

Brzina klizanja u zavojcama šumskih klizina

Flögl, Stanko

Source / Izvornik: **Glasnik za šumske pokuse: Annales pro experimentis foresticis, 1957, 13, 281 - 350**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:108:593701>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-20**



Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Forestry and Wood Technology](#)



BRZINA KLIZANJA U ZAVOJICAMA ŠUMSKIH KLIZINA

GLEITGESCHWINDIGKEIT IN KURVEN DER FORSTRIESEN

1. Uvod. — *Einleitung*
2. Gibanje u luku kružne vijčanice — *Bewegung im Bogen einer zylindrischen Schraubenlinie*
3. Sile, koje djeluju na teško tijelo u zavojicama šumskih klizina — *Kräfte die in Kurven der forstlichen Riesen auf einen schweren Körper einwirken*
4. Sile, koje djeluju na teško tijelo u zavojici klizine užlijebljenog profila — *Kräfte die in Kurven der Rinnenprofilriese auf einen schweren Körper einwirken*
5. Mijena brzine klizanja teškog tijela u zavojici klizine užlijebljenog profila — *Gleitgeschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in Kurven der Rinnenprofilriese*
6. Pregled formula za približno izračunavanje brzine klizanja u zavojici klizine užlijebljenog profila — *Formeln-Übersicht für die annähernde Berechnung der Gleitgeschwindigkeit in Kurven der Rinnenprofilriese*
7. Primjena formula iskazanih u prijašnjoj točki — *Anwendung der in vorherigem Punkt angeführten Formeln*
8. Sile, koje djeluju na teško tijelo u zavojici klizine sa pragovima — *Kräfte die in Kurven der Schwellenprofilriese auf einen schweren Körper einwirken*
9. Mijena brzine klizanja teškog tijela u zavojici klizine sa pragovima — *Gleitgeschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in Kurven der Schwellenprofilriesen*
10. Pregled formula za izračunavanje brzine klizanja u zavojici klizine s pragovima — *Formeln-Übersicht für Berechnung der Gleitgeschwindigkeitsänderung in Kurven der Schwellenprofilriese*
11. Primjena formula iskazanih u prijašnjoj točki — *Anwendung der in vorherigem Punkt angeführten Formeln*
12. Stacionarna brzina i konstanta klizine u zavojici — *Stationäre Geschwindigkeit und Konstante der Rieskurve*

Radnja primljena na štampanje 15. X: 1953.

1. UVOD — EINLEITUNG

Računsko procjenjivanje mijene brzine klizanja u zavojicama šumskih klizina — a ima ih raznih konstrukcija. — skopčano je s teškoćama. Zbog toga su se obično osnivale i gradile takve zavojice bez računa na temelju općenitih uputstava i pravila, s iskustvom stečenim i objelodanjenim u raznim stručnim časopisima i knjigama. (Među ovima preglednošću se odlikuje knjiga dr. Josefa Glatza: *Riesewege und Drahtseilriesen*, Wien 1920.). No ovakva empirička pravila, iako dragocjena, obično su preširoka. Samo po njima teško se može dokazati sposobnost rada osnovane zavojice, u konkretnom slučaju klizine, prije njezina izvođenja. Teorijsko izlaganje o klizanju na šumskim klizinama, izneseno u knjizi dr. L. Häuske: *Theorie der Riesen* (Wien 1914.), pa i u drugoj knjizi istog pisca: *Riesanlagen und Seilbahnen* (Wien 1933.), ne rješava to pitanje. Poradi toga sam već i prije nastojao samostalno riješiti to pitanje, t. j. postaviti točnije formule, po kojima će se moći računski ispitati mijena brzine klizanja u zavojicama šumskih klizina, i to u radnji: O putoklizini u krivulji, odštampanoj u Glasniku za šumske pokuse br. 3, g. 1931. Ta se radnja bavi uostalom i drugim pitanjima u svezi, a označena je u njoj i meni onda poznata literatura. Kod rješavanja postavljene zadaće po mogućnosti sam uvažio sve činioce od utjecaja, strogo se držao zakona mehanike i točno računao po matematskim pravilima u svezi. Specificirao sam račun i prema konstrukciji klizine. No ovako po mogućnosti strogo naučno izvedene formule ispale su prilične komplicirane, za neposrednu praktičnu upotrebu preteške i neprikladne. Prema tome svrha, da se unaprijedi i olakša praktično i stručno osnivanje zavojica, dakle i šumskih klizina uopće, s ovom radnjom još nije bila potpuno postignuta. Dalji rad u tom smjeru odložio sam na kasnija vremena u nadi, da ću moći osnažiti valjanost teorijski izvedenih formula i eksperimentalnim rezultatima. To mi nije bilo suđeno, koje zbog financijskih prilika, koje zbog historijskog zbivanja od tridesetih godina naovamo. Da onaj trud ne bude ipak bez praktične koristi, u ovoj radnji, gdje je bilo potrebno, izvodim i iznosim nove jednostavnije formule, ali i tako, da se po tim formulama lakše izračunati rezultati praktički dovoljno točno pokrivaju s rezultatima onih točnijih i kompliciranijih formula. Kod izvođenja oslonio sam se na mehaniku klizanja, iznesenu i objašnjenu u prvoj radnji. Djelomično ipak, da se ne prekida izlaganje od poznatog do nepoznatog, iznosim tu mehaniku ponovo i ovdje, i to stim opravdanije, što je to u prvoj radnji učinjeno gdje gdje i suviše kratko i sabito. Osim rečenog ova radnja dakle i objašnjava prvu radnju, ona je i popunjuje, jer iznosi i slučajeve klizanja, kojih tamo nema.

Rezultati ove radnje, t. j. formule za račun brzine klizanja u zavojicama, pregledno su poredane u točki 6 za klizine uzlijebljenog profila, a u točki 10 za klizine s pragovima.

U točki 6 iznesene formule redom su nove te imaju zamijeniti točnije formule (86), (89), (90), (93), (96), (98), (100), (101), (103) i (106) prve radnje. U daljoj točki 7 ove radnje pokazano je, kako se računa po novim približnim formulama, i kako se dobiveni rezultati pokrivaju s rezultatima po prijašnjim točnijim, ali i kompliciranijim formulama.

U točki 10 iznesene formule uglavnom se već nalaze odštampane u prvoj radnji. Ovdje su poprimile nešto zgodniji oblik za računanje. Dodane su *nove* točnije formule (68 d), (70), (71), (73), (74), (77) i (78) i približne formule (73 a) i (74 a). Ove točnije prijašnje i nove formule uglavnom su već takva oblika, da se mogu neposredno i praktički upotrebiti. U daljoj točki 11 ove radnje pokazano je na primjerima, kako se računa po ovim formulama.

Podužna os zavojice šumske klizine po pravilu pokazuje luk kružnice u horizontalnoj projekciji. On i jest luk kružnice, ako se zavojica nalazi u horizontalnoj ravnini. Pada li pak podužna os zavojice ili se uspinje u smjeru klizanja, promatrana u prostoru, pokazuje luk kružne vijčanice. Težište teškog tijela, koje klizi zavojicom šumske klizine, u općenitom slučaju dakle opisuje luk prostorne krivulje, kružne vijčanice. Poradi toga u točki, koja slijedi, najprije promatramo gibanje u luku kružne vijčanice te utvrđujemo potrebne i dovoljne sile, koje će djelujući na tvarno tijelo (tvarnu točku) uzrokovati takvo gibanje.

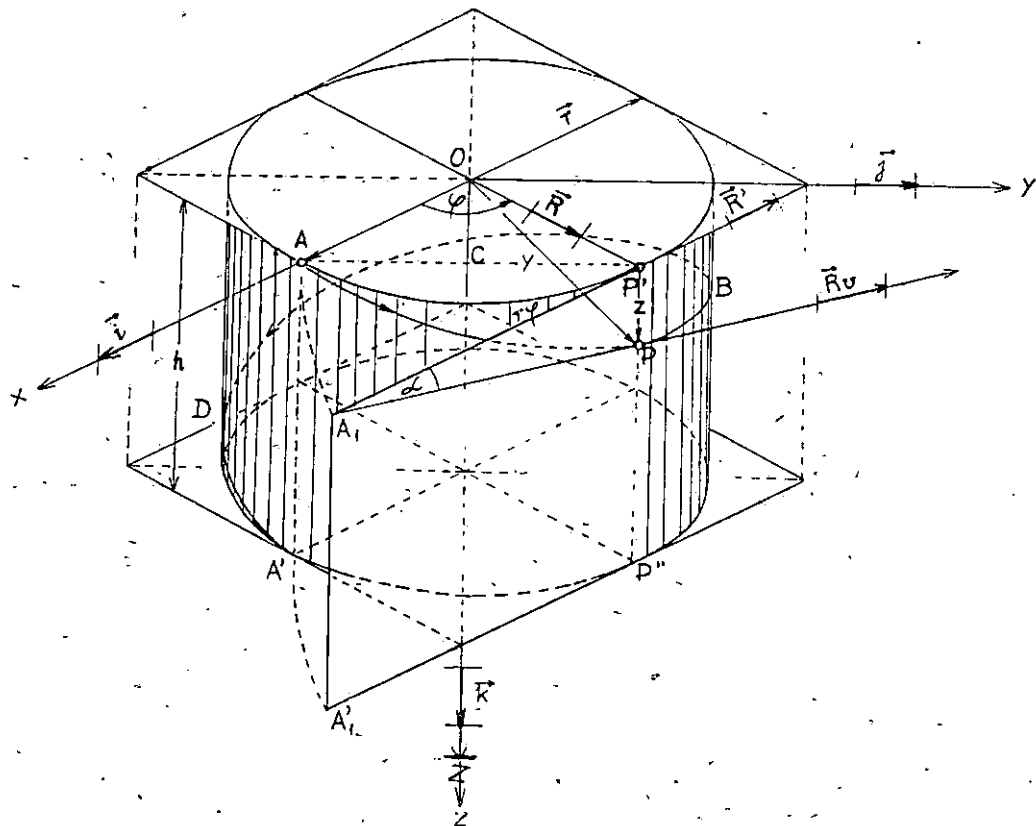
2. GIBANJE U LUKU KRUŽNE VIJČANICE — BEWEGUNG IM BOGEN EINER ZYLINDRISCHEN SCHRAUBENLINIE

Giba li se tvarna točka (P , sl. 1) na plaštu valjka polumjera r pod stalnim nagibom α prema horizontali, ona opisuje prostornu krivulju, t. z. kružnu vijčanicu (A, P, B, C, D, A'). U horizontalnoj ravnini projekcija te stvarne točke (P') istodobno opisuje luk kružnice polumjera r . Puna kružnica nastaje, kad se tvarna točka spusti ili digne na plaštu valjka za t. z. visinu hoda h , t. j. kad se vrati u vertikalnu zraku na plaštu valjka, s koje je pošla ($h = AA'$). Zamislimo li plašt valjka presječen duž te zrake (AA') i razvijen u ravninu (A, A'), dobivamo pravokutnik, kome je dužina podnice jednaka dužini oboda baze valjka ($2r\pi$), a visina visini hoda h . U tom pravokutniku vijčanica poprima oblik diagonale (A, P, A') nagiba α prema horizontali. U pravokutnom prostornom koordinatnom sustavu, s ishodištem u osi valjka, povoljna točka vijčanice P zbog toga ima koordinate (sl. 1):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{i} \quad z = r \varphi \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Amplituda φ je funkcija vremena:

$$\varphi = f(t). \quad (2)$$



Sl. — Fig. 1.

Koordinatni sustav odabrali smo tako, da os valjka, dakle i os z leži u apsolutnoj vertikali, a osi x i y u horizontalnoj ravnini. Neka jedinični vektori \mathbf{i}^* , \mathbf{j} i \mathbf{k} ($i = 1, j = 1, k = 1$) orijentiraju te osi. Vektorska jednadžba

$$\vec{OP} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{i}r \cos \varphi + \mathbf{j}r \sin \varphi + \mathbf{k}r \varphi \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

određuje onda radijvektor povoljne točke vijčаницe P . Projekcija tog radijevktora u horizontalnoj ravnini opet je radijvektor:

$$\vec{OP}' = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = r(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) = r \cdot \mathbf{R}, \quad (4)$$

iznosa, koji je jednak polumjeru baze valjka: $OP' = r$. Jedinični vektor

$$\mathbf{R} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \quad (5)$$

orijentira radijvektor \vec{OP}' . Poradi toga možemo napisati jednadžbu (3) i kraće:

$$\vec{OP} = r \mathbf{R} + r \mathbf{k} \varphi \operatorname{tg} \alpha. \quad (3a)$$

Deriviramo li ovu jednadžbu po vremenu, dobivamo vektor brzine tvarne točke u točki vijčаницe P :

$$\mathbf{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = r \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} + r \mathbf{k} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6)$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, nije nego kutna brzina, kojom projekcija P' opisuje kružnicu, ili kutna brzina, kojom tvarna točka rotira oko osi valjka, kad opisuje vijčanicu.

Kako je:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{d\varphi} \cdot \omega, \text{ a}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\varphi} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi = \mathbf{i} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \mathbf{j} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \mathbf{R}', \quad (7)$$

to (6) prelazi u:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}' r \omega + \mathbf{k} \operatorname{tg} \alpha \cdot r \omega. \quad (8)$$

Jedinični vektor \mathbf{R}' (7) razlikuje se od jediničnog vektora \mathbf{R} (5) samo po amplitudi, za 90° . Oba vektora leže u horizontalnoj ravnini, okomito jedan prema drugome. Vektor \mathbf{R} orijentira radijvektor, a vektor \mathbf{R}' tangentu u točki kružnice P' . Kako pak jedinični vektor \mathbf{R}' orijentira i horizontalu, a jedinični vektor \mathbf{k} vertikalu, to prvi član zdesna u (8) predočuje horizontalnu komponentu

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{R}' r \omega, \quad \mathbf{v}_v = r \omega, \quad (9)$$

* masna slova označuju vektore

a drugi član

$$v_z = k \operatorname{tg} \alpha \cdot r \omega, \quad v_z = r \omega \operatorname{tg} \alpha = v_h \operatorname{tg} \alpha \quad (10)$$

vertikalnu komponentu vektora brzine \mathbf{v} . Iznos tog vektora jest (izlazi iz 8 i 9):

$$v = r \omega \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = v_h : \cos \alpha.$$

Dakle je

$$v_h = v \cdot \cos \alpha. \quad (11)$$

Jedinični vektor (\mathbf{R}_v) vektora brzine (\mathbf{v})

$$\mathbf{R}_v = \frac{\mathbf{v}}{v} = \mathbf{R}' \cos \alpha + \mathbf{k} \sin \alpha \quad (12)$$

orijentira ujedno tangentu u točki vijčанице P .

