichung (11) in die Gl. (12) oder (13) über; für  $\alpha = 0$  und  $v = 0$  gilt die Gl. (13a) und für  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$  und  $\alpha_a = \tau$  die Gl. (13b). Im letzteren Falle ist die Anfangsgeschwindigkeit eine Funktion lediglich der Reibungszahl ( $\mu$ ), bzw. des Reibungswinkels ( $\tau$ ). Es folgt das Zahlenbeispiel 1.

Die Formel (14) bestimmt, und die Tafel 1 weist jene Neigung  $\alpha_a > \tau$  der Konkavkreislinie auf, auf welcher ein schwerer Körper mit der Geschwindigkeit  $v_a = 0$  abwärts zu gleiten beginnen muss, um noch die Neigung  $\alpha = 0$  mit der Geschwindigkeit  $v = v_0 = 0$  zu erreichen.

2. In der Formel (22) ist die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v_a$  auf der Steigung  $\beta_a$ , und der Geschwindigkeit  $v$  auf der Steigung  $\beta$  eines schweren Körpers, der in einer Konkavkreislinie aufwärts gleitet, ausgedrückt (Fig. 2). Diese Formel ist unmittelbar abgeleitet, man kann sie aber auch (durch Ersatz der Neigung  $-\alpha$  durch die Steigung  $+\beta$ ) aus der Formel (11) mittelbar erhalten. Nun folgen einige Sonderfälle. Form. (23) bestimmt die Gleitgeschwindigkeit  $v > 0$  auf der Steigung  $\beta \neq 0$ , falls die Anfangsgeschwindigkeit  $v_a = v_0$  auf der Steigung  $\beta_a = 0$  verschieden von Null ist. Umgekehrt Form. (24) bestimmt die Anfangsgeschwindigkeit  $v_a = v_0 > 0$ , die ein schwerer Körper haben muss, damit er die Steigung  $\beta > 0$  mit der Geschwindigkeit  $v > 0$  erreicht. Die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  auf der Steigung  $\beta = 0$  für  $v = 0$  auf der Steigung  $\beta \neq 0$  gibt Form. (24a), und auf der Steigung  $\beta = \tau$ ,

Form. (24 b) an. Im letzteren Falle ist die Gleitgeschwindigkeit wieder eine Funktion lediglich der Reibungszahl, bzw. des Reibungswinkels. Nun folgt das Zahlenbeispiel 2.

3. Hat sich ein schwerer Körper auf der Neigung  $\alpha_a$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_a$  in Bewegung gesetzt, und gleitet er in einer Konkavkreislinie vorerst abwärts, dann aber auch aufwärts, bis zur Steigung  $\beta$ , wo er noch eine Geschwindigkeit  $v_\beta > 0$  hat, so gilt die Beziehung (25) oder (26) (Fig. 3). Im Sonderfalle  $v_\beta = 0$  gilt die Form. (26a) und im Sonderfalle  $v_a = 0$  und  $v_\beta = 0$  die Form. (27).

*Letztere Formel, wie auch Form. (14), kann zur experimentellen Bestimmung der Reibungszahlen, bzw. der Reibungswinkel auf verschiedenen Riesen für verschiedene Sortimente benutzt werden.*

4. Beim Abwärtsgleiten eines schweren Körpers auf einer Konkavkreislinie ist die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v_a$  auf der Neigung  $\alpha_a$  und der Geschwindigkeit  $v$  auf der Neigung  $\alpha$  durch Gl. (35) bestimmt (Fig. 4). Im Sonderfalle  $\alpha_a = 0$  und  $v_a = v_0$  gilt die Gleichung (36) oder (37), für  $\alpha_a = 0$ ,  $\alpha = \tau$ ,  $v_a = v_0$  und  $\dot{v} > 0$  die Gl. (37a) und für  $\alpha_a = 0$ ,  $\alpha = \tau$ ,  $v_a = v_0$  und  $v = 0$  die Gl. (37b). Letztere Gleitgeschwindigkeit ist auch eine Funktion lediglich der Reibungszahl ( $\mu$ ), bzw. des Reibungswinkels ( $\tau$ ).

5. Beim Aufwärtsgleiten eines schweren Körpers auf einer Konkavkreislinie ist die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v_a$  auf der Steigung  $\beta_a$  und der Geschwindigkeit  $v$  auf der Steigung  $\beta$  durch Gl. (38) gegeben (Fig. 5). Im Sonderfall  $\beta_a \neq 0$ ,  $v_a > 0$ ,  $\beta = 0$  und  $v = v_0 > 0$  gilt Form. (39) bzw. (40). Im Sonderfall  $v_0 = 0$ ,  $\beta = 0$  und  $\beta_a = \tau$  ist die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit  $v_a$  (Gl. 41) auch eine Funktion lediglich der Reibungszahl, bzw. des Reibungswinkels.