Ubrzanje je vremenski derivat brzine. U ovom je dakle slučaju

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r \frac{d\mathbf{R}'}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \omega + r \mathbf{R}' \frac{d\omega}{dt} + r k \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (13)$$

Kako je

$$\frac{d\mathbf{R}'}{d\varphi} = -\mathbf{i} \cos \varphi - \mathbf{j} \sin \varphi = -\mathbf{R} \quad (\text{usp. 7})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad a \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad \text{kutno ubrzanje,}$$

to (13) prelazi u:

$$\mathbf{a} = -r \mathbf{R} \omega^2 + r (\mathbf{R}' + k \operatorname{tg} \alpha) \varepsilon. \quad (13a)$$

Kako je nadalje (9, 11)

$$r \omega^2 = \frac{v_h^2}{r}, \quad a \quad r \varepsilon = \frac{d}{dt} (r \omega) = \frac{d}{dt} v_h = \dot{v} \cdot \cos \alpha,$$

to je dalje:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R} \frac{v_h^2}{r} + (\mathbf{R}' + k \operatorname{tg} \alpha) \dot{v} \cos \alpha$$

i konačno:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R} \frac{v_h^2}{r} + (\mathbf{R}' \cos \alpha + \mathbf{k} \sin \alpha) \dot{v}. \quad (14)$$

Ubrzanje ima dakle dvije komponente. Prva komponenta:

$$a_c = -\mathbf{R} \frac{v_h^2}{r}, \quad \text{iznosa} \quad a_c = \frac{v_h^2}{r}, \quad (15)$$

usmjerena je u suprotnom smjeru radijvektora (r), dakle okomito prema osi valjka vijčanice. Druga komponenta

$$a_t = (R' \cos \alpha + k \sin \alpha) \dot{v}, \text{ iznosa } a_t = \dot{v} \quad (16)$$

ima smjer brzine (v), dakle i smjer tangente u promatranoj točki vijčanice (P).

Iz ovog se razlaganja vidi: kad se giba tvorna točka mase m , opisat će kružnu vijčanicu stalnog nagiba (α) samo u slučaju, ako sve sile, koje djeluju na nju, u svakom času rezultiraju samo silu:

$$S = ma = -R \frac{mv_h^2}{r} + (R' \cos \alpha + k \sin \alpha) m \dot{v}. \quad (17)$$

Prva komponenta te sile:

$$N = -R \frac{mv_h^2}{r}, \text{ iznoša } N = \frac{mv_h^2}{r} \quad (18)$$

jest t. zv. *centripetalna sila*. To je horizontalna sila, koja sili tvarnu točku da kruži oko osi valjka. Druga komponenta:

$$T = (R' \cos \alpha + k \sin \alpha) m \dot{v}, \text{ iznosa } T = m \dot{v}, \quad (19)$$

je tangencijalna sila, jer djeluje u tangenti vijčanica, te ubrzava ili usporuje gibanje na plaštu valjka. Ta druga komponenta može biti i jednaka ništici, ako je tangencijalno ubrzanje jednako ništici ($a_t = \dot{v} = 0$). U tom slučaju tvorna točka opisuje vijčanicu *jednoličnom brzinom* c , jer iz diferencijalne jednadžbe $dv = 0$ izlazi $v = c$ konstans. (20).

Tangencijalna sila može, a centripetalna sila ne može biti jednaka ništici, ako se želi, da tvorna točka opisuje kružnu vijčanicu. Ta je naima sila potrebna, da se svlada tromost, kojom se tvorna točka opire kruženju.

3. O SILAMA, KOJE DJELUJU NA TEŠKO TIJELO U ZAVOJICAMA ŠUMSKIH KLIZINA — KRÄFTE DIE IN KURVEN DER FORSTLICHEN RIESEN AUF EINEN SCHWEREN KÖRPER EINWIRKEN

Kod šumskih klizina postizavamo centripetalnu silu ili samo pomoću *poprečnog nagiba* (β), t. j. pomoću nagiba podloge klizanja prema središtu, u radijalnom smjeru zavojice, ili pomoću poprečnog nagiba i vertikalne stijene vodilice, zbite od oblica i postavljene na vanjski rub podloge klizanja. Zbog poprečnog nagiba podloge nastaje komponenta težine tijela, usmjerena prema središtu kruženja, koja vrši funkciju centripetalne sile. U istoj zavojici klize razni dapače i isti sortimenti raznim brzinama pod raznim atmosferskim prilikama. Kako je pak centripetalna sila funkcija brzine (usp. 18), u istom profilu iste zavojice bit će potrebni poprečni nagibi raznih iznosa, da može nastati za centripetalnu silu dovoljno velika komponenta.

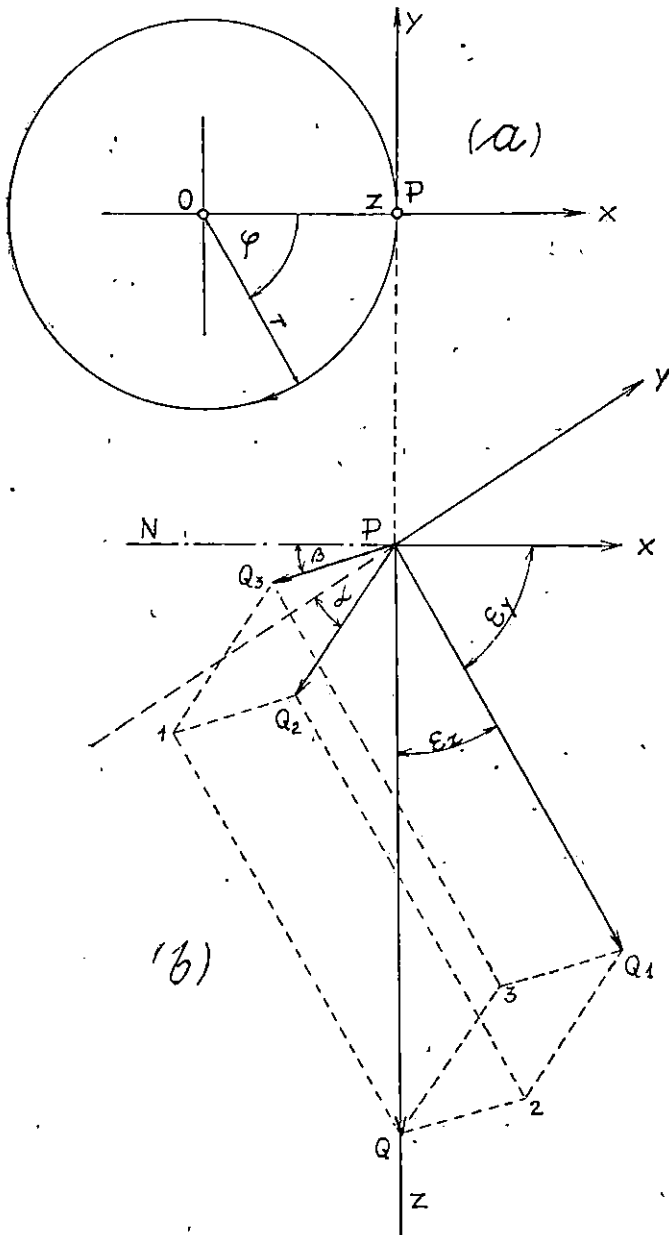
težine tijela. Poradi toga, kad želimo postići centripetalnu silu isključivo poprečnim nagibom, dajemo klizini u zavojici oblik dubokog i prostranog žlijeba (na pr. kod drvenog točila žlijeb polukružnog profila, riža). T. zv. *putoklizina* (to je vještački trasirana i izgrađena šumska klizina u obliku puta) po pravilima ima samo jednostrešno nagnutu podlogu prema središtu zavojice, t. j. poprečan nagib samo jednog i to stalnog iznosa. Takav poprečni nagib prouzročit će centrifugalnu silu potrebnog i dovoljnog iznosa samo možda u jednom jedinom slučaju sortimenta i brzine klizanja. U svim ostalim slučajevima bit će potrebna još spomenuta vertikalna stijena vodilica, da se postigne centripetalna sila potrebnog i dovoljnog iznosa. Na tu stijenu naime prisanja se drvo, kad klizi zavojicom, te izaziva horizontalnu reakciju, centripetalnu silu, koja ga skreće prema središtu kruženja.

Tangencijalnu silu u zavojicama šumskih klizina postizavamo pomoću uzdužnog nagiba (α), udaršenog prema željenom efektu. Zbog tog nagiba nastaje naime komponenta težine tijela, usporedna s podlogom u uzdužnom smjeru, koja vrši funkciju tangencijalne sile. Ta komponenta može biti istog ali i suprotnog smjera od smjera klizanja, različna od ničice, ali i jednaka ničici, već prema uzdužnom nagibu u istom ili suprotnom smjeru klizanja te prema njegovu iznosu. Uz dovoljno veliki *uzdužni pad* ($+\alpha$) tangencijalna sila može biti tolika, da ne svladuje samo sve otpore, na koje nailazi, nego još i ubrzava brzinu klizanja. Nije li uzdužni pad u smjeru klizanja dovoljno velik, ili ga nema uopće ($\alpha = 0$), ili se dapače klizina uspinje u zavojici ($\alpha = -\alpha$), tangencijalna sila, ukoliko postoji, ili je preslaba da svladuje otpore, ili djeluje u suprotnom smjeru klizanja, dakle u sva tri slučaja koči brzinu klizanja.

Najprije promatramo i određujemo sile, koje nastaju i djeluju na teško tijelo zbog uzdužnog i poprečnog nagiba podloge šumske klizine u zavojici. Tijelo, koje klizi, smatramo $Q = mg$ kg teškom tvarnom točkom, mase m (sl. 2). Sa tom tvarnom točkom (P), povezali smo i ishodište pravokutnog koordinatnog sustava x, y, z . Taj se dakle koordinatni sustav giba zajedno sa tvarnom točkom. Pritom je os x uvijek radialno otklonjena od središta zavojice (O), os y uvijek horizontalno tangira valjak vijčanicice, a os z uvijek ima smjer apsolutne vertikale. Prema tome osi x i y uvijek određuju horizontalnu ravninu, a težina tvarne točke Q djeluje u pozitivnom smjeru osi z .

Zbog uzdužnog nagiba (α) i u smjeru tog nagiba nastaje komponenta težine tijela Q_2 , a zbog poprečnog nagiba (β) i u smjeru tog nagiba komponenta Q_3 . U okomici na obje ove komponente djeluje još treća komponenta težine tijela Q_1 , i to tako, da zajedno s prvim dvjema komponentama zadovoljava vektorsku jednadžbu:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q. \quad (21)$$



Sl. — Fig. 2.

Komponenta Q_2 leži u ravnini yz te zatvara kut α s'osi y ; komponenta Q_3 leži u ravnini xz te zatvara kut β s'osi x ; komponenta Q_1 djeluje u okomici na podlogu klizanja, t. j. okomito na ravninu Q_2Q_3 te zatvara kutove ε_x , ε_y i ε_z s'osima x , y i z . Prema tome koordinate ili projekcije komponenata Q_1 , Q_2 i Q_3 u osima x , y i z (usp. i sl. 2) jesu:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1x} &= Q_1 \cos \varepsilon_x, & Q_{2x} &= 0, & Q_{3x} &= -Q_3 \cos \beta \\ Q_{1y} &= Q_1 \cos \varepsilon_y, & Q_{2y} &= -Q_2 \cos \alpha, & Q_{3y} &= 0 \\ Q_{1z} &= Q_1 \cos \varepsilon_z, & Q_{2z} &= Q_2 \sin \alpha, & Q_{3z} &= Q_3 \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Koordinate ili projekcije težine tijela Q u osima x , y i z onda jesu:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Q_{1x} + Q_{2x} + Q_{3x} = Q_1 \cos \varepsilon_x - Q_3 \cos \beta = 0 \\ Q_y &= Q_{1y} + Q_{2y} + Q_{3y} = Q_1 \cos \varepsilon_y - Q_2 \cos \alpha = 0 \\ Q_z &= Q_{1z} + Q_{2z} + Q_{3z} = Q_1 \cos \varepsilon_z + Q_2 \sin \alpha + Q_3 \sin \beta = Q \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Komponente Q_1 , Q_2 i Q_3 čine paralelepiped sa četverokutnom bazom P , Q_2 , I , Q_3 i visinom $\overline{PQ_1}$. Diagonala tog paralelepipeda je težina tijela \overline{PQ} . Baza paralelepipeda nije pravokutan četverokut, jer je obično $\sphericalangle Q_2PQ_3$ manji od pravoga. Taj kut može biti i pravi, ali samo u specijalnom slučaju $\alpha = \beta = 0$, a može biti jednak i ništici, ali samo u specijalnom slučaju $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

Kako je $\overline{PQ_1}$ normala ravnine P , Q_2 , I , Q_3 te kutovi ε_x , ε_y i ε_z nisu nego kutovi priklona te ravnine prema osima x , y i z .

Jednadžbu ravnine, koja prolazi točkama:

$$\left. \begin{aligned} P(x_1 = 0, & \quad y_1 = 0, & \quad z_1 = 0) \\ Q_2(x_2 = 0, & \quad y_2 = -Q \cos \alpha, & \quad z_2 = Q \sin \alpha) \\ Q_3(x_3 = -Q \cos \beta, & \quad y_3 = 0, & \quad z_3 = Q \sin \beta) \end{aligned} \right\}$$

određujemo pomoću determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Q \cos \alpha & Q \sin \alpha & 1 \\ -Q \cos \beta & 0 & Q \sin \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rješenje ove determinante glasi:

$$x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \cos \beta + z \cos \alpha \cos \beta = 0 \quad (24)$$

te određuje traženu jednadžbu ravnine, u kojoj leže komponente Q_2 i Q_3 . Uz dalje oznake:

$$A = \cos \alpha \sin \beta, \quad B = \sin \alpha \cos \beta \quad \text{i} \quad C = \cos \alpha \cos \beta \quad (24a)$$

kutovi priklona te ravnine, dakle kutovi priklona njezine normale, vektora Q_1 , određeni su snošajima:

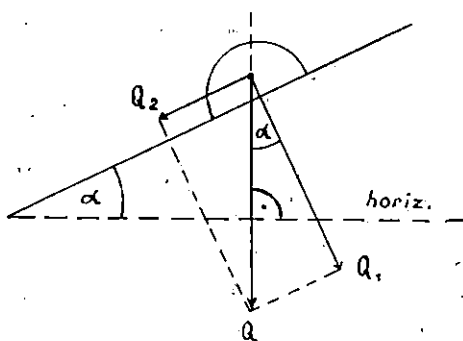
$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_x &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ \cos \varepsilon_y &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ \cos \varepsilon_z &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \end{aligned} \right\} (25)$$

Uvrstimo li vrijednosti $\cos \varepsilon_x$, $\cos \varepsilon_y$ i $\cos \varepsilon_z$ iz ovih jednažbi u jednažbe (23), iz njih možemo izračunati tri nepoznanice, iznose komponenta težina tijela Q s rezultatima:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{Q}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}, & Q_2 &= \frac{Q \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}, \\ Q_3 &= \frac{Q \operatorname{tg} \beta \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}. \end{aligned} \right\} (26)$$

Ovdje je mjesto, da napose istaknemo broj, koji se u dinamici šumskih klizina često ponavlja, a to je snošaj među iznosima komponenta Q_2 i Q_1 (usp. 26):

$$v = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}}. \quad (27)$$



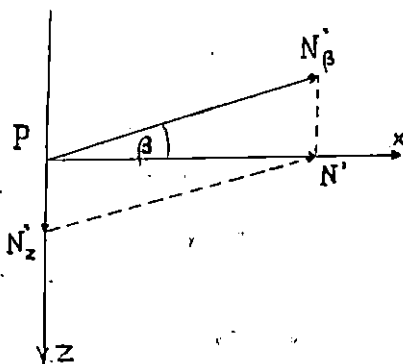
Sl. — Fig. 3.

Jednostranom nazivamo kosinu klizine, koja je nagnuta prema horizontalnoj ravnini samu u uzdužnom smjeru pod kutom α ; dvostranom pak nazivamo kosinu, koja je nagnuta prema horizontalnoj ravnini u dva međusobno okomita smjera: u uzdužnom smjeru pod kutom α , a u poprečnom smjeru pod kutom β .

Za $\beta = 0$ jednažba (27) prelazi u

$$v = \operatorname{tg} \alpha. \quad (27a)$$

Iz slike 3 se vidi, da je i to snošaj komponenta Q_2 i Q_1 težine tijela Q , ali na jednostranoj kosini, dakle na klizini trasiranoj u pravcu. I kao što govorimo, da je $v = \operatorname{tg} \alpha$ koeficijent nagiba jednostrane kosine, klizine trasirane u pravcu, tako kažemo, da je v , definiran formulom (27), koeficijent nagiba dvostrano nagnute kosine, klizine trasirane u luku kružnice, u zavojici. Formula (27) je šira, a formula (27a) je uža definicija koeficijenta nagiba kosine podloge klizine.



Sl. — Fig. 4.

Kod promatranja dinamičkih zbivanja u zavojici klizine za stajalište odabiremo samu tvarnu točku, koja klizi. Sa tog stajališta na tvarnu točku ne djeluje samo centripetalna sila, koju smo postigli pomoću težine tvarne točke i poprečnog nagiba podloge, nego još i sila tromosti, t. zv. centrifugalna sila N' . Prema centripetalnoj sili N , ta je sila istog iznosa, ali suprotnog smjera: $N' - N = 0$. Centrifugalna sila djeluje dakle također u horizontali, u radijalnoj ravnini valjka vijčanicé (x, z , sl. 4), no kako se razlikuje od centripetalne sile samo po smjeru, iznos jedne i druge sile bilježimo istim slovom $N = |N| = |N'|$. Rastavljamo centrifugalnu silu u dvije komponente (sl. 4):

$$N' = N_{\beta}' + N_z'$$

Prva komponenta iznosa $N_{\beta} = N : \cos \beta = N \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$, nagnuta je prema osi x pod kutom poprečnog nagiba β (kao i sila Q_2).

Druga komponenta, iznosa $N_z = N \operatorname{tg} \beta$, djeluje u osi z . Možemo je dakle rastaviti još i dalje u tri komponente iznosa (poput sile Q , usp. 26):

$$N_{z1} = \frac{N \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad N_{z2} = \frac{N \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$N_{z3} = \frac{N \operatorname{tg}^3 \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

Iznosi komponentata centrifugalne sile u pravcima sila Q_1 , Q_2 i Q_3 onda jesu:

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_{z1} &= \frac{N \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ N_2 = N_{z2} &= \frac{N \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \\ N_3 = N_\beta - N_{z3} &= \frac{N(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

S odabranog stajališta na tvarnu točku u zavojici djeluju još i ove sile: Reakcija podloge W , s tom reakcijom proporcionalno trenje μW (μ označuje koeficijent trenja) i sila tromosti, tangencijalna sila T .

Reakcija W svagda djeluje u okomici na podlogu, a podrobnije osvrnut ćemo se na tu silu u specijalnim slučajevima konstrukcije klizine zasebno.

Trenje μW djeluje svagda i samo u suprotnom smjeru gibanja, kod klizine u zavojici dakle u tangenti vijčanice, u suprotnom smjeru klizanja. Nesigurnost računanja s tom silom leži u iznosu koeficijeta trenja. Da se ta nesigurnost što bolje eliminiira običavamo ispitivati sposobnost rada klizine uz dvije različite vrijednosti koeficijenta trenja μ_{\min} i μ_{\max} , koje odabiramo tako, da se najvjerojatnija vrijednost μ nalazi u tom intervalu: $\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}$. Taj pak interval odabiramo širi ili uži već prema značaju klizine i sortimentima, koji dolaze u obzir. Dokažemo li sposobnost rada klizine uz jednu i drugu graničnu vrijednost koeficijenta trenja, moći ćemo se pouzdati, da će klizina zacijelo raditi u predviđenim prilikama. Kod iste klizine potrebno je poznavati ili napose utvrditi koeficijent trenja za svaki sortiment, koji dolazi u obzir. Praktički pak utvrđujemo taj koeficijent u prisutnosti zraka. Nema dakle razloga, da u ovlm našim računima uzimamo otpor zraka još i zasebno u račun, i to s tim manje, što taj otpor zavisi o stanju mirnog, a i jačini i smjeru gibanja uznemirenog zraka (vjetra). Sve te raznolike mogućnosti nastojali smo obuhvatiti baš spomenutim računom u određenom intervalu vrijednosti koeficijenta trenja.*

Sila T također djeluje u suprotnom smjeru gibanja, dakle u tangenti vijčanice. Tromost T je sila, kojom se tvarna točka opire protiv promjene stanja mirovanja ili jednoličnog gibanja u istom pravcu, a centrifugalna sila također je tromost ili otpor, kojim se stvarna točka opire promjeni smjera gibanja.

* S. Flögl, O utjecaju zraka na otpor šumskih klizina, Glasnik za šumske pokuse, knj. 4., Zagreb 1935.

4. O SILAMA, KOJE DJELUJU NA TEŠKO TIJELO U ZAVOJICI KLIZINE UŽLIJEBLJENOG PROFILA — KRAFTEDIEINKURVENDER RINNENPROFILRIESE AUF EINEN SCHWEREN KÖRPER EINWIRKEN

Na našu tvarnu točku djeluju kao aktivne sile komponente njezine vlastite težine Q_1 , Q_2 i Q_3 , zatim reakcije, koje nastaju zbog tih sila i podržavaju ravnotežu s njima: reakcija podloge W , trenje μW , otpor tromosti T i komponente centrifugalne sile: N_1 , N_2 i N_3 . Ravnina $Q_2 Q_3$ predstavlja podlogu klizanja, a reakcija podloge W djeluje u okomici na tu podlogu, u pravcu sile Q_1 . Zbog toga nastaju ove tri jednadžbe ravnoteže sila:

$$\left. \begin{array}{l} \text{u pravcu sile } Q_1: \quad Q_1 - W + N_1 = 0 \\ \text{'' '' '' } Q_2: \quad Q_2 - \mu W - T + N_2 = 0 \\ \text{'' '' '' } Q_3: \quad Q_3 - N_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (29)$$

Iz treće jednadžbe ravnoteže s obzirom na (26) i (28) dobivamo

$$N = \frac{Q \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = Q \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (30)$$

Iz prve jednadžbe ravnoteže s obzirom na (26), (28) i (30) najprije dobivamo:

$$\left. \begin{array}{l} W = Q_1 + N_1 = Q \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ \text{zanim s obzirom na (27):} \\ W = Q \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = Q \frac{\sin \alpha}{v}. \end{array} \right\} \quad (31)$$

Konačno iz druge jednadžbe ravnoteže $T = Q_2 + N_2 - \mu W$ s obzirom na (26) i (28) najprije dobivamo:

$$T = (Q + N \operatorname{tg} \beta) \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} - \mu W,$$

a zatim s obzirom na (30), (27) i (31):

$$T = vW - \mu W = Q \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin \alpha. \quad (32)$$

Formula (30) određuje iznos centrifugalne, odnosno centripetalne sile; form. (31) određuje iznos reakcije podloge, odnosno pritiska na podlogu, a form. (32) određuje iznos tromosti tvarne točke, odnosno iznos jednako velike tangencijalne sile suprotnog smjera, koja djeluje na tvarnu točku, kad ta klizi. Time su određene sve sile, koje djeluju na tvarnu točku u zavojici klizine s užlijebljenim gornjim strojem, i to kao funkcije težine tvarne točke Q , nagiba po-

dloge i koeficijenta trenja. U konkretnom slučaju klizine i sortimena, koji klize, mogu se te sile pomoću tih formula svagda lako izračunati.

Ostale su još značajke žljebovitog gornjeg stroja ove. Iz formule (27), koja definiira koeficijent nagiba, vidi se, da je taj koeficijent pozitivan ili negativan pravi razlomak, jer je nazivnik veći od brojnika za zbiljne vrijednosti uzdužnog nagiba $\alpha - e$.

Poprečni nagib u bilo kojoj točki unutrašnjosti žlijeba može iznositi $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, dakle tangens tog kuta $0 \leq \text{tg} \beta \leq \infty$. Nagib žlijeba dakle ne ograničuje iznose centripetalne odnosno centrifugalne sile (usp. 30).

Pomoću formule (18) i (30) također možemo odrediti funkcionalnu zavisnost poprečnog nagiba o brzini klizanja u zavojici polumjera trasiranja r . Iz (18) naime dobivamo

$$\frac{N}{Q} = \frac{mv_h^2}{r} \cdot \frac{1}{mg} = \frac{v_h^2}{rg} = \frac{v^2}{rg} \cos^2 \alpha, \quad (33)$$

a iz (30) imamo:

$$\frac{N}{Q} = \text{tg} \beta \cdot \cos^2 \alpha. \quad (33a)$$

Izjednačimo li obje vrijednosti za $N : Q$, dobivamo poznati odnos (između brzine gibanja i poprečnog nagiba podloge u zavojici), potrebnog radi ravnoteže:

$$\text{tg} \beta = \frac{v^2}{rg}. \quad (34)$$

Teško tijelo zauzet će na obali žlijeba u zavojici mjesto poprečnog nagiba, koji zadovoljava ovu jednadžbu.

Sa poprečnim nagibom podloge povezana je i t. zv. *konstanta klizine u zavojici*:

$$k = \frac{rg}{\cos \alpha} \quad (\text{m/sec})^2. \quad (35)$$

Slika 5 neka predočuje unutarnji obris žlijeba, koji je presječen okomito na os klizine u zavojici. Ta os u uzdužnom smjeru neka je nagnuta pod kutom α prema horizontalnoj ravnini. Težinu tijela Q zamišljamo rastavljenu u dvije komponente, od kojih $Q \cos \alpha$ leži u nacrtanom prijesjeku, a $Q \sin \alpha$ u tangenti uzdužne osi, kružne vijčanice (usp. na pr. i sl. 3). Na teško tijelo u nacrtanom prijesjeku djeluju onida ove sile: komponenta vlastite težine $Q \cos \alpha$, centrifugalna sila N' i reakcija podloge W . Ravnoteža je moguća samo, ako su reakcija W i pritisak na podlogu $W' = Q \cos \alpha + N'$ istih iznosa ($W = W'$) suprotnih smjerova, a djeluju u istom pravcu. Kako reakcija W djeluje svagda u okomici podloge, teško tijelo, koje klizi, smjestit će se u onu točku (P , sl. 5), u kojoj će tangenta obrisa i

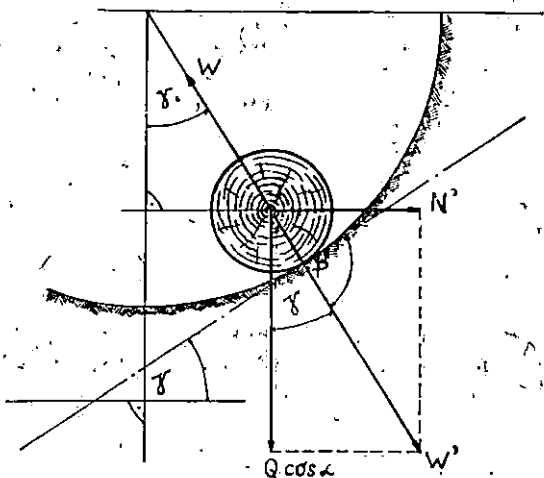
horizontala, zatim okomica na podlogu i vertikalna zatvarati jednake kutove. γ . Tangens tog. kuta iznosi (usp. 33—35):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N}{Q \cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha = \frac{v^2}{rg} \cdot \cos \alpha = \frac{v^2}{k} \quad (36)$$

Iz snošaja

$$v^2 = k \cdot \operatorname{tg} \gamma \quad (36a)$$

vidi se, da je konstanta k kvadrat neke brzine (o kojoj će biti još govora), dakle da ima dimenziju (m/sec^2) .



Sl. — Fig. 5.

Nadalje se vidi iz (36), da se poprečni nagibi β i γ razlikuju. Tako i mora biti, jer kut γ leži u normalnoj ravni, t. j. u ravni koja prolazi glavnim normalom i binormalom vijčаницe, uzdužne osi zavojice, a kut β leži u apsolutno vertikalnoj ravni (N, Q , sl. 2). Kut γ je projekcija kuta β -te u normalnoj ravni vijčаницe.

Glavna normala naime u bilo kojoj. točki vijčаницe (P , sl. 2) okomito siječe os (z) valjka vijčаницe (poput centripetalne sile). Tangenta u istoj točki vijčаницe okomito siječe glavnu normalu, ali je nagnuta prema horizontali pod kutom α . Oskulatorna ravnina prolazi glavnom normalom i tangentom i poradi toga zatvara s horizontalnom ravninom također kut α . Binormala u istoj točki vijčаницe stoji okomito na oskulatornoj ravnini; i ona zatvara kut α s vertikalnom radijalnom ravninom valjka vijčаницe, u kojoj djeluje i težina tijela. Poradi toga i jest $Q \cos \alpha$ komponenta težine tijela Q u normalnoj ravni vijčаницe, t. j. u ravni, u kojoj se nalaze normala i binormala. Druga komponenta $Q \sin \alpha$ ima smjer tangente vijčаницe, te utječe na brzinu gibanja tijela.

Prema slici 5 je nadalje $W = Q \sqrt{\cos^2 \alpha + (N/Q)^2}$. Uvrstimo li $\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ namjesto N/Q pod korijen, za reakciju podloge W , nakon sredenja dobivamo isti rezultat sa form. (31). Ta činjenica potvrđuje ispravnost računa tu i tamo.

Tangencijalna sila (32, (31):

$$T = (v - \mu) W, \quad W = Q \frac{\sin \alpha}{v},$$

zavisi o koeficijentu nagiba, o koeficijentu trenja i o reakciji podloge klizine u zavojici. Pritom koeficijent nagiba (27), (36):

$$v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \gamma \quad (37)$$

zavisi o uzdužnom (α) i poprečnom nagibu (β) podloge klizine, a uvijek je manji od uzdužnog nagiba ($v < \operatorname{tg} \alpha$), ako poprečni nagib podloge klizanja nije jednak ničisti ($\beta \neq 0$). Koeficijent nagiba je pozitivan, ako se zavojica spušta, a negativan je, ako se zavojica diže u smjeru gibanja. No može biti i jednak ničisti, ako uzdužna os zavojice leži u horizontalnoj ravnini.