6. Hat ein schwerer Körper auf einer Konkavkreislinie auf der Steigung  $\beta_a$  die Geschwindigkeit  $v_a$  erreicht und gleitet weiter aufwärts und dann abwärts (Fig. 6) bis zur Neigung  $\alpha$ , wo seine Geschwindigkeit  $v > 0$  aufweist, so besteht zwischen beiden Geschwindigkeiten die Beziehung (42) bzw. (43). Im Sonderfall  $\alpha = \tau$  geht die Gleichung (43) in die Gl. (43 a), und im Sonderfall  $\alpha = \tau$  und  $v = 0$  in die Gl. (43b) über. Schliesslich ist im Sonderfall  $\beta_a = \tau$ ,  $\alpha = \tau$  und  $v = 0$  die entsprechende Anfangsgeschwindigkeit  $v_a$  (Gl. 43c) wieder eine Funktion lediglich der Reibungszahl, bzw. der Reibungswinkels.

Die beigefügte Tafel 2 erleichtert die Anwendung der in diesem Abschnitt abgeleiteten genaueren Geschwindigkeitsformeln.

### *Abschnitt B)*

1. Vorerst werden die annähernden Formeln über die Geschwindigkeitsänderung beim Gleiten eines Schweren Körpers in, bzw. auf einer Kreislinie unter Ausserachtlassen der Zentrifugalkraft abgeleitet. So bestimmt die Näherungsgleichung

(44a) die Geschwindigkeitsänderung beim Abwärtsgleiten und (45a) beim Aufwärtsgleiten in einer Konkavkreislinie;

(46a) die Geschwindigkeitsänderung beim Abwärtsgleiten und (47a) beim Aufwärtsgleiten auf einer Konvexkreislinie.

Die Geschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in einer geraden Linie ist durch Gl. (48) beim Abwärts- und durch Gl. (49) beim Aufwärtsgleiten ausgedrückt (Fig. 7).

Aus dem Vergleich der Gleichungen (44a), (45a), (46a), (47a) mit den Gleichungen (48) u. (49) kann gefolgert werden: Die Geschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in oder auf einer Kreislinie unter Ausserachtlassen der Zentrifugalkraft geht vor sich als gleite der schwere Körper nicht in, oder auf dem Bogen selbst, sondern auf der zugehörigen Sehne. Dasselbe geht auch aus dem Satze von der Arbeit und der kinetischen Energie hervor (Gl. 51).

2. Hernach werden die annähernden Formeln über die Geschwindigkeitsänderung beim Gleiten eines schweren Körpers, in bzw. auf einer Kreislinie unter Vernachlässigung des Eigengewichtes abgeleitet; u. z. Gl. (52) beim Abwärtsgleiten und Gl. (53) beim Aufwärtsgleiten in einer Konkavkreislinie, demnach Gl. (54) beim Abwärtsgleiten und Gl. (55) beim Aufwärtsgleiten auf einer Konvexkreislinie.

3. Durch Superponierung der unter 1. u. 2. gewonnenen Resultate werden schliesslich die annähernden Formeln, die den Zentrifugalkräften und Eigengewichten Rechnung tragen, aufgestellt u. z.:

Gl. (56) für die Geschwindigkeitsänderung beim Abwärts- und Gl. (57) beim Aufwärtsgleiten in einer Konkavkreislinie.

Gl. (58) für die Geschwindigkeitsänderung beim Abwärts- und Gl. (59) beim Aufwärtsgleiten auf einer Konvexkreislinie.

Aus diesen folgen dann die vereinfachten annähernden Formeln u. z. (56a) und (57a) für das Abwärts- und (58a) für das Aufwärtsgleiten in einer Konkavkreislinie, bzw. Form. (58a) für das Abwärts- und (59a) für das Aufwärtsgleiten auf einer Konvexkreislinie.

Es folgt Beispiel 5 in dem die Geschwindigkeitsänderung beim Abwärtsgleiten eines schweren Körpers in einer Konkavkreislinie – u. z. nach den Näherungsformeln (a), (b) und (c), die aus der Gl. (44a), (56a) und (56) folgen, und nach der genaueren Formel (d), die aus der Gl. (13b) folgt – berechnet ist.

Auf Tafel (3) und (4) sind die berechneten Resultate für verschiedene Werte der Reibungszahl zusammengestellt. Aus Tafel (3) ist einerseits ersichtlich, dass die Differenz zwischen den berechneten Resultaten nach Näherungs- und genaueren Formeln um so grösser, je grösser die Reibungszahl ist. Aus Tafel (4) ist andererseits ersichtlich, dass beim Gleiten in einer Konkavkreislinie die berechneten Resultate nach der annähernden Formel (56a) und (57a) den Resultaten der genaueren Formeln (13b) und (24b), und beim Gleiten auf einer Konvexkreislinie die berechneten Resultate nach der annähernden Formel (46a) und (47a) den Resultaten der genaueren Formeln (37b) und (41) sich besser anpassen.



### Abschnitt C)

1. Es kann der Fall eintreten, dass beim Gleiten auf einer Konvexkreislinie die in der Normale wirkenden Kräfte einander aufheben. In diesem Fall trachtet ein schwerer Körper beim Aufwärtsgleiten eine Kurve zu beschreiben, deren Krümmungshalbmesser durch Gleichung (61), die aus Gleichung (60) folgt, bestimmt ist. Als wirkende tritt dann nur die Tangentialkraft  $T$ , mit der Beschleunigung  $a_t$ , auf. Infolgedessen nimmt die allgemeine Gleichung (4) die Form der Differentialgleichung (62) an, woraus das Geschwindigkeitsänderungsgesetz (63), bzw. (63a) folgt. Dies besagt, dass die Horizontalkomponente des Geschwindigkeitsvektors in jedem Punkte der Bahn konstant ist. Die Krümmungshalbmesserformel nimmt nun die Form der Gl. (64) an. Die entsprechende Bahn ist die bekannte Wurfparabel, deren Parametergleichung durch Gl. (65), und Koordinatengleichung durch Gl. (66) gegeben ist (Fig 8). Der Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte dieser Parabel ist wie folgt, erhältlich (Fig. 9): Man zieht die Gerade  $AFH$  so, dass sie mit der Normale  $ANO_a$  den Winkel  $\beta_a$  einschliesst und trägt auf diese Gerade die Länge  $AH = v_a^2 : g$  auf. Nun fällt man die Senkrechte im Punkte  $H$  auf die Gerade  $AH$ . Diese Senkrechte schneidet den Krümmungshalbmesser  $\rho_a = O_aA$  auf der Normale ab. Übrigens ist der Parabelbrennpunkt  $F$  auch Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser  $AF = \frac{1}{2} v_a^2 : g$ , auf dem die Hauptpunkte  $A, T, A', H, N$  und  $H'$ , die diese Kurve im konkreten Falle näher bestimmen, liegen.

Aus Gleichung (61a) ist ersichtlich, dass der Krümmungshalbmesser der Parabel um so grösser sein wird, je grösser die Gleitgeschwindigkeit und die Neigung (gegen die Horizontale) des Geschwindigkeitsvektors ist. Am Gefällsbruche der forstlichen Riesen ist dies der Fall, wenn sich der gleitende Holzstamm im Bogenanfangs- oder Endpunkte befindet (Fig. 10). Folglich, um das Ausgleiten des Holzes zu verhindern, muss der Kreisbogendurchmesser am Gefällsbruche der Gl. (67) genügen. Der in dieser Formel vorkommende Koeffizient  $k$  hat den Zweck, im jeden Bogen- und Zeitpunkt beim Gleiten eines beliebigen Sortimentes eine auf die Bahn niederdrückende Kraft zu sichern.

2. Der Bogendurchmesser am Gefällsbruche hängt nicht nur von der Grösse der Gleitgeschwindigkeit und der Neigung der Gradienten, sondern auch von der Rieskonstruktion und den Dimensionen des gleitenden Holzes ab. So z. B. besteht die Stangenriese aus 4 bis 8 m langen Fächern, die am Gefällsbruche keinen Bogen, sondern ein Sehnenpolygon von  $\lambda$  langen Seiten bilden (Fig. 12). Jede verlängerte Sehne bildet mit der folgenden Sehne ein Dreieck, das dem entsprechenden Mittelpunktdreiecke ähnlich ist. Aus dieser Ähnlichkeit folgt dann die Beziehung (69). Das Fig. 12a dargestellte  $D$

lange Rundholz ist eben an ein Polygoneck mit seinem Halbierungspunkte angelangt.  $2z$  soll die Höhe, womit das vordere Holzende die Riessohle überhöht, andeuten. Aus der Ähnlichkeit der in der Figur gekennzeichneten Dreiecke folgt dann die Beziehung (70). Die erwähnte Überhöhung  $2z$  verlangt, dass die Stangenriese auch in Bögen an Gefällsbrüchen, besserer Führung wegen, ausser mit Wehrern noch mit Sattel- und Übersattelbäumen versehen ist u. z. so, dass die Führungstiefe  $\Delta$  der Gl. (71) oder auch (72) genügt. Die in Fig. 12c skizzierte Riese ist  $t = 55$  cm tief, hat Übersattelbäume mit  $\delta = 30$  cm Durchmesser, und eine Führungstiefe  $\Delta = 40$  cm; das gleitende Rundholz hat den Durchmesser  $d = 60$  cm und die erwähnte Überhöhung beträgt  $2z = 10$  cm. Es gibt unterschiedliche Riessorten, deren Dimensionen je nach Länge und Durchmesser des abzurierenden Rundholzes auch verschieden sind. Je grösser der Durchmesser des gleitenden Holzes ist, eine desto grössere Riestiefe ( $t$ ) und ein desto grösserer Durchmesser ( $\delta$ ), des Übersattelbaumes ist erforderlich. Dennoch wird die erwähnte Überhöhung bei allen Riessorten von dem eben berechneten Betrage  $2z = 10$  cm nicht viel abweichen, da dieser Betrag aus Verhältnissen der zuletzt erwähnten veränderlichen Dimensionen hervorgeht. Nimmt man noch eine Sicherheitszahl  $s = 1,5$  mit in Kauf, aus (70) und folgenden Formeln, so gelangt man schliesslich zur Beziehung (73), die den Kleinstwert des Bogendurchmessers am konvexen Gefällsbrüche angibt. Die Einführung einer Sicherheitszahl war notwendig, weil  $2z = 10$  cm nur ein beiläufiger Durchschnittswert ist, auch weil Riesstangen und das gleitende Holz weder vollkommen rund noch schnurgerade sind. Den nach Formel (73) berechneten Bogendurchmesser für ein  $D$  langes Riessortiment enthält folgendes Täfelchen. Formel (67) kommt nur in Betracht, wenn sie grössere Werte als die Formel (73) liefert. Beide Formeln bestimmen den Kleinstwert des Kreisbogenhalbmessers an konvexen Gefällsbrüchen von allerart Rundholzriesen. Eine Ausnahme macht nur der erste Bogen nach dem Riesmunde, wo das gleitende Holz noch durch Handzug geführt wird, deshalb auch der Bogendurchmesser, wie üblich, auf 100 m herabgesetzt werden kann.