Ako je $v > 0$, a $\mu < v$, zavojica se spušta u smjeru klizanja, a iznos tangencijalne sile je veći od ničiste ($T > 0$). Znači, da postoji ubrzanje, zbog kojeg teško tijelo klizi sve brže; od početka prema kraju zavojice.

Ako je $v > 0$, a $\mu = v$, zavojica se još doduše spušta, u smjeru klizanja, ali iznos tangencijalne sile jednak je ničisti ($T = 0$). Znači, da ubrzanje ne postoji, nego teško tijelo klizi jednolično od početka do kraja zavojice brzinom, kojom je ušlo u nju.

Ako je $v > 0$, a $\mu > v$, zavojica se još uvijek spušta u smjeru klizanja, ali tangencijalna sila je negativna. Znači, ubrzanje postoji, ali u suprotnom smjeru gibanja. Teško tijelo klizi usporeno od početka prema kraju zavojice.

Ako je $v = 0$, a to može biti jedino, ako je $\alpha = 0$, tangencijalna sila je negativna (usp. 31 i 32):

$$T = -\mu W, \quad W = Q \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}. \quad (38)$$

Ubrzanje djeluje u suprotnom smjeru klizanja. Teško tijelo klizi usporeno od početka do kraja zavojice, ako ga dosegne.

Konačno, ako je $v < 0$, a to može biti samo, ako je kut α negativan. Zavojica se uspinje u smjeru klizanja. Tangencijalna sila je negativna:

$$T = -(v + \mu) W; \quad W = Q \frac{\sin \alpha}{v} \quad (38a)$$

Ubrzanje djeluje u smjeru klizanja. Teško tijelo klizi usporeno, a kraj zavojice svagda i ne dosegne, nego sustane već i prije.

5. MIJENA BRZINE KLIZANJA TEŠKOG TIJELA U ZAVOJICI KLIZINE UŽLIJEBLJENOG PROFILA — GLEITGESCHWINDIGKEITSÄNDERUNG EINES SCHWEREN KÖRPERS IN KURVEN DER RINNENPROFILRIESE

U slučaju $0 < \mu < v$, opisanom u prijašnjoj točki, postoji ubrzanje u smjeru klizanja (usp. 31 i 32):

$$a_t = T : m = g \frac{v - \mu}{v} \sin \alpha. \quad (39)$$

Horizontalna projekcija tog ubrzanja je:

$$a_{th} = a_t \cdot \cos \alpha = g \frac{v - \mu}{v} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (39a)$$

Medu horizontalnom projekcijom brzine klizanja v_h , ubrzanjem a_{th} i horizontalnom projekcijom prevaljenog puta, luka kružnice $s_h = r\varphi$ (usp. sl. 2a) postoji poznati snošaj

$$v_h dv_h = a_{th} \cdot ds_h. \quad (40)$$

Uvrstimo li vrijednost a_{th} iz gornje jednadžbe u ovu, dobivamo:

$$v_h dv_h = g \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \sin \alpha \cos \alpha ds_h. \quad (41)$$

Točno rješenje ove diferencijalne jednadžbe nalazi se izvedeno i otisnuto u uvodno spomenutoj radnji. No zbog razloga, navedenih u uvodu, ovdje rješavamo posljednju jednadžbu tako, da privremeno stavljamo (usp. 27, 36 i 37):

$$v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \gamma = \text{konstans}. \quad (42)$$

Kako pretpostavljamo uzdužni nagib klizina u zavojici također stalnim: $\alpha = \text{konstans}$, to uz te pretpostavke općenito rješenje diferencijalne jednadžbe (41) glasi:

$$v_h^2 = 2gs_h \frac{v - \mu}{v} \sin \alpha \cos \alpha + 2C.$$

Na početku zavojice je $s_h = 0$, a brzina na istom mjestu $v_h = v_{ah}$ je poznata. Vrijednost konstante integriranja mora dakle biti $2C = v_{ah}^2$. Kako je još (usp. 11) $v_h = v \cos \alpha$, to posljednja jednadžba konačno sredena dobiva oblik:

$$\frac{v^2}{g} = \frac{v_a^2}{g} + 2s_h \frac{v - \mu}{v} \operatorname{tg} \alpha, \quad s_h = r\varphi. \quad (43)$$

U primjeni prema prilikama možda će bolje odgovarati oblik, koji nastaje, ako ovu jednadžbu pomnožimo sa $\cos \alpha$ i podijelimo sa r (usp. i 35):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} + 2 \frac{v - \mu}{v} \varphi \sin \alpha; \quad k = \frac{tg \alpha}{\cos \alpha}, \quad (43a)$$

Jedna (43) i druga jednadžba (43a) određuje isto: brzinu klizanja v na kraju $s_h = r \varphi$ duge zavojice, u koju je ušlo teško tijelo sa brzinom v_a .

Između koeficijenta nagiba i brzine klizanja postoji snošaj (usp. 37 i 36):

$$\frac{tg \alpha}{v} = \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + tg^2 \gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{v_a}{k}\right)^2}. \quad (44)$$

Uistinu dakle koeficijent nagiba nije stalan (kako smo pretpostavili pod 42), nego se mijenja, ako se mijenja brzina klizanja. Na početku zavojice koeficijent nagiba iznosi:

$$v_a = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \gamma_a}} = tg \alpha \cdot \cos \gamma_a; \quad tg \gamma_a = \frac{v_a}{k}. \quad (45)$$

Kad bismo još znali, koliko iznosi koeficijent nagiba na kraju zavojice, mogli bismo računati i brzinu na tom mjestu — pomoću aritmetičke sredine obiju vrijednosti koeficijenta nagiba po približnoj form. (43) ili (43a). Bit će dakle u skladu sa postavljenom zadaćom, da približno procijenimo iznos koeficijenta nagiba na kraju zavojice, barem u slučajevima, u kojima se to može učiniti.

Iz formule (44) i (36) općenito izlazi:

$$\frac{v^2}{k} = \sqrt{\left(\frac{tg \alpha}{v}\right)^2} - 1 = tg \gamma. \quad (46)$$

Napose je na početku zavojice

$$\frac{v_a^2}{k} = \sqrt{\left(\frac{tg \alpha_a}{v_a}\right)^2} - 1 = tg \gamma_a. \quad (46a)$$

U specijalnom pak slučaju $\mu = v$, ubrzanje jednako je ničiti ($a_t = 0$, usp. 39). Nastupa li taj slučaj već na početku zavojice ($\mu = v_a$), teško tijelo klizi jednolično od početka do kraja zavojice brzinom, kojom je ušlo u nju. Ta brzina ($v_a = c$) zadovoljava jednadžbu iz (46):

$$\frac{v_a^2}{k} = \frac{c^2}{k} = \sqrt{\left(\frac{tg \alpha}{\mu}\right)^2} - 1 = tg \gamma_c, \quad (47)$$

a zove se *stacionarna* (jednolična, kritična) brzina klizanja u zavojici konstante k . Stacionarna brzina postoji samo u slučajevima $\mu < tg \alpha$, a ima različite iznose za različite vrijednosti koeficijenta trenja (za različite sortimente drva, koji klize) i u istoj zavojici. Ako je $\mu = tg \alpha$, stacionarna brzina jednaka je ničiti, a imaginarna je, dakle ne postoji, ako je $\mu > tg \alpha$.

Jednadžba (46) također, nam objašnjava značenje konstante k . Za $\gamma = 45^\circ$ ili $\operatorname{tg} \gamma = 1$, iz te jednadžbe naime izlazi $k = v^2$. Dakle je konstanta $k = rg : \cos \alpha$, zaista kvadrat brzine klizanja teškog tijela na mjestu zavojice, na kojem koeficijent nagiba iznosi:

$$v = \cos \gamma \operatorname{tg} \alpha = \cos 45^\circ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ako je $\gamma_c = 45^\circ$, dakle $\operatorname{tg} \gamma_c = 1$, onda je konstanta klizine kvadrat početne ujedno i stacionarne brzine klizanja teškog tijela (slijedi iz 47):

$$\left. \begin{aligned} k &= rg : \cos \alpha = v_a^2 = c^2 \\ \text{u zavojici nagiba } \alpha \text{ i polumjera } r; \text{ pritom koeficijent} \\ \text{trenja treba da zadovoljava uvjet:} \\ \mu &= v_c = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,7071 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} (47a)$$

Na pr. horizontalnoj zavojici ($\operatorname{tg} \alpha = 0$), polumjera $r = 200$ m; pripada konstanta $k = 200 \cdot 9,81 = 1962$ (m/sec)². Uz $\gamma = 45^\circ$ to je ujedno kvadrat stacionarne brzine teškog tijela, koje klizi kroz nju bez trenja ($\mu = 0$). Zavojici iste krivosti, ali nagiba u smjeru klizanja $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$ ili $\cos \alpha = 0,958$, pripada konstanta

$$k = 200 \cdot 9,81 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2.$$

Uz $\gamma_c = 45^\circ$ to je ujedno kvadrat stacionarne brzine teškog tijeta, koje klizi kroz nju uz koeficijent trenja $\mu = 0,7071 \cdot 0,3 = 0,212$.

Ako je $\mu < v$, onda je $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, jer je svagda $v < \operatorname{tg} \alpha$, ako brzina klizanja nije jednaka ničtici (usp. 37). Poradi toga, ako je $0 < \mu < v$, postoji stacionarna brzina $c > 0$, definirana jedn. (47).

Iz (46a) i (47) nadalje izlazi, da je na početku zavojice u slučajevima $\mu \leq v_a$

$$\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{v_a}\right)^2 - 1} \leq \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 - 1}, \text{ ili } \frac{v_a^2}{k} \leq \frac{c^2}{k}. \quad (48)$$

Ako je dakle $0 < \mu < v$ brzina klizanja raste od početka prema kraju zavojice, dok ne naraste najviše do iznosa stacionarne brzine. Postigne li stacionarnu brzinu unutar zavojice, do njezina kraja dalje, teško tijelo klizi jednolično. Da bude $c > 0$, najmanji iznos koeficijenta nagiba na kraju zavojice može dakle biti $v_c = \mu$ (usp. 46 i 47). Poradi toga u slučaju $0 < \mu < v_a$ uzimamo u račun koeficijent nagiba sa

$$v = \frac{1}{2}(v_a + v_c) = \frac{1}{2}(v_a + \mu), \quad (49)$$

a brzinu klizanja na kraju zavojice računamo po približnoj formuli (43) ili (43a). Pritom bit će možda potrebno obnoviti račun, ako se tako izračunata brzina na kraju zavojice znatnije razlikuje od stacionarne brzine (usp. primjer 1, u točki 7).

U slučaju $0 < \mu = v_a$ (dakle $\mu < \operatorname{tg} \alpha$) ubrzanje (39) jednako je ničtici, a postoji stacionarna brzina $c > 0$. Teško tijelo klizi *jednolično* od početka do kraja zavojice, a brzina, kojom je teško tijelo ušlo u zavojicu, ujedno je i stacionarna brzina ($v_a = c$, uspor. 47 i primjer 2 u točki 37).

U slučaju $0 < v_a < \mu$ može biti $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ili $\mu > \operatorname{tg} \alpha$. Stacionarna brzina ne postoji, tangencijalno je ubrzanje negativno, t. j. tijelo klizi usporeno. Brzina na kraju zavojice može spasti na ničtici. Za brzinu pak $v = 0$ je $\operatorname{tg} \gamma_0 = 0$ (usp. 36), a koeficijent nagiba $v_0 = \operatorname{tg} \alpha$ (usp. 37).

Poradi toga u slučaju $0 < v_a < \mu$ uzimamo u račun koeficijent nagiba sa

$$v = \frac{1}{2}(v_a + v_0) = \frac{1}{2}(v_a + \operatorname{tg} \alpha), \quad (50)$$

a brzinu klizanja na kraju zavojice računamo po formuli:

$$\frac{v^2}{g_i} = \frac{v_a^2}{g} - 2s_h \frac{\mu - v}{v} \operatorname{tg} \alpha, \quad s_h = r\varphi, \quad (51)$$

ili po formuli:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2 \frac{\mu - v}{v} \varphi \cdot \sin \alpha. \quad (51a)$$

Pritom će se možda ponovno obnoviti račun, ako se tako izračunata brzina na kraju znatno razlikuje od ničtice (usporeno, točku 7, primjer 3 i 4).

Točnije formule za izračunavanje brzine klizanja na kraju zavojice u slučajevima $v_a > 0$ otisnute su u uvodno navedenoj radnji i to, ako je

$$\begin{aligned} \mu < \operatorname{tg} \alpha & \text{ na str. 46 pod brojem (86)} \\ \mu = \operatorname{tg} \alpha & \text{ ,, ,, 49 ,, ,, (93) i (96)} \\ \mu > \operatorname{tg} \alpha & \text{ ,, ,, 48 ,, ,, (89).} \end{aligned}$$

Dalji slučaj koeficijenta nagiba $v_a = 0$ može nastupiti samo ako je $\alpha = 0$, t. j. ako se zavojica nalazi u horizontalnoj ravnini. Općenito je (usp. 37):

$$\frac{v - \mu}{v} \operatorname{tg} \alpha = \left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\mu}{\cos \gamma}\right),$$

a u slučaju $\alpha = 0$:

$$\frac{v - \mu}{v} \operatorname{tg} \alpha = -\mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = -\frac{\mu}{\cos \gamma}.$$

Poradi toga u slučaju $v_a = 0$ jednadžbe brzine (43) i (43a) pre-
laze u:

$$\frac{v^2}{g} = \frac{v_a^2}{g} - 2s_h \frac{\mu}{\cos \gamma}, \quad s_h = r\varphi, \quad (52)$$

odnosno u:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2\varphi \frac{\mu}{\cos \gamma}, \quad k = rg. \quad (52a)$$

Upozoravamo, da je u slučaju $\alpha = 0$:

$$\frac{v^2}{k} = \operatorname{tg} \gamma = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{v^2}{rg}. \quad (53)$$

Iz formula (52) ili (52a) vidi se, da brzina klizanja pada od početka prema kraju zavojice, gdje najniže može spasti na ništicu. Kako je na početku zavojice $\cos \gamma = \cos \gamma_a$, a, na kraju najniže $\cos \gamma = \cos \gamma_0 = \cos 0 = 1$, to u račun uzimamo

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}(\cos \gamma_a + 1), \quad (54)$$

kad računamo brzinu klizanja na kraju zavojice po formi. (52) odnosno (52a). Prema prilikama bit će možda potrebno i u ovom slučaju obnoviti račun, ako se tako izračunata brzina na kraju zavojice znatno razlikuje od ništicu (usp. točku 7, primjer 5).

Točnija formula za računanje brzine klizanja na kraju zavojice, koja leži u horizontalnoj ravnini, otisnuta je u uvodno navedenoj radnji na str. 50 pod brojem 98. Ta je formula uostalom već i toliko jednostavna, da račun po približnim formulama može i otpasti.

Konačno, slučajevi $v < 0$ nastupaju, kad je kut α negativan, t. j. kad se zavojica uspinje u smjeru klizanja pod kutom $\varepsilon (= -\alpha)$. Ubrzanje također je negativno (39), a brzina biva sve manja prema kraju zavojice, gdje može — ako ne već i prije — spasti na ništicu. Poradi toga, kad se zavojica uspinje u smjeru klizanja ($v < 0$), koeficijent nagiba uzimamo u račun sa

$$v = \frac{1}{2}(v_a + v_0) = \frac{1}{2}(v_a + \operatorname{tg} \varepsilon), \quad (55)$$

a brzinu klizanja na kraju zavojice po formuli iz (43):

$$\frac{v^2}{g} = \frac{v_a^2}{g} - 2s_h \frac{v + \mu}{v} \operatorname{tg} \varepsilon, \quad s_h = r\varphi, \quad (56)$$

ili po formuli:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2 \frac{v + \mu}{v} \varphi \cdot \sin \varepsilon. \quad (56a)$$

(Usp. točku 7, primjer 6).

Točnije formule za računanje brzine na kraju zavojice u slučajevima $\operatorname{tg} \alpha < 0$ otisnute su u uvodno navedenoj radnji na str. 51 pod brojem (100) za $|\operatorname{tg} \alpha| < \mu$, na str. 52 pod brojem 103 za $|\operatorname{tg} \alpha| = \mu$, a pod brojem (106) za $|\operatorname{tg} \alpha| > \mu$.

6. PREGLED FORMULA ZA Približno izračunavanje brzine klizanja u zavojici klizine; UŽLIJEBLJENOG PROFILA - FORMELN-ÜBERSICHT FÜR DIE ANNÄHERNDE BERECHUNG DER GLEITGESCHWINDIGKEIT IN KURVEN DER RINNENPROFILRIESE

Općenite oznake:

$g = 9.81 \text{ m/sec}^2$. Ubrzanje pri slobodnom padu.

r polunjer zavojice u horizontalnoj projekciji (m).

φ središnji kut zavojice u horizontalnoj projekciji.

$s_h = r\varphi$ dužina zavojice u horizontalnoj projekciji.

μ koeficijent trenja.

v_a m/sec brzina na početku, a v m/sec na kraju zavojice.

a) *Zavojica klizine pada u smjeru klizanja pod kutom α prema horizontali.*

$$k = \frac{rg}{\cos \alpha} \text{ konstanta zavojice.} \quad (35)$$

$\text{tg } \beta = \frac{v^2}{rg}$ poprečni nagib žljeba, koji odgovara brzini klizanja v (34).

$$\text{tg } \gamma = \text{tg } \beta \cos \alpha = \frac{v^2}{k} \quad (36)$$

je nagib tangente obrisa žljeba prema horizontali u ravnini normalnoj na glavnu os žljeba (sl. 5). Napose se odnosi $\text{tg } \gamma_a$ na brzinu v_a na početku, a $\text{tg } \gamma_v$ na kraju zavojice.

$$v = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \text{tg}^2 \beta}} = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}} = \text{tg } \alpha \cos \gamma \quad (37)$$

koeficijent nagiba

$$\text{tg } \gamma_c = \frac{c^2}{k} = \sqrt{\left(\frac{\text{tg } \alpha}{\mu}\right)^2 - 1} \quad (47)$$

određuje stacionarnu (jednoličnu brzinu) klizanja c u zavojici, konstante k .

Svagda je $c > 0$, ako je $\mu < \text{tg } \alpha$, a postoji $c > 0$ i u svakom slučaju $0 < \mu < v$, jer je svagda $v < \text{tg } \alpha$.

Jednadžba

$$\frac{v^2}{k} = \text{tg } \gamma_v = \frac{v_a^2}{k} + 2 \frac{v - \mu}{v} \varphi \sin \alpha \quad (43a)$$

određuje brzinu klizanja v na kraju $s_h = r\varphi$ duge zavojice, u koju je ušlo teško tijelo sa brzinom v_a .

Kad računamo brzinu v po toj formuli, pod v razumijevamo aritmetičku sredinu:

$$v = \frac{1}{2}(v_a + v_v). \quad (57)$$

Pritom je $v_a = \text{tg } \alpha \cos \gamma_a$ koeficijent nagiba na početku, a $v_v = \text{tg } \alpha \cos \gamma_v$ na kraju zavojice. Napose stavljamo (kod prvog približnog računa):

1. $v_v = \mu$ u slučajevima $0 < \mu < v_a$ (usp. 49).
2. $v_v = v_a = \mu$ u slučajevima $0 < \mu = v_a$, u kojima teško tijelo klizi jednolično od početka do kraja zavojice, brzinom kojom je ušlo u nju ($c = v_a$).
3. $v_v = \text{tg } \alpha$ u slučajevima $0 < v_a < \mu$ (usp. 50).

Pritom formula (43a) prelazi u:

$$\frac{v^2}{k} = \text{tg } \gamma_v = \frac{v_a^2}{k} - 2 \frac{\mu - v}{v} \varphi \sin \alpha. \quad (51a)$$

b) *Zavojica klizine nalazi se u horizontalnoj ravnini* ($\alpha = 0$).

$k = \text{rg}$ (m/sec)² konstanta zavojice (35).

$\text{tg } \beta = \frac{v^2}{\text{rg}} = \frac{v^2}{k}$ poprečni nagib žlijeba, koji odgovara brzini klizanja v (34).

$\text{tg } \gamma = \text{tg } \beta = \frac{v^2}{k}$ (36) nagib tangente obrisa žlijeba prema horizontali u normalnoj ravnini na glavnu os žlijeba.

$v = 0$ koeficijent nagiba (37).

Stacionarna brzina ne postoji.

Zavojica klizine koči klizanje.

Jednadžba:
$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2 \varphi \frac{\mu}{\cos \gamma} \quad (52a)$$

određuje brzinu klizanja na kraju $s = r \varphi$ duge horizontalne zavojice, u koju je tijelo ušlo brzinom v_a . Kod prvog približnog računanja brzine po ovoj formuli uzimamo u račun:

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} (\cos \gamma_a + 1). \quad (54)$$

c) *Zavojica klizine se uspinje u smjeru klizanja pod kutom* $\varepsilon (= -\alpha)$ prema horizontali.

$k = \frac{\text{rg}}{\cos \varepsilon}$ (m/sec)² konstanta zavojice (35)

$\text{tg } \beta = \frac{v^2}{\text{rg}}$ poprečni nagib žlijeba, koji odgovara brzini klizanja v (34).

$$\text{tg } \gamma = \text{tg } \beta \cos \varepsilon = \frac{v^2}{\text{rg}} \cos \varepsilon = \frac{v^2}{k}. \quad (36)$$

To je nagib tangente obrisa žlijeba prema horizontali u ravnini, koja okomito siječe glavnu os žlijeba (sl. 5).

$$v = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \varepsilon}} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \operatorname{tg} \varepsilon \cos \gamma$$

koeficijent nagiba (37).

Jednadžba:

$$\frac{v^2}{k} = \operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v_a^2}{k} - 2 \frac{v + \mu}{v} \varphi \sin \varepsilon \quad (56a)$$

određuje brzinu klizanja na kraju zavojice, u koju je teško tijelo ušlo brzinom v_a . Kod prvog približnog računanja brzine po ovoj formuli uzimamo u račun

$$v = \frac{1}{2} (v_a + \operatorname{tg} \varepsilon). \quad (55)$$

7. PRIMJENA FORMULA ISKAZANIH U PRIJAŠNJOJ TOČKI — ANWENDUNG DER IN VORHERIGEM PUNKT ANGEFÜHRTEN FORMELN

Točnost rezultata izračunatih po tim formulama utvrđujemo uspoređivanjem s rezultatima u istim konkretnim slučajevima izračunatima po točnijim formulama, otisnutima u uvodno spomenutoj radnji.

Primjer 1. Zadan je središnji kut $\varphi = 90^\circ$, $\operatorname{arc} \varphi = 1,571$ zavojice klizine s užlijebljenim gornjim strojem; trasirane polumjerom $r = 200$ m, s uzdužnim padom $\alpha = 16^\circ 42'$, $\sin \alpha = 0,287$, $\cos \alpha = 0,958$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,30$. Brzina na početku zavojice zadana je sa v_a^2 : $g = 30$ m, ($v_a = 17,2$ m/sec). Ako koeficijent trenja iznosi $\mu = 0,20$, kolika je brzina klizanja na kraju zavojice?

Na početku zavojice pōprečni nagib žlijeba iznosi (36, 35):

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{v_a^2}{k} = \frac{v_a^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha}{r} = 30 \frac{9,958}{200} \doteq 0,144.$$

$$\gamma_a \doteq 8^\circ 11' \quad \sin \gamma_a \doteq 0,142; \quad \cos \gamma_a = 0,990,$$

a koeficijent nagiba (45) $v_a = \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma_a = 0,3 \cdot 0,99 \doteq 0,297$.

Konstanta zavojice iznosi (35):

$$k = 200 \cdot 98,1 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2.$$

a) *Približni račun.* Kako je $0 < \mu < v_a$, u obzir dolazi formula (49) i formula (43) ili (43a).

Iz (49) dobivamo:

$$v = \frac{1}{2}(v_a + \mu) = \frac{1}{2}(0,297 + 0,2) = 0,2485.$$

Nadalje je:

$$\frac{v - \mu}{v} = \frac{0,2485 - 0,2}{0,2485} = 0,195,$$

$$2\varphi \sin \alpha = 2 \cdot 1,571 \cdot 0,287 = 0,902,$$

a iz (43a) izlazi:

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,144 + 0,902 \cdot 0,195 = 0,320.$$

Dakle je:

$$\gamma_v = 17^\circ 45', \quad \sin \gamma_v = 0,305, \quad \cos \gamma_v = 0,952.$$

i koeficijent nagiba (37): $v_v = 0,3 \cdot 0,952 = 0,286$.

Ova se vrijednost znatno razlikuje od pretpostavljene vrijednosti $v_v = \mu = 0,2$. Poradi toga obnavljamo račun, i to pomoću izračunate vrijednosti $v_v = 0,286$, te stavljamo (57):

$$v = \frac{1}{2}(0,297 + 0,286) \doteq 0,292.$$

Onda je

$$\frac{v - \mu}{v} = \frac{0,292 - 0,2}{0,292} = 0,315,$$

a po formuli (43a)

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,144 + 0,315 \cdot 0,902 = 0,428.$$

Dakle:

$$\gamma_v = 23^\circ 10', \quad \sin \gamma_v = 0,393 \text{ i } \cos \gamma_v = 0,919.$$

Uz te vrijednosti izračunati koeficijent nagiba

$$v_v = 0,3 \cdot 0,919 = 0,276$$

mного se ne razlikuje od pretpostavljene vrijednosti $v_v = 0,292$. Poradi toga približno procjenjujemo brzinu klizanja na kraju zavojice sa (36):

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,428} \doteq 29,6 \text{ m/sec.}$$

Stacionarna brzina ove zavojice uz (47):

$$\operatorname{tg} \gamma_c = \frac{c^2}{k} = \sqrt{(0,3 \cdot 0,2)^2 - 1} = 1,118$$

iznosi (36):

$$c = \sqrt{2048 \cdot 1,118} \doteq 47,9 \text{ m/sec.}$$

b) *Točniji račun.* U obzir dolaze formule (81) i (86) uvodno navedene radnje. Po prvoj formuli (81) općenito je, ako još uzmemo u obzir formulu (36) ove radnje:

$$\tau = \frac{v^2}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{k}\right)^2} = \operatorname{tg} \gamma + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \quad (58)$$

i obrnuto:

$$\frac{v^2}{k} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\tau^2 - 1}{2\tau}. \quad (58a)$$

U ovom primjeru na početku zavojice je dakle iz (58)

$$\tau_a = \frac{1 + 0,142}{0,99} = 1,154,$$

a na kraju, uz približno prije već izračunatu vrijednost $\gamma_v = 23^\circ 10'$:

$$\tau_v = \frac{1 + 0,393}{9,919} = 1,516.$$

Nadalje je: $\operatorname{tg} \alpha : \mu = 0,3 : 0,2 = 1,5$

$$\tau - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} - \frac{c^2}{k} = \tau - 1,5 - 1,118 = \tau - 2,618$$

$$\tau - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} + \frac{c^2}{k} = \tau - 1,5 + 1,118 = \tau - 0,382$$

$$\tau_a - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} - \frac{c^2}{k} = 1,154 - 1,5 - 1,118 = -1,464$$

$$\tau_a - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} + \frac{c^2}{k} = 1,154 - 1,5 + 1,118 = 0,772$$

$$2\mu\varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,2 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 0,602$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \cdot \frac{k}{c^2} = \frac{1,5}{1,118} = 1,342.$$

Formula (86) poprima oblik:

$$\tau \left(\frac{\tau - 2,618}{\tau - 0,382} \right)^{1,342} = \tau_a \left(\frac{-1,462}{0,772} \right)^{1,342} \cdot e^{-0,602}$$

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau} \right)^{1,342} \cdot \frac{\tau - 2,618}{\tau - 0,382} = \frac{1,462}{0,772} \cdot e^{-0,449}$$

$$\frac{2,618 - \tau}{\tau - 0,382} \left(\frac{\tau}{\tau_a} \right)^{1,342} = 1,208.*$$

Stavljamo prema prije izračunatim vrijednostima

$$\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{1}{1,342}} = \left(\frac{1,516}{1,154}\right)^{\frac{1}{1,342}} = 1,225 \text{ i } \tau = \tau_a + x = 1,154 + x$$

Onda je $2,618 - \tau = 2,618 - 1,154 - x = 1,464 - x$

$$\tau - 0,382 = 1,154 + x - 0,382 = 0,772 + x$$

Jednadžba* pak prelazi u:

$$\frac{1,464 - x}{0,772 + x} \cdot 1,225 = 1,208.$$

Rješenje je ove jednadžbe $x = 0,354$. Onda je

$$\tau = \tau_a + x = 1,154 + 0,356 = 1,508.$$

Po podacima približnog računa imali smo na kraju zavojice $v = 29,6$ m/sec i $\tau = \tau_v = 1,516$. Uz najzad pa točnije izračunatu vrijednost $\tau = 1,508$ iz (58a) izlazi:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v^2}{k} = \frac{1,508^2 - 1}{2 \cdot 1,508} = 0,419 \text{ i } v = \sqrt{2048 \cdot 0,419} = 29,3 \text{ m/sec.}$$

Približno izračunati rezultat $v = 29,6$ m/sec praktički je dakle dovoljno točan.

Primjer 2. Zadana je zavojica kao u primjeru 1.

$$\varphi = 90^\circ, \operatorname{arc} \varphi = 1,571, r = 200 \text{ m};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,3, \alpha = 16^\circ 42', \sin \alpha = 0,287, \cos \alpha = 0,958.$$

Konstanta zavojice iznosi (35):

$$k = 200 \cdot 9,81 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2.$$

Ako na početku zavojice brzina klizanja iznosi 31,5 m/sec, a teško tijelo klizi uz koeficijent trenja $\mu = 0,27$, koliko iznosi brzina tog tijela na kraju zavojice?