Bei Riesen mit Dreieckprofil, wegen grösserer Bremswirkung, auch bei Rieswegen, wegen kleinerer Führungstiefe, kann Formel (74) besser als Formel (73) dienen.

Ein Konkavkreisbogen am Gefällsbrüche der Stangenriesen ist auch ein Sehnenpolygon (Fig. 13a). Zu leichterer Bewältigung der dadurch entstehenden Störungen und sonstigen Hindernisse erhalten die Riessortimente eine Abkantung des vorderen starken Endes im Verhältniss, das nicht kleiner als  $2u : \lambda$  sein darf (Fig. 13b und c). Die Schwellen der Rieswegsohle rufen ähnliche Störungen hervor. Da allgemein die Riessohle in Konkavkreisbögen durch die Zentrifugalkraft stärker in Anspruch genommen wird, so wird zur Be-

stimmung des Kleinstwertes des Bogendurchmessers an konkaven Gefällsbrüchen der Riesen allerart die Anwendung der Formel (74) empfohlen.

#### *Abschnitt D)*

Um die dynamische Berechnung und Prüfung der Leistungsfähigkeit einer Riese zu erleichtern, werden gewisse Vorbereitungen und zweckmässige Aufrisse erforderlich, die nun näher besprochen werden mögen.

1. Ist die Gradiante eine fallende Gerade, so ist ihre horizontale und vertikale Projektion durch Gleichung (75a), ist sie eine steigende Gerade, durch Gleichung (75b) bestimmt.

Ist in einem Gradientenvieleck die Neigung der Hinterseite grösser als die der Vorderseite ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ), als Übergang aus einer in die andere Neigung, so ist ein Konkavkreisbogen erforderlich, dessen Projektionen durch Gleichung (76) angegeben sind (Fig. 14); dabei ist die Vertikalprojektion ( $h$ ) negativ, da die Gradiante vom Bogenanfangspunkte bis zum Bogenendpunkte fällt. Beide Bogenendtangente zusammen weisen dieselben Projektionen (77) auf. Aus (76) und (77) ist sodann Gleichung (78) erhältlich, die die Tangentenlänge bestimmt. Als Kontrolle kann auch Gleichung (78a) dienen. Projektionen der Hintertangente sind durch Gleichung (79a) und der Vordertangente durch Gleichung (79b) bestimmt. Das negative Vorzeichen deutet auf das Fallen der Gradiante in der Gleitrichtung hin. Beispiel 6.

Fällt die Hinterseite in Gleitrichtung unter dem Winkel  $\alpha$ , und steigt die Vorderseite unter dem Winkel  $\beta$ , so ist ein Konkavkreisbogen am Gefällsbruche notwendig, auf dem das Holz vorerst abwärts, dann aber infolge der aufgespeicherten kinetischen Energie aufwärts gleitet (Fig. 15). Projektionen des Bogens sind durch Gleichung (81) angegeben. Die beiden Bogenendtangente zusammen weisen dieselbe Projektionen auf (82). Die Vertikalprojektion kann positiv, negativ, aber auch gleich Null sein, je nach dem Höhenunterschied der beiden Bogenendpunkte. Aus (81) und (82) geht dann die Tangentenlänge hervor (83). Gleichung (83a) kann als Kontrolle dienen. Durch Gleichung (84a) sind die Projektionen der Hintertangente, und durch Gleichung (84b) der Vordertangente bestimmt. Die Neigung der Bogensehne  $PK$  ist durch Gleichung (85) angegeben. Gleichung (86) und (87) bestimmen die Projektionen und die Neigung der Sehne  $PO$ , Gleichungen (88) und (89) die Projektionen und die Neigung der Sehne  $\overline{OK}$ . Beispiel 7.

Fallen gegen die Horizontale die beiden Nachbarseiten des Gradientenpolygons in der Gleitrichtung, und ist die Neigung der Hinterseite kleiner als die Neigung der Vorderseite ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), so ist ein Konvexkreisbogen am Gefällsbruche erforderlich (Fig. 16), dessen Projektionen durch Gleichung (90) angegeben sind. Die

beiden Bogenendtangente zusammen haben dieselben Projektionen (91). Aus Gleichungen (90) und (91) folgt sodann Gleichung (92), die die Tangentenlänge angibt. Gleichung (93a) bestimmt die Projektionen der Hintertangente und Gleichung (93b) die Projektionen der Vordertangente. Die Neigung der Bogensehne ist durch Gleichung (94) angegeben.

Steigt die Hinterseite in der Gleitrichtung unter dem Winkel  $\beta$ , und fällt die Vorderseite unter dem Winkel  $\alpha$ , so ist am Gefällsbruche ein Konvexkreisbogen erforderlich, dessen Projektionen durch Gleichung (95) angegeben sind (Fig. 17). Die beiden Bogenendtangente zusammen weisen dieselben Projektionen auf (96). Die Vertikalprojektion kann dabei positiv, negativ, und gleich Null sein, je nach dem Höhenunterschiede der beiden Bogenendpunkte. Aus Gleichung (95) und (96) geht dann die Tangentenlänge hervor (97). Die Projektionen der Hintertangente sind durch Gleichung (98a) und die der Vordertangente durch Gleichung (98b) gegeben. Die Neigung der Bogensehne  $PK$  ist durch Gleichung (99) bestimmt. Gleichungen (100) und (101) bestimmen die Projektionen und die Neigung der Sehne  $PO$ , und Gleichungen (102) und (103) die Projektionen und die Neigung der Sehne  $OK$ . Beispiel 8. Diese geometrischen Vorbedingungen erleichtern die Konstruktion des Gradienten- und Sehnenpolygons.