Na početku zavojice je:

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{v_a^2}{k} = \frac{31,5^2}{2048} = 0,484; \gamma_a = 25^\circ 50',$$

$$\sin \gamma_a = 0,436, \cos \gamma_a = 0,900.$$

Kako je $v_a = \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma_a = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27 = \mu$, to teško tijelo klizi od početka do kraja zavojice jednoličnom brzinom $c = v_a = 31,5$ m/sec. Poprečan nagib $\operatorname{tg} \beta_a = v_a^2 : rg = 31,5^2 : 200 \cdot 9,81 = 0,506$ ili $\beta_a = 26^\circ 50'$ poblize određuje položaj tijela u zlijebu. Kao kontrola može poslužiti jednadžba (36):

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \operatorname{tg} \beta_a \cos \alpha = 0,506 \cdot 0,958 = 0,484.$$

Primjer 3. Zadana je zavojica klizine kao u primjeru 1:

$$\varphi = 90^\circ, \text{ arc } \varphi = 1,571; r = 200 \text{ m.}$$

$$\text{tg } \alpha = 0,30, \alpha = 16^\circ 42', \sin \alpha = 0,287, \cos \alpha = 0,958$$

Konstanta zavojice $k = 200 \cdot 9,81 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2$. Ako na početku zavojice brzina klizanja iznosi $31,5 \text{ m/sec}$, a teško tijelo klizi uz koeficijent trenja $\mu = 0,30 = \text{tg } \alpha$, kolika je brzina tog tijela na kraju zavojice?

Na početku zavojice je:

$$\text{tg } \gamma_a = v_a^2 : k = \overline{31,5}^2 : 2048 = 0,484; \gamma_a = 25^\circ 50',$$

$$\sin \gamma_a = 0,436, \cos \gamma_a = 0,900.$$

$$v_a = \text{tg } \alpha \cos \gamma_a = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27.$$

a) *Približni račun.* Kako je $0 < v_a < \mu = \text{tg } \alpha$, u obzir dolaze približne formule (50), (51) ili (51a).

Po formuli (50) je

$$v = \frac{1}{2}(v_a + \text{tg } \alpha) = \frac{1}{2}(0,27 + 0,30) = 0,285,$$

dakle

$$\frac{\mu - v}{v} = \frac{0,300 - 0,285}{0,285} = 0,053.$$

Nadalje je:

$$2 \varphi \sin \alpha = 2 \cdot 1,571 \cdot 0,287 = 0,902,$$

a po formuli (51a):

$$\text{tg } \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,484 - 0,053 \cdot 0,902 = 0,436,$$

dakle:

$$\gamma_v = 23^\circ 33', \sin \gamma_v = 0,400 \text{ i } \cos \gamma_v = 0,917.$$

a iz (37):

$$v_v = 0,3 \cdot 0,917 = 0,275.$$

Ova se vrijednost znatnije razlikuje od pretpostavljene vrijednosti $v_v = \text{tg } \alpha = 0,3$. Poradi toga obnavljamo račun, i to pomoću vrijednosti $v_v = 0,275$. Onda je

$$v = \frac{1}{2}(0,270 + 0,275) = 0,273$$

$$\frac{\mu - v}{v} = \frac{0,3 - 0,273}{0,273} = 0,099.$$

Iz (51a):

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,484 - 0,099 \cdot 0,902 = 0,395,$$

$$\gamma_v = 21^\circ 33', \sin \gamma_v = 0,367, \cos \gamma_v = 0,930.$$

Uz te vrijednosti koeficijent nagiba $v_v = 0,3 \cdot 0,93 = 0,279$ mnogo se ne razlikuje od pretpostavljene vrijednosti $v_v = 0,275$. Poradi toga približno procjenjujemo brzinu klizanja na kraju zavoјice \dot{s} a (36)

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,395} = 28,4 \text{ m/sec.}$$

b) *Točniji račun.* U obzir dolaze formule (81) i (96) uvodno navedene radnje. Iz formule (58) ove radnje izlazi:

$$\tau_a = \frac{1 + 0,436}{0,9} = 1,595; (\tau_a - 1)^2 = 0,595^2 = 0,354$$

a zatim je

$$\mu \varphi \cos \alpha = 0,3 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 0,452$$

a formula (96) prelazi u:

$$\tau = 1,595 - \frac{0,354 \cdot 0,452}{1 + 0,595 \cdot 0,452} = 1,469.$$

Iz (58a) dobivamo:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v^2}{k} = \frac{1,469^2 - 1}{2 \cdot 1,469} = 0,394$$

Brzinu na kraju zavoјice $v = \sqrt{2048 \cdot 0,394} = 28,4 \text{ m/sec.}$ Ponovljeni približni i točniji račun dali su dakle isti rezultat. U ovom specijalnom slučaju ($v_a > 0$; $\mu = \operatorname{tg} \alpha < v_a$) kraći točniji račun ima prednost pred približnim i dužim računom.

Primjer 4. Zadana je zavoјica klizine kao u primjeru 1.
 $\varphi = 90^\circ$, $\operatorname{arc} \varphi = 1,571$; $r = 200 \text{ m.}$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,3; \alpha = 16^\circ 42', \sin \alpha = 0,287, \cos \alpha = 0,958.$$

Konstanta zavoјice $k = 200 \cdot 9,81 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2$.

Ako brzina na početku zavoјice iznosi 31,5 m/sec, a teško tijelo klizi uz koeficijent trenja $\mu = 0,35$, koliko iznosi brzina tog tijela na kraju zavoјice?

Na početku zavoјice iznosi (36):

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{31,5^2}{2048} = 0,484, \gamma_a = 25^\circ 50', \sin \gamma_a = 0,436, \\ \cos \gamma_a = 0,900; v_a = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27.$$

a) *Približni račun.* Kako je $0 < v_a < \operatorname{tg} \alpha < \mu$, u obzir dolazi form. (50) i form. (51) ili (51a). Uz $v_v = \operatorname{tg} \alpha$ na kraju zavoјice (prema (50) je:

$$v = \frac{1}{2}(v_a + \operatorname{tg} \alpha) = \frac{1}{2}(0,27 + 0,30) = 0,285$$

$$\frac{\mu - v}{v} = \frac{0,35 - 0,285}{0,285} = 0,228$$

$$2\varphi \sin \alpha = 2 \cdot 1,571 \cdot 0,287 = 0,902.$$

Iz (51a)

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,484 - 0,228 \cdot 0,902 = 0,278.$$

$$\gamma_v = 15^\circ 32', \sin \gamma_v = 0,268, \cos \gamma_v = 0,963$$

$$v_v = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \gamma_v = 0,3 \cdot 0,963 = 0,289.$$

Pretpostavili smo $v_v = 0,300 > 0,289$

Zbog toga ponavljamo račun sa $v_v = 0,289$.

$$v = \frac{1}{2}(v_a + v_v) = \frac{1}{2}(0,270 + 0,289) = 0,28.$$

Onda je

$$\frac{\mu - v}{v} = \frac{0,35 - 0,28}{0,28} = 0,25$$

ī konačno iz (51a):

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,484 - 0,25 \cdot 0,902 = 0,258,$$

$$\gamma_v = 14^\circ 30', \sin \gamma_v = 0,250, \cos \gamma_v = 0,968,$$

$$v_v = 0,300 \cdot 0,968 = 0,290.$$

Pretpostavili smo $v_v = 0,289$. Poradi toga nije potrebno ponavljati račun. Brzina na kraju zavojice iznosi (36a)

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,258} = 23 \text{ m/sec.}$$

b) *Točniji račun.* U obzir dolazi formula (89) uvodno navedene radnje. Elementi te formule jesu:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} = \frac{0,30}{0,35} = 0,857; \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2 = 0,735$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2} = \sqrt{0,265} = 0,515$$

$$2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} : \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}\right)^2} = 2 \cdot 0,857 : 0,515 = 3,33.$$

Iz (58):

$$\tau_a = \frac{1 + \sin \gamma_a}{\cos \gamma_a} = \frac{1 + 0,436}{0,9} = 1,596$$

$$\left(\tau_a - \frac{\text{tg } \alpha}{\mu}\right) : \sqrt{1 - \left(\frac{\text{tg } \alpha}{\mu}\right)^2} = (1,596 - 0,857) : 0,515 = 1,435.$$

$$\text{arc tg } 1,435 = \text{arc } 55^\circ 8' = 0,962$$

$$2 \mu \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,35 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 1,054.$$

Formula (89) prelazi u:

$$\tau \left[e^{\text{arc tg } \frac{\tau - 0,857}{0,515}} \right]^{3,33} = \tau_a \left[e^{0,962} \right]^{3,33} \cdot e^{-1,054}$$

$$e^{\text{arc tg } \frac{\tau - 0,857}{0,515}} = \left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{\frac{1}{3,33}} \cdot e^{0,962} \cdot e^{-0,317} = \left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{0,3} \cdot e^{0,645}$$

Iskorišćujući približni račun stavljamo prema (58):

$$\tau = \frac{1 + 0,250}{0,968} = 1,291; \quad \left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{0,3} = \left(\frac{1,596}{1,291}\right)^{0,3} = 1,065.$$

Onda formula* prelazi u:

$$e^{\text{arc tg } \frac{\tau - 0,857}{0,515}} = 1,066 \cdot e^{0,645} \quad \text{i dalje u}$$

$$\text{arc tg } \frac{\tau - 0,857}{0,515} = \ln 1,066 + 0,645 = 0,064 + 0,645 = 0,709.$$

$$0,709 = \text{arc } 40^\circ 37'; \quad \frac{\tau - 0,857}{0,515} = \text{tg } 40^\circ 37' = 0,858.$$

$$\tau - 0,857 = 0,858 \cdot 0,515 = 0,442.$$

$$\tau = 1,299.$$

Po približnom računu pretpostavili smo $\tau = 1,292$. Praktički se možemo zadovoljiti ovim rezultatom. Točniju vrijednost brzine na kraju zavojice dobivamo iz (58a):

$$\text{tg } \gamma = \frac{v^2}{k} = \frac{1,299^2 - 1}{2 \cdot 1,299} = 0,265$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,265} = 23,3 \text{ m/sec.}$$

Primjer 5. Zadan je središnji kut $\varphi = 60^\circ$, $\text{arc } \varphi = 1,047$ i nagib užlijebljene klizine $\alpha = 0$ u zavojici polumjera $r = 200$ m. Ako je teško tijelo ušlo u zavojicu brzinom $v = 31,5$ m/sec, a klizi uz koeficijent trenja $\mu = 0,20$, kolika mu je brzina na kraju zavojice?

Konstanta zavojice iznosi: $k = rg = 200 \cdot 9,81 = 1962 \text{ (m/sec)}^2$. Na početku zavojice je:

$$\text{tg } \gamma_a = \frac{v_a^2}{k} = \frac{31,5^2}{1962} = 0,506; \quad \gamma_a = 26^\circ 50'; \quad \sin \gamma_a = 0,451,$$

$$\cos \gamma_a = 0,892.$$

a) *Približni račun.* U obzir dolaze formule (54) i (52) ili (52a).
Iz (54):

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} (\cos \gamma_a + 1) = \frac{1}{2} (0,892 + 1) = 0,946.$$

Iz (52a):

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,506 - 2 \cdot 1,047 \frac{0,20}{0,966} = 0,506 - 0,443 = 0,063$$

$$\gamma_v = 3^\circ 36', \quad \sin \gamma_v = 0,063, \quad \cos \gamma_v = 0,998.$$

Kako se $\cos \gamma_v = 0,998$ malo razlikuje od $\cos \gamma_v = 1$, što formula (54) pretpostavlja, to možemo praktički dovoljno točno procijeniti brzinu na kraju zavojice sa

$$v = \sqrt{k \cdot \operatorname{tg} \gamma_v} = \sqrt{1962 \cdot 0,063} \doteq 11,1 \text{ m/sec.}$$

b) *Točniji račun.* U obzir dolazi formula (98) uvodno navedene radnje. Elementi ove formule jesu:

$$(58) \quad \tau_a = \frac{1 + \sin \gamma_a}{\cos \gamma_a} = \frac{1 + 0,451}{0,892} = 1,627$$

$$2 \mu \varphi = 2 \cdot 0,2 \cdot 1,047 = 0,419$$

$$(98) \quad \tau = 1,627 e^{-0,419} = \frac{1,627}{1,520} = 1,070$$

$$(58a) \quad \frac{v^2}{k} = \frac{1,07^2 - 1}{2 \cdot 1,07} = \frac{0,145}{2,140} = 0,068 = \operatorname{tg} \gamma_v.$$

Točnija vrijednost brzine klizanja na kraju zavojice iznosi

$$v = \sqrt{1962 \cdot 0,068} = 11,5 \text{ m/sec.}$$

Primjer 6.* Zadana je zavojica žljebaste klizine sa

$$\varphi = 45^\circ, \quad \operatorname{arc} \varphi = 0,7854 \text{ m/sec}; \quad r = 200 \text{ m.}$$

Zavojica se uspinje u smjeru klizanja pod kutom

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,1, \quad \alpha = 5^\circ 43', \quad \sin \alpha = 0,0996, \quad \cos \alpha = 0,995.$$

Ako je teško tijelo ušlo u zavojicu brzinom $v_a = 30,9 \text{ m/sec}$, a klizilo je uz koeficijent trenja $\mu = 0,20$, kolika mu je brzina na kraju zavojice?

Konstanta zavojice iznosi (35):

$$k = 200 \cdot 9,81 : 0,995 = 1972 \text{ (m/sec}^2\text{)}.$$

* Poradi uspoređivanja sa rezultatom točnije formule namjesto ϵ upotrebjavamo α u ovom primjeru.