2. Das Polygon der Gradiante ist eigentlich das Rieslängenprofil, in dem nicht nur die Seiten, die einander in den Winkelpunkten  $U_1, U_2, U_3 \dots$  schneiden, sondern auch die Bögen an Gefällsbrüchen eingezeichnet sind (Fig. 18). Der Längen- und Höhenmasstab wird – da die Neigung der Gradiante bedeutend ist – gleich gewählt. Im oberen Teile des Aufrisses sind die Neigungen der Seiten und Längen ihrer horizontalen Projektionen angegeben. Die neben der durch jeden Winkelpunkt gezogenen Vertikale angegebenen Zahlen, bezeichnen die Koordinaten des betreffenden Winkelpunktes. Die unten im Aufrisse neben den üblichen Bezeichnungen eingetragenen Zahlen geben die Koordinaten der Bogenendpunkten, der Halbmesser- und Bogenlängen, der Tangentenlängen und Längen der geraden Strecken an. Damit der Aufriss nicht überladen wirkt, sind die Terrainverhältnisse, Objekte etc. (Fig. 18) weder angegeben, noch dargestellt.

3. Im Sehnenpolygon der Gradiante (Fig. 19) vertreten die Sehnen die Bögen an den Gefällsbrüchen. In der Regel vertritt nur eine Sehne den Bogen, der sich an zwei fallende oder zwei steigende Polygonseiten anlehnt, und je zwei Sehnen vertreten den Bogen, der sich auf eine fallende und eine steigende Seite (oder umgekehrt) anschmiegt. Im letzteren Falle schneiden einander die beiden Sehnen desselben Bogens in dem Berührungsbogenpunkt der wagrechten Tangente. Im oberen Aufrisstteile sind die Neigungen und Längen der Polygonseiten und Winkelpunktkoordinaten angegeben. Fig. 18 und 19 wurden nach Angaben der Beispiele 6, 7 und 8 konstruiert.

## Abschnitt E)

Um die Arbeitsfähigkeit einer Riese zu ermitteln, bzw. festzusetzen, pflege ich zwei Geschwindigkeitsdiagramme auf Grund zweier verschiedener Reibungszahlen, zu konstruieren. Diese Zahlen werden so gewählt, dass im Intervalle, das sie einschliessen, die erwartete, tatsächliche Reibungszahl bestimmt enthalten ist. In unserem Beispiele ist das Intervall  $0,25 \leq \mu \leq 0,30$  ausgewählt. Geschwindigkeiten des gleitenden Holzes in charakteristischen Profilen sind mittels genauerer u. annähernder Formeln berechnet und entsprechende Geschwindigkeitskurven konstruiert worden. Die Abweichungen der Resultate nach annähernder Formeln von den Resultaten nach genauern Formeln sind auf diese Weise augenscheinlicher. Die erste Annäherung erhielt ich auf Grund der im Punkte B) 1. festgesetzten Tatsache: Unter Ausserachtlassen der Zentrifugalkraft entsteht die Geschwindigkeitsänderung in einem oder auf einem Kreisbogen nicht, als gleite das Holz in oder auf dem Bogen selbst, sondern auf der zugehörigen Sehne. Unter dieser Voraussetzung wird die Geschwindigkeitsänderung beim Gleiten auf fallenden Sehnen und Geraden nach Formel (104) berechnet, die mit Formeln (44a), (46a) und (48) gleichwertig ist. Beim Gleiten auf einer steigenden Sehne oder Geraden gilt aber Formel (105), die mit Formeln (45a), (47a) und (49) gleichwertig ist. Auf horizontaler Sehne oder Geraden gilt Formel (106). In den angeführten Formeln bedeutet  $v_a$  die Anfangs- und  $v$  die Endgeschwindigkeit. Die Bruchzahl  $v^2 : 2g$  ist eine Länge; ihre Dimension wird also in Metern ausgedrückt. Weiter ist  $d$  die horizontale und  $h$  die vertikale Projektion der Geraden oder der Sehne, bzw. des zugehörigen Bogens. Die  $d$ -Projektion ist immer positiv, dagegen die  $h$ -Projektion positiv, falls die Gerade oder die Sehne steigt, negativ, falls beide fallen. Der wagerechten Gradienten entspricht auch eine unter der Reibungszahl  $\mu = \operatorname{tg} \tau$  gegen die Wagerechte geneigte Geschwindigkeitsänderung - Gerade.