Na početku zavojice je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_a &= v_a^2 : k = (30,9)^2 : 1972 = 0,484, \\ \gamma_a &= 25^\circ 50', \quad \sin \gamma_a = 0,436, \quad \cos \gamma_a = 0,900, \\ v_a &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \gamma_a = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09. \end{aligned}$$

a) *Približni račun.* U obzir dolazi približna formula (55) i formula (56) ili (56a).

$$\text{Iz (55):} \quad v = \frac{1}{2} (0,09 + 0,10) = 0,095$$

$$\frac{v + \mu}{v} = \frac{0,095 + 0,2}{0,095} = 3,105$$

$$2\varphi \sin \alpha = 2 \cdot 0,7854 \cdot 0,0996 = 0,156.$$

Konačno iz (56a):

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v^2}{k} = 0,484 - 3,105 \cdot 0,156 = 0,484 - 0,484 = 0.$$

Teško tijelo sustat će na kraju zavojice ($v = 0$).

b) *Točniji račun.* U obzir dolazi form. (100) uvodno navedene radnje. Elementi ove formule jesu:

$$(58) \quad \tau_a = \frac{1 + \sin \gamma_a}{\cos \gamma_a} = \frac{1 + 0,436}{0,9} = 1,596$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5; \quad 2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} = 1; \quad \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)^2 = 0,25.$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)^2} = \sqrt{0,75} = 0,866.$$

$$\left(\tau_a + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) : \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)^2} = (1,596 + 0,5) : 0,866 = 2,420$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,420 = \operatorname{arc} 67^\circ 33' = 1,179.$$

$$2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} : \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)^2} = \frac{1}{0,866} = 1,155.$$

$$2 \mu \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,7854 \cdot 0,995 = 0,313.$$

$$(100) \quad \tau \left(e^{1,179} \right)^{1,155} = \tau_a \left[e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau + 0,5}{0,866}} \right]^{1,155} \cdot e^{-0,313}$$

$$e^{1,179} = \left(\frac{\tau_a}{\tau} \right)^{1,155} \cdot e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau + 0,5}{0,866}} \cdot e^{-0,271}$$

$$1,179 = \frac{1}{1,155} \ln \left(\frac{\tau_a}{\tau} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau + 0,5}{0,866} = 0,271.$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau + 0,5}{0,866} = 1,45 - \frac{1}{1,155} \ln \left(\frac{\tau_a}{\tau} \right).$$

Prema približnom računu je $v = 0$, a onda $\tau = 1$ (vidi 58). Možemo dakle predhodno staviti:

$$\frac{1}{1,155} \ln \left(\frac{\tau_a}{\tau} \right) = \frac{1}{1,155} \ln 1,596 = \frac{0,4675}{1,155} = 0,405.$$

Onda je

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau + 0,5}{0,866} = 1,45 - 0,405 = 1,045$$

$$1,045 = \operatorname{arc} 59^\circ 52'; \operatorname{tg} 59^\circ 52' = 1,723.$$

Dakle je

$$\frac{\tau + 0,5}{0,866} = 1,723; \tau + 0,5 = 1,723 \cdot 0,866 = 1,492, \tau = 0,992.$$

Po približnom računu pretpostavili smo $\tau = 1$. Praktički se može zadovoljiti tim približnim rezultatom, te procijeniti brzinu klizanja na kraju zavojice sa $v = 0$.

8. SILE, KOJE DJELUJU NA TEŠKO TIJELO U ZAVOJICI KLIZINE S PRAGOVIMA — KRÄFTE DIE IN KURVEN DER SCHWELLENPROFILRIESE AUF EINEN SCHWEREN KÖRPER EINWIRKEN

Takav gornji stroj sastoji se od dobro zbitog ilovastog nastora, u koji su ugrađeni drveni poprečni pragovi u primjerenim razmacima. Pragovi i nastor nagnuti su prema središtu zavojice (poprečan nagib) pod kutom β prema horizontali. Podloga klizanja je dakle jednostrušno nagnuta prema središtu zavojice. Da se pragovi ne izdižu, obloženi su braničima na krajevima. To su pritesane i na pragove poprijeko pribite uzdužne oblice, na nutarnjem rubu u jednom, a na vanjskom rubu zavojice u dva reda, po potrebi i u više redova jedna nad drugom tako, da čine vertikalnu stijenu. Drvo, kad prolazi zavojicom, klizi na pragovima, ali se prednjim krajem prislanja i o tu vertikalnu stijenu braniča na vanjskom rubu zavojice. Ta stijena sprovodi dakle drvo kroz zavojicu. Uzdužna os putoklazine može padati u smjeru klizanja ($\alpha > 0$), ležati u horizontalnoj ravnini ($\alpha = 0$), a i uspinjati se u smjeru klizanja ($\alpha < 0$).

Upravo kao kod žljebaste klizine, tako i kod ove putoklazine u zavojici zbog uzdužnog (α) i poprečnog nagiba (β) koeficijent nagiba iznosi (usp. 27)

$$v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}},$$

a tangencijalna sila, koja goni teško tijelo kroz zavojicu putoklazine sa pragovima, iznosi (usp. 32):

$$T_1 = v W_1 - \mu_1 W_1 = Q \left(1 - \frac{\mu_1}{v}\right) \sin \alpha.$$

Za razliku prema žlijebu poprečni nagib ove putoklazine u zavojici nije promjenljiv, nego stalan (konstantan), a određuje se pomoću form. (34):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{am}^2}{rg}. \quad (59)$$

Pritom v_{am} označuje najmanju brzinu na početku zavojice određenu uz najveću predvidljivu vrijednost koeficijenta trenja μ_{1max} u konkretnom slučaju. Između poprečnog nagiba i brzine v_{am} postoji dakle snošaj (usp. i 36):

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (59a)$$

Po pravilu je $\operatorname{tg} \beta$ mali pravi slomak. Kako je i $\cos \alpha$ pravi slomak, to je $\cos \alpha \operatorname{tg} \beta$, pogotovo $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta$ toliko maleni pravi slomak, da se praktički može zanemariti prema jedinici. U zavojici putoklazine su pragovima zbog toga možemo praktički dovoljno točno staviti:

$$v = \operatorname{tg} \alpha \text{ i } T_1 = (\operatorname{tg} \alpha - \mu_1) Q \cos \alpha, \quad (\operatorname{tg} \beta > 0; W_2 = 0). \quad (60)$$

Pritom μ_1 označuje koeficijent trenja koje nastaje na podlozi klizanja, t. j. na pragovima i na nastoru među njima.

Uz dovoljno veliku brzinu klizanja centrifugalna sila pritiskuje teško tijelo i na obodnu vertikalnu stijenu vodilicu u zavojici. Zbog toga nastaje na toj stijeni trenje

$$T_2 = \mu_2 W_2, \quad (61)$$

koje se opire djelovanju tangencijalne sile T_1 . Pritom μ_2 označuje koeficijent trenja, a W_2 reakciju vertikalne stijene vodilice. Uz dovoljno veliku centrifugalnu silu tangencijalna sila, koja goni teško tijelo niz putoklizinu u zavojici, iznosi dakle:

$$T = T_1 - T_2 = (\operatorname{tg} \alpha - \mu_1) Q \cos \alpha - \mu_2 W_2. \quad (62)$$

Samo zbog *uzdužnog* (α) i *poprečnog nagiba* (β) *podloge* u zavojici putoklazine nastaje centripetalna sila upravo kao u zavojici, žlijeba (usp. 30):

$$N_1 = Q \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Cjelokupna pak centripetalna odnosno centrifugalna sila u zavojici svake klizine (prema form. 18) iznosi (usp. i 11):

$$N = mv_h^2 : r = mv^2 \cdot \cos^2 \alpha : r.$$

Na vertikalnoj stijeni vodilici nastaje reakcija identična sa dijelom ukupne centripetalne sile, koju ta stijena proizvodi:

$$W_2 = N_2 = N - N_1 = \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{r} - Q \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

S obzirom na (35) i (59) posljednja jednadžba može se napisati i ovako:

$$W_2 = N_2 = Q \cos \alpha \left(\frac{v^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right). \quad (63)$$

Jednadžba tangencijalne sile (62) prelazi onda u

$$T = \left(\frac{v_{am}^2}{k} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} - \frac{v^2}{k} \right) \mu_2 Q \cos \alpha, \quad (\operatorname{tg} \beta > 0, W_2 > 0), \quad (64)$$

te općenito određuje tangencijalnu silu, zbog koje klizi teško tijelo u zavojici putoklizine sa pragovima. Formula (60) određuje tu silu u specijalnom slučaju, kad teško tijelo klizi kroz zavojicu tako, da se ne prislanja na vertikalnu obodnu stijenu ($W_2 = 0$), a formula

$$T = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} - \frac{v^2}{k} \right) \mu_2 Q \cos \alpha, \quad (\operatorname{tg} \beta = 0, W_2 > 0), \quad (65)$$

u specijalnom slučaju, u kojem podloga klizanja u zavojici nema poprečnog nagiba ($\operatorname{tg} \beta = 0$; $v_{am}^2 = rg \operatorname{tg} \beta = 0$).

Jednolično klizi teško tijelo kroz zavojicu — i to brzinom v_a , kojom je ušlo u nju — ako je u svakoj točki zavojice tangencijalna sila jednaka ničtici. Taj slučaj pak nastupa, kad je u svakoj točki zavojice (iz 64, za $T = 0$):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} = \frac{c^2}{k} \quad (66)$$

Ovo je općenita jednadžba *stacionarne brzine* c u zavojici putoklizine s pragovima.

Ako je dakle $\operatorname{tg} \beta > 0$ i $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$, a brzina na početku zavojice (v_a), zadovoljava jednadžba (66), teško tijelo klizi jednolično kroz tu zavojicu tom brzinom, te se prislanja i na stijenu vodilicu. U tom je naime slučaju: $v = v_a = c > v_{am}$, a $W_2 > 0$ (usp. 63).

Ako je $\operatorname{tg} \beta > 0$, a $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$, stacionarna brzina iznosi:

$$v = v_a = v_{am} = c,$$

a teško tijelo, koje klizi, ne prislanja se na stijenu vodilicu. Jer je u slučaju $v = v_a = v_{am}$ reakcija te stijene jednaka ničtici ($W_2 = 0$), a teško tijelo opisuje kružnu vijčanicu samo zbog uzdužnog i poprečnog nagiba podloge klizanja.

Nema li podloge poprečnog nagiba ($\operatorname{tg} \beta = 0$, $v_{am} = 0$), stacionarna brzina postoji samo u slučajn $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$; te iznosi (iz 66):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} = \frac{c^2}{k}, \quad (\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta = 0), \quad (66a)$$

a teško tijelo opisuje kružnu vijčanicu samo zbog prislanjanja na stijenu vodilicu. Reakcija te stijene iznosi (usp. (63):

$$W_2 = N_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} Q \cos \alpha, \quad (\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta = 0). \quad (63a)$$

Stacionarna brzina $c > 0$ postoji i u slučaju $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$, ako (usp. 59a i 66):

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta > \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2}.$$

Njezin je iznos iz (66):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2} = \frac{c^2}{k}, \quad (\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha). \quad (66b)$$

Stacionarna brzina u slučajevima $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$ ne može biti jednaka ničici, a jednaka je ničtici, u slučaju $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$, ako je

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2}. \quad (66c)$$

Konačno u slučajevima $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$ stacionarna brzina je imaginarna, t. j. ne postoji, ako je

$$\frac{v_{am}^2}{k} < \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2}. \quad (66d)$$

Koeficijent trenja μ_1 putoklzinne s pragovima u pravcu i u zavojici je isti, jer se takva podloga klizanja u pravcu i u zavojici bitno ne razlikuje. Taj je dakle koeficijent poznat, ili se može odrediti na poznat način. Koeficijent trenja μ_2 nastaje u vanjskoj vertikalnoj obodnoj stijeni vodilici. Drvo se, upušta sa debljim i zarubljenim krajem sprijeda u putoklzinu. S tim se krajem i prislanja drvo o stijenu vodilicu, kad klizi kroz zavojicu. Nasječena vlakanca zaruba koso udaraju o vlakanca drvene stijene vodilice. Kad pak drvo, koje klizi, prelazi preko pragova, svojim vlakancima *ukrštava* vlakanca pragova; pritom prelazi i preko nabitog nastora međn pragovima. Općenito će se dakle razlikovati koeficijent trenja μ_1 od koeficijenta trenja μ_2 . Koliko se razlikuj, o tome nemamo podataka. Vjerojatno je koeficijent μ_2 nešto veći od koeficijenta μ_1 , poradi zaoštrenih vlakanca zaruba i kosog zadiranja u ohodnu stijenu. Eksperimentalno bi se mogao izračunati koeficijent μ_2 iz formula (66) u slučajevima, u kojima je poznata stacionarna brzina. U mnogim praktičnim slučajevima moći će se približno staviti $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

S pomoću stacionarne brzine konačno možemo jednostavnije napisati općenitu formulu (64) tangencijalne sile T , zbog koje teško tijelo klizi u zavojici klizine s pragovima, ovako (usp. (64) i (66):

$$T = \left(\frac{c^2}{k} - \frac{v^2}{k} \right) \mu_2 Q \cos \alpha. \quad (67)$$

9. MIJENA BRZINE KLIZANJA TEŠKOG TIJELA U ZAVOJICI KLIZINE S PRAGOVIMA — GLEITGESCHWINDIGKEITSÄNDERUNG EINES SCHWEREN KÖRPERS IN KURVEN DER SCHWELLENPROFILRIESEN

a) *Zavojica putoklazine pada u smjeru klizanja, a koeficijent trenja se nalazi u granicama $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$.*

Iznos tangencijalne sile, koja goni teško tijelo niz ovakvu zavojicu, određen je form. (67). Ubrzanje zbog te sile iznosi (usp. i 35)

$$a_t = T : m = \left(\frac{c^2}{k} - \frac{v^2}{k} \right) \mu_2 g \cos \alpha = \mu_2 (c^2 - v^2) \frac{\cos^2 \alpha}{r}$$

Horizontalna je projekcija tog ubrzanja

$$a_{th} = a_t \cos \alpha = \mu_2 (c^2 - v^2) \frac{\cos^3 \alpha}{r}$$

Pomoću poznatog snošaja

$$v dv \cos^2 \alpha = v_h dv_h = a_{th} ds_h = a_{th} r d\varphi$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$v dv = \mu_2 (c^2 - v^2) \cos \alpha d\varphi,$$

ili
$$\frac{dv}{d\varphi} + \mu_2 v \cos \alpha = \mu_2 \frac{c^2 \cos \alpha}{v}$$

Uz supstituciju $v = z e^{-\mu_2 \varphi \cos \alpha}$ dobivamo općenito rješenje:

$$v^2 e^{2\mu_2 \varphi \cos \alpha} = c^2 e^{2\mu_2 \varphi \cos \alpha} + 2C$$

Za $\varphi = 0$ je $v = v_a$; mora dakle biti $2C = v_a^2 - c^2$ i dalje

$$v^2 = c^2 + (v_a^2 - c^2) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha} \quad (68)$$

Ova se formula točno podudara sa formulom (65), otisnutoj u' uvodno navedenoj radnji. Određuje pak brzinu klizanja v na kraju zavojice, središnjeg kuta φ , koja pada u smjeru klizanja ($\operatorname{tg} \alpha > 0$), a koeficijent trenja se nalazi u granicama $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$.

Rečeno je bilo, da u slučajevima $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$ stacionarna brzina ne može biti jednaka ničici, nego je uvijek $c > 0$. Ako je putoklazina ima poprečni nagib ($\operatorname{tg} \beta > 0$, $v_{am} > 0$), form. (66b) određuje njezin iznos; nema li pak putoklazina poprečnog nagiba ($\operatorname{tg} \beta = 0$, $v_{am} = 0$), stacionarna brzina se računa po form. (66a).

Brzina na početku zavojice može biti manja ili veća od stacionarne brzine, a i jednaka njoj.

Ako je $v_a < c$, za račun zgodniji oblik formule (68) je

$$\frac{v^2}{k} = \frac{c^2}{k} - \left(\frac{c^2}{k} - \frac{v_a^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \quad (v_a < c). \quad (68a)$$

Najmanja brzina nalazi se na početku zavojice (za $\varphi = 0$ je $v = v_a < c$), te raste prema kraju zavojice, no uvijek ostaje manja od stacionarne brzine, jer ovu bi dostigla istom u beskonačnosti (za $\varphi \rightarrow \infty$; $v \rightarrow c$).