In unserem Beispiele ist im Ausgangspunkt  $P_1$   $v_a^2 : 2g = 75$  m für  $\mu = 0,25$  und entsprechend  $v_a^2 : 2g = 50$  m für  $\mu = 0,30$  angenommen. In Tafel 5 sind die nach obigen Formeln berechneten Gleitgeschwindigkeiten in den bezeichneten Gradientenpunkten für  $\mu = 0,25$ , und in Tafel 6 für  $\mu = 0,30$  zusammengestellt (vergl. auch Fig. 19). Im Diagramm Fig. 20 entspricht Geschwindigkeitsänderungslinie für  $\mu = 0,25$  die AC-Linie, für  $\mu = 0,30$  die BF-Linie.

Genaueres ergeben die Formeln (56a) bis (59a). Zur Berechnung aber geeigneter sind (Seite 285):

Formel (56a) für das Abwärtsgleiten in Konkavkreisbogen

Formel (57a) für das Aufwärtsgleiten in Konkavkreisbogen

Formel (58a) für das Abwärtsgleiten auf Konvexkreisbogen

Formel (59a) für das Aufwärtsgleiten auf Kovexkreisbogen

$\alpha_a$  bzw.  $\beta_a$  bezeichnet die Neigung bzw. die Steigung der Anfangs- und  $\alpha$ , bzw.  $\beta$  der Endtangente. Die für unser Beispiel übersichtliche Berechnung der Gleitgeschwindigkeiten nach diesen Formeln bringt Tafel 7 für  $\mu = 0,25$  und Tafel 8 für  $\mu = 0,30$ . An Fig. 20 ist Geschwindigkeitsänderungslinie für  $\mu = 0,25$  die  $AD$ -Linie und für  $\mu = 0,30$  die  $BG$ -Linie. Diese zwei Linien genügen zur Arbeitsfähigkeitsfeststellung der Riese im angegebenen Reibungsintervalle. Die erste Linie schneidet die Gerade  $v^2 : 2g = 0$  im Punkte  $D$ , und die zweite im Punkte  $G$ . Zwischen diesen beiden Punkten, je nach Sortiment und tatsächlicher Reibung, wird das ankommende Holz in der Riese stecken bleiben, oder vielmehr aus der Riese auf den danebenliegenden Verleerplatz abrollen. Die Länge dieser Auslaufstrecke beträgt rund 190 m. Hätten wir rechts vom Punkt  $O_2$  eine wagerecht laufende Gerade  $O_2O'_2$  als Gradiante gewählt, hätte sich der Auslauf auf 113 m verkürzt ( $CD'$ ). Der Punkt  $D'$  ist leicht zu bestimmen, da der wagerechten Gradiante eine unter dem Reibungswinkel (gegen die Wagerechte) geneigte Gerade als Geschwindigkeitslinie entspricht.

In das Diagramm sind noch zwei gestrichelte Geschwindigkeitslinien u. z.  $AE$  (bzw.  $AE'$ ) für  $\mu = 0,25$ , und  $BH$  für  $\mu = 0,30$  eingezeichnet. Diese Linien veranschaulichen die Ergebnisse der genaueren Gleitgeschwindigkeitsberechnung der Reihe nach wie folgt.

a) Die Angaben für die  $AE$ -Linie sind unter 1 die Geschwindigkeit am Endpunkte  $K_1$  des Konkavkreisbogens  $P_1K_1$  nach Formel (25), unter 2 am Endpunkte  $P_2$  der steigenden Gerade  $K_1P_2$  nach Formel (105), unter 3 am Endpunkte  $K_2$  des Konvexkreisbogens  $P_2K_2$  nach Formel (42) berechnet. Die Geschwindigkeit auf der unter Reibungswinkel geneigten Geraden  $K_2P_3$  bleibt unverändert. Unter 5 ist die Geschwindigkeitsberechnung am Endpunkte  $K_3$  nach Formel (12) durchgeführt.

b) Die Angaben für die  $BH$ -Linie sind unter 1 die Geschwindigkeit am Endpunkte  $K_1$  des Konkavkreisbogens  $P_1K_1$  nach Formel (25), und unter 2 am Endpunkte  $P_2$  der steigenden Gerade  $K_1P_2$  nach Formel (105) berechnet.

Die auf Grund dieser genaueren Berechnung konstruierten Geschwindigkeitslinien dienen nur zur Genauigkeitsprüfung der Ergebnisse nach den annähernden Formeln. Aus dieser Prüfung ergibt sich, dass die Ergebnisse der annähernden Formeln (56a) bis (59a), die durch die ausgezogenen Linien  $AD$  und  $BG$  auf Fig. 20 dargestellt sind, den Ergebnissen nach genaueren Formeln am nächsten liegen. Die Abweichungen sind ohne praktische Bedeutung, da die Bewältigung der mässigen Gleitgeschwindigkeiten in der Auslaufstrecke und das Abrollen des gleitenden Holzes auf den Verleerplatz durch zweckmässige Vorkehrungen und künstliche Vorrichtungen bekanntlich nicht schwierig ist.

Da die Punktordinaten der Geschwindigkeitslinien auf Fig. 20 nur die Längen  $v^2 : 2g$  darstellen, so geben sie die Beträge der

Gleitgeschwindigkeiten nicht unmittelbar an. In den meisten Fällen wird die unmittelbare Angabe der Gleitgeschwindigkeit auch nicht notwendig sein. Wenn das herabgleitende Holz längs der Förderstrecke nirgends stecken bleibt, so ist dies ein Beweis, dass die Punktordinaten  $v^2 : 2g$  der Geschwindigkeitslinien längs dieser Strecke überall von Null verschieden sind. Ebenso wird das gleitende Holz in der Auslaufstrecke zur Ruhe gelangen, wenn die Achse  $v^2 : 2g = 0$  im Bereiche der Auslaufstrecke von beiden Geschwindigkeitslinien (für den oberen und den unteren Grenzwert der Reibungszahl) geschnitten wird. Hingegen soll das Geschwindigkeitsmaximum der Förderstrecke überall unter 40 m/sec bleiben, d. h. die Punktordinaten der Geschwindigkeitslinien längs der Förderstrecke ( $v^2 : 2g$ ) dürften nirgends die Höhe von 80 m erreichen.

### Abschnitt F)

Schon bei der Trassierung der forstlichen Riesen ist auf das spätere Einlegen der Bögen an Gefällsbrüchen Bedacht zu nehmen und zu überlegen, welche von den Seiten des Gradientenpolygons als Bogensehnen dienen könnten. Dann wird sich die Terrainlinie an das bereits beschriebene Sehnenpolygon gut anfügen. Die Bögen selbst werden erst durch Bestimmung oder Absteckung der Haupt- und Zwischenpunkte völlig gekennzeichnet, u. z. wie folgt.

1. Der Bogenanfangs- und Endpunkt ist durch die Tangentenlänge  $T$  angegeben, die bei fallendem oder steigendem Konkavkreisbogen durch Gleichung (78) genau, und durch Gleichung (107) annähernd bestimmt ist. Sollen diese Punkte schon bei der Trassierung abgesteckt werden, so kann man wie folgt verfahren (Fig. 21). In der Umgebung des Gradientenwinkelpunktes (da der Winkel selbst in der Regel nicht zugänglich ist) steckt man eine angemessene ( $a$ ) lange Hilfsgerade  $P'K'$  ab, die eine Neigung in den Grenzen  $a_2 < \varepsilon < a_1$  haben kann. Aus der Sinusregel folgen sodann die Beziehungen (108), mittels welcher die für den Bogenanfangs- und Endpunkt massgebenden Längen  $u$  und  $v$  aus Gleichung (109) berechnet werden.

Zur Bestimmung der Tangentenlänge eines fallenden oder steigenden Konkavkreisbogens dient Gleichung (92), annähernd auch Gleichung (110). Will man den Bogenanfangs- und Endpunkt schon während der Trassierung abstecken, so kann dies wieder mittels einer Hilfsgerade, angemessener Länge ( $a$ ) und der Neigung in den Grenzen  $a_1 < \varepsilon < a_2$  erfolgen, indem man mittels Gleichung (111) die zur Absteckung erforderlichen  $u$  und  $v$  Längen aus Gleichung (112) vorher berechnet (Fig. 22).

Hat man es mit einem Konkavkreisbogen am Schnittpunkte einer fallenden und steigenden Tangente zu tun, so können die Tangentenlängen aus Gleichungen (83 und (83a) genau, annähernd aus Gleichung (113) bestimmt werden. Will man den Bogenanfangs-

und Endpunkt schon bei der Trassierung abstecken, so erreicht man dies abermals mittels einer Hilfsgerade angemessener Länge ( $a$ ), die eine Neigung in den Grenzen  $\alpha > \varepsilon < \beta$  haben kann (Fig. 23), indem man vorher die erforderlichen  $u$  und  $v$  Längen aus Gleichung (115), bzw. aus Gleichungen (114a) und (114b) berechnet. Das Pluszeichen in der Gleichung (114a) gilt, wenn die Hilfsgerade fällt, und das Minuszeichen, wenn sie steigt. Die umgekehrte Vorzeichenregel gilt für Gleichung (114b). Den Punkt  $O$ , in dem der Bogen eine wagerechte Tangente hat, steckt man mittels der Sehne  $PO$  oder  $OK$  ab, d. h. durch Anwendung der Gleichung (86) bis (89). Ist die Absteckung dieses Punktes möglich, so zerfällt der Bogen in zwei Stücke, für die auch die Gleichungen (78), (107), (108) und (109) gelten.

Falls der Konvexkreisbogen eine wagerechte Tangente hat (Fig. 24), so ist die Anfangs- oder Endtangentiallänge durch Gleichung (97) genau, und durch Gleichung (113) annähernd angegeben. Die Absteckung des Bogenanfangs- und Endpunktes bei der Trassierung geschieht abermals mittels einer Hilfsgerade angemessener Länge ( $a$ ), die eine Neigung  $\varepsilon$  in den Grenzen  $\beta > \varepsilon < \alpha$  haben kann, indem man vorher die erforderlichen  $u$  und  $v$  Längen aus Gleichung (116), mit Hilfe der Gleichungen (115a) und (115b) berechnet. In der Gleichung (115a) kommt das Minuszeichen in Betracht, wenn die Hilfsgerade fällt und das Pluszeichen, wenn sie steigt. Umgekehrt in der Gleichung (115b). Punkt  $O$ , in dem der Bogen eine wagerechte Tangente hat, kann zweckmässig mittels der Sehne  $PO$  oder  $OK$  bestimmt werden, durch Anwendung der Gleichungen (100) bis (103). Gestatten die Bodenverhältnisse die Absteckung dieses Punktes, so zerfällt der Bogen in zwei Stücke, für die auch Gleichungen (90) bis (94) gelten.