Ako je $v_a = c$, onda je $v = c$ za svaku vrijednost φ . Znači, teško tijelo klizi stacionarnom brzinom jednolično od početka do kraja zavojice.

Ako je $v_a > c$, za račun zgodniji oblik form. (68) je

$$\frac{v^2}{k} = \frac{c^2}{k} + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{c^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \quad (v_a > c). \quad (68b)$$

Sad se pak najveća brzina nalazi na početku zavojice (za $\varphi = 0$, je $v = v_a > c$), te pada prema kraju zavojice, ali ostaje uvijek veća od stacionarne brzine, jer na tu bi spala istom u beskonačnosti (za $\varphi \rightarrow \infty$, $v \rightarrow c$).

Uz postavljene pretpostavke ove, mehanički posve točne formule (68a i 68b) već su toliko i matematski jednostavne, da ih lako može upotrebiti svaki onaj, koji je upućen u računanje logaritamskim tablicama. Stoga, ni ne postavljam namjesto ovih približne jednostavnije formule, i to stim manje, što u njima ne bi došla do izražaja za ovaj slučaj klizanja značajna stacionarna brzina.

b) *Zavojica putoklizine pada u smjeru klizanja, a koeficijent trenja jednak je uzdužnom nagibu* ($0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$). Ima li putoklizina poprečan nagib $\operatorname{tg} \beta > 0$, onda je $v_{am} > 0$, a stacionarna brzina $c = v_{am} > 0$ (usp. 66). Brzina na početku zavojice, da tijelo klizi, može biti samo veća od stacionarne brzine ili jednaka njoj ($v_a \geq c = v_{am}$).

Ako je $v_a > c = v_{am}$, za određenje brzine klizanja na kraju zavojice središnjeg kuta φ , vrijedi form. (68 b), koja sad poprma oblik

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) e^{-2\mu_1 \varphi \cos \alpha}, \quad (v_a > v_{am} = c). \quad (68c)$$

Najveća brzina se nalazi na početku zavojice (za $\varphi = 0$ je $v = v_a > v_{am}$) te pada prema kraju zavojice, ali ostaje uvijek veća od brzine v_{am} , jer na tu bi spala istom u beskonačnosti (za $\varphi \rightarrow \infty$, $v \rightarrow v_{am}$).

Ako je pak $v_a = v_{am}$, onda je $v = v_{am}$ za svaku vrijednost φ , t. j. teško tijelo klizi stacionarnom brzinom $c = v_{am}$ od početka do kraja zavojice.

c) *Zavojica putoklizine pada u smjeru klizanja, a koeficijent trenja jednak je uzdužnom nagibu* ($0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$). Ako putoklizina pritom nema poprečnog nagiba ($\operatorname{tg} \beta = 0$), onda je $v_{am} = 0$ i $c = 0$ (usp. 66). U posljednjem slučaju jednadžba brzine (68b) ili (68c) prelazi u:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} e^{-2\mu_1 \varphi \cos \alpha}, \quad (\operatorname{tg} \alpha = \mu_1, \operatorname{tg} \beta = 0, c = 0). \quad (68d)$$

Brzina na početku zavojice može biti samo $v_a > 0$.

d) *Zavojica putoklazine pada u smjeru klizanja, a koeficijent trenja je veći od uzdužnog nagiba* ($0 < \operatorname{tg} \alpha < \mu_1$). Postoji li poprečan nagib ($\operatorname{tg} \beta > 0$), stacionarna brzina može biti veća od ništice ($c > 0$), i to, ako je (66b):

$$\frac{v_{am}^2}{k} > \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2},$$

te iznosi:

$$\frac{c^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2} > 0.$$

Pritom može biti $v_a > v_{am}$ ili $v_a = v_{am}$.

Ako je $v_a > v_{am}$, onda je $W_2 > 0$ (usp. 63). Za određenje brzine klizanja na kraju zavojice središnjeg kuta φ važi formula (68b), jer je $v_a > v_{am} > c$.

Ako je pak $v_a = v_{am}$, onda je $W_2 = 0$, dakle ne vrijedi form. (68) uopće. Tangencijalna sila, koja djeluje na tijelo, kad klizi, iznosi (usp. 60):

$$T_1 = -(\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) Q \cos \alpha.$$

Zbog te sile nastaje usporenje $a_t = -(\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) g \cos \alpha$, a horizontalna projekcija tog usporenja iznosi:

$$a_{th} = a_t \cos \alpha = -(\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) g \cos^2 \alpha.$$

Iz snošaja: $v_h dv_h = v dv \cos^2 \alpha = a_{th} r d\varphi$ dobivamo:

$$v dv = -(\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) r g d\varphi = -k (\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha d\varphi.$$

Općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$v^2 = -2k (\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) \varphi \cos \alpha + 2C.$$

Za $\varphi = 0$ je $v = v_{am}$; mora dakle biti $2C = v_{am}^2$, a onda

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2 (\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) \varphi \cos \alpha. \quad (69)$$

Ova formula određuje dakle brzinu klizanja v na kraju zavojice središnjeg kuta φ , ako je $\operatorname{tg} \beta > 0$, koeficijent trenja $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$, a brzina na početku zavojice $v_a = v_{am}$.

e) *Zavojica putoklazine pada u smjeru klizanja, a koeficijent trenja je veći od uzdužnog nagiba* ($\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$). Postoji li poprečan nagib ($\operatorname{tg} \beta > 0$), stacionarna brzina jednaka je ništici ($c = 0$), ako je

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2}. \quad (66c)$$

Brzina na početku zavojice može biti $v_a > v_{am}$ ili $v_a = v_{am}$. Ako je $v_a > v_{am}$, onda je i $W_2 > 0$ (usp. 63). Za tangencijalnu silu vrijedi dakle form. (67), koja za $c = 0$ prelazi u

$$T = -\mu_2 \frac{v^2}{k} Q \cos \alpha.$$

Pod djelovanjem pak takve sile brzina klizanja, se mijenja po form. (68d):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \quad (\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{tg} \beta > 0, c = 0, v_a > v_{am}). \quad (70)$$

Kako je prema pretpostavci $v_a > v_{am}$ (za razliku prema prije), brzina v od svog najvećeg iznosa $v = v_a > v_{am}$ na početku zavojice, sa porastom kutā φ može spasti na iznos $v = v_{am}$. To se događa na na mjestu, na kom je središji kut φ narastao na iznos:

$$\varphi = \frac{1}{\mu_2 \cos \alpha} \cdot \ln \left(\frac{v_a}{v_{am}} \right). \quad (71)$$

Do tog mjesta vrijedi form. (70). Od tog mlesta dalje ne vrijedi form. (70), nego form. (69), jer od tog mjesta dalje je $W_2 = 0$ (usp. 63).

Isto tako, ako je $v_a = v_{am}$, ne vrijedi form. (70), nego form. (69).

f). *Zāvojica putoklizine uspinje se u smjeru klizanja pod kutom ϵ prema horizontali, ima poprečni nagib ($\operatorname{tg} \beta > 0$), a brzina na njezinu početku je $v_a > v_{am}$.*

Jednadžba tangencijalne sile (64) za $\alpha = -\epsilon$ prelazi u:

$$T = -[\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1 + \left(\frac{v^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \mu_2] Q \cos \epsilon. \quad (72)$$

Zbog te silē nastaje usporenje

$$a_t = - \left(\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1 + \mu_2 \frac{v^2}{k} - \mu_2 \frac{v_{am}^2}{k} \right) g \cos \epsilon.$$

s horizontalnom projekcijom: $a_{th} = a_t \cdot \cos \epsilon$.

Iz snošaja $v dv = \frac{1}{\cos^2 \epsilon} a_{th} \cdot r d\varphi = \frac{1}{\cos \epsilon} a_t r d\varphi$ dobivamo:

$$v dv + \mu_2 v^2 \cos \epsilon d\varphi = -(\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1) r g d\varphi + \mu_2 v_{am}^2 \cos \epsilon d\varphi \quad \text{ili:}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} + \mu_2 v \cos \epsilon = - \frac{(\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1) r g - \mu_2 v_{am}^2 \cos \epsilon}{v}.$$

Uz supstituciju: $v = z \cdot e^{-\mu_2 \varphi \cos \epsilon}$ općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$v^2 e^{2\mu_2 \varphi \cos \epsilon} = - \left[k \frac{\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1}{\mu_2} - v_{am}^2 \right] e^{2\mu_2 \varphi \cos \epsilon} + 2C.$$

Za $\varphi = 0$ je $v = v_a$; mora dakle biti

$$2C = v_a^2 + k \frac{\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1}{\mu_2} - v_{am}^2.$$

Konačno rješenje onda glasi:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \left(\frac{\operatorname{tg} \epsilon + \mu_1}{\mu_2} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \cdot \left(e^{2\mu_2 \varphi \cos \epsilon} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi \cos \epsilon}. \quad (73)$$

Ova formula određuje brzinu klizanja v na kraju zavojice pu-
toklazine središnjeg kuta φ , s poprečnim nagibom ($\operatorname{tg} \beta > 0$), koja se
uspinja prema horizontali pod kutom ε , ako je brzina na početku
zavojice $v_a > v_{am} > 0$.

Najveća brzina se nalazi na početku zavojice (za $\varphi = 0$ je $v_a > v_{am}$).
Prema kraju zavojice biva sve manja. Kad spadne na iznos $v = v_{am}$,
središnji kut φ , narastao je na iznos:

$$\varphi = \frac{1}{2 \mu_2 \cos \varepsilon} \ln \left[1 + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \frac{\mu_2}{\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1} \right]. \quad (74)$$

To je ujedno i granica, do koje vrijedi formula (73). Preko te
granica brzina se mijenja po formuli (75):

Namjesto točnije formule (73) može poslužiti približno formula
(73a), do koje dolazimo ovako:

Prema formuli (59a) je

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{v^2}{\operatorname{rg}} \cos \varepsilon = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \beta.$$

Analogno stavljeno

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v^2}{\operatorname{rg}} \cos \varepsilon = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \beta_1.$$

Onda je

$$\frac{v^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} = \cos \varepsilon (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta) = \cos \varepsilon \cdot \Delta \operatorname{tg} \beta.$$

Jednadžba tangencijalne sile (72) prelazi onda u

$$T = - [\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1 + \mu_2 \cos \varepsilon \cdot \Delta \operatorname{tg} \beta] Q \cos \varepsilon.$$

Član u zagradi $\mu_2 \cos \varepsilon \cdot \Delta \operatorname{tg} \beta$ kao produkt triju pravih slomaka
zanemarujemo prema zbroju preostala dva člana: $\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1$.

Posljednja jednadžba pojednostavljuje se onda u:

$$T = - (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) Q \cos \varepsilon.$$

Zbog te sile nastaje usporenje $a_t = - (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) g \cos \varepsilon$ s hori-
zontalnom projekcijom $a_{th} = - (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) g \cos^2 \varepsilon$.

Iz snošaja $v dv = \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} a_{th} \cdot r d\varphi$ dobivamo

$$v dv = - (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \operatorname{rg} d\varphi = - k (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \cos \varepsilon d\varphi.$$

Općenito rješenje ove jednadžbe glasi

$$v^2 = - 2k (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \varphi \cos \varepsilon + 2C.$$

Na početku zavojice, za $\varphi = 0$ je $v = v_a$. Onda mora biti $2C = v_a^2$
i dalje:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2 (\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \varphi \cos \varepsilon. \quad (73a)$$

Ova formula približno određuje brzinu klizanja (v) na kraju zavojice središnjeg kuta φ , s poprečnim nagibom ($\operatorname{tg}\beta > 0$), koja se uspinje prema horizontali pod kutom ε , ako je brzina na početku zavojice $v_a > v_{am} > 0$.

Najveća brzina se nalazi na početku zavojice (za $\varphi = 0$ je $v = v_a > v_{am}$). Prema kraju zavojice brzina biva sve manja. Kad spadne na iznos $v = v_{ma}$, središnji kut φ naraste na iznos:

$$\varphi = \frac{v_a^2 - v_{am}^2}{2k(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) \cos\varepsilon} = \frac{v_a^2 - v_{am}^2}{2\operatorname{rg}(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1)}. \quad (74a)$$

To je ujedno granica, do koje vrijedi formula (73a). Preko te granice brzina se mijenja po formuli (75).

Približna formula (74a) može se dakle poslužiti namjesto točnije formule (74).

g) *Zavojica putoklizine se uspinje u smjeru klizanja pod kutom ε , ima poprečni nagib ($\operatorname{tg}\beta > 0$), a brzina na njezinu početku je $v_a = v_{am}$. Tangencijalna sila u ovom slučaju iznosi (usp. 72):*

$$T = -(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) Q \cos\varepsilon.$$

Zbog te sile nastupa usporenje: $a_t = -(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) g \cos\varepsilon$ s horizontalnom projekcijom: $a_{th} = a_t \cos\varepsilon$.

Iz snošaja $v dv = \frac{1}{\cos^2\varepsilon} a_{th} \cdot r d\varphi$ dobivamo:

$$v dv = -(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) \operatorname{rg} d\varphi = -k(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) \cos\varepsilon d\varphi.$$

Općenito rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$v^2 = -2k(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) \varphi \cos\varepsilon + 2C.$$

Za $\varphi = 0$, na početku zavojice, je $v = v_a = v_{am}$; mora dakle biti $2C = v_{am}^2$, a onda:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2(\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1) \varphi \cos\varepsilon. \quad (75)$$

Ova formula određuje brzinu klizanja v na kraju zavojice putoklizine, središnjeg kuta φ , s poprečnim nagibom ($\operatorname{tg}\beta > 0$), koja se uspinje u smjeru klizanja pod kutom ε , ako brzina na početku iznosi $v = v_{am}$.

h) *Zavojica putoklizine se uspinje u smjeru klizanja pod kutom ε , a nema poprečnog nagiba ($\operatorname{tg}\beta = 0$).*

U tom je slučaju $v_{am} = 0$ i jedino se po tome razlikuje ovaj slučaj klizine i klizanja od slučaja obrađenog pod f).

Formula pak (73) za $v_{am} = 0$ prelazi u:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \mu_1}{\mu_2} \left(e^{2\mu_2 \varphi \cos\varepsilon} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi \cos\varepsilon}. \quad (76)$$

Ova formula određuje brzinu klizanja v na kraju zavojice putokluzine središnjeg kuta φ , bez poprečnog nagiba ($\operatorname{tg} \beta = 0$), koja se uspinje u smjeru klizanja pot kutom ε . Ova se formula nalazi otisnuta pod br. (73) u uvodno spomenutoj radnji (namjesto znaka ε tamo služi znak α).

i). *Zavojica putokluzine se nalazi u horizontalnoj ravlini* ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0$), *ima poprečni nagib* ($\operatorname{tg} \beta > 0$), a brzina na početku zavojice je $v_a > v_{am}$.

Za $\varepsilon = 0$ iz (73) dobivamo neposredno:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \left(e^{2\mu_2 \varphi