2. Anfangs-, End- und der Berührungspunkt der wagerechten Tangente  $O$  sind die Hauptbogenpunkte am Gefallsbruche. Bei längeren Bögen ist jedoch die Bestimmung oder Absteckung noch einiger Zwischenpunkte unerlässlich.  $\lambda$  sei der Abstand, in dem man diese Zwischenpunkte 1, 2, 3 ...  $n$  abzustecken gedenkt (Fig. 25); ferner sei die Lage des Ausgangsbogenpunktes  $O$  und die Neigung der Tangente im diesem Punkte ( $\alpha_0$ ) bekannt. Die Neigungen der Tangenten in den Bogenpunkten 1, 2, 3 ...  $n$  seien  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ , und die Neigungen der Sehnen zwischen diesen Punkten  $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ . Es sei ferner  $\Delta a = \widehat{\lambda} : r$  der Zentriwinkel des Bogens  $\widehat{\lambda}$ . Dann gelten die Beziehungen (117a), (117b) und (117c). In diesen Formeln gilt das Plusvorzeichen, wenn die Neigungen der Gradienten in dem Bogen vergrößert (Fig. 25), und das Minusvorzeichen, wenn sie verkleinert werden (Fig. 26). Wählt man nun die Differenz zwischen der Bogen- ( $\widehat{\lambda}$ ) und der Sehnenlänge ( $\lambda$ ) etwa  $\Delta = \widehat{\lambda} - \lambda \doteq 0,001$  m, also so klein, dass sie praktisch nicht in Betracht kommt, so entsteht Gleichung (118), die den dieser Bedingung und dem gewählten Kreisbogendurchmesser ( $r$ ) entsprechenden Abstand



( $\lambda$ ) bestimmt. Die Neigungen der Sehnen können praktisch genügend genau nach Gleichung (119) berechnet werden. Erteilt man der  $n$ -ten  $\lambda$ -langen Seite nur die durch Gleichung (120) bestimmte Neigung, so liegt der auf diese Weise bestimmte Punkt nicht mehr in dem Bogen, sondern in der Endtangente; mit dem ( $n - 1$ )-ten Bogenpunkte bestimmt also dieser Punkt die Bogentangente.

#### Beispiel 10.

3. Übergangskurve. Im allgemeinen lehnt sich ein Kreisbogen am Gefällsbruche auf eine Gerade der Gradiante, die eine Neigung gegen die Wagerechte  $\eta \neq 0$  aufweist (Fig. 27).  $P_0$  sei der Punkt, im dem diese Gerade den Kreisbogen ohne Übergangskurve berührt. Um das Einlegen einer Übergangskurve, z. B. der kubischen Parabel (Gleichung 120), zwischen Gerade und Kreisbogen zu ermöglichen, ist eine Verrückung des Kreisbogens dem Mittelpunkte zu (oder der Gerade in entgegengesetzter Richtung) um einen gewissen Betrag  $m$  erforderlich. Der Anfangspunkt ( $A$ ), der in dem so entstandenen Zwischenraum eingelegten kubischen Parabel liegt in der Gerade,  $l/2$  weit ab vom erwähnten  $P_0$ -Punkte, und ihr Endpunkt ( $P$ ) in entgegengesetzter Richtung, von  $P_0$  ebenso entfernt. Der Punkt  $P$  ist zugleich der erste Kreisbogenpunkt. Die Länge des Übergangsbogens  $l = \widehat{AP}$  wird gewöhnlich der Bogenprojektion in der anschliessenden Geraden (wegen ihrer geringen Krümmung) gleichgestellt. Diese Länge soll mindestens der Länge des längsten gleitenden Holzes gleich sein (also etwa  $l \geq 8$  m).

Im Falle der kubischen Parabel sind die Koordinaten des  $P$ -Punktes durch Gleichung (121), die Neigung der Tangente in diesen Punkte durch Gleichung (122), und die Verrückung des Bogens (oder der Gerade)  $m$  durch Gleichung (123) angegeben. Die Koordinaten des  $E$ -Punktes sind durch Gleichung (124) bestimmt. Die Lage des  $P$ -Punktes, gegenüber dem  $P_0$ -Punkte, ist durch die Sehne  $P_0P = 1/2 l$  und deren Neigung durch Gleichung (125) angegeben. Die Neigung ( $\vartheta$ ) der Sehne  $AE$  gegen die Abszissenachse, und ihre Neigung ( $\gamma'$ ) gegen die Wagerechte, sind durch die Gleichung (126) bestimmt.

Die Übergangskurve im allgemeinen soll um so länger sein, je grösser die Gleitgeschwindigkeit ist. Auf Tafel 9 sind die Angaben über eine  $l = 8$  m lange, und auf Tafel 10 über eine  $l = 20$  m lange Übergangskurve nach den letzteren Formeln zusammengestellt. Beispiel 11.

Die Entfernung zweier Kreisbögen, entgegengesetzter Krümmung, soll wenigstens so gross sein, dass das Einlegen der beiden Übergangsbögen möglich ist. Bei der Berechnung der Gleitgeschwindigkeit in den Übergangsbögen wird man praktisch nicht viel fehlgreifen, wenn man die eine Hälfte des Übergangsbogens der Geraden und die andere Hälfte dem Kreisbogen anschliesst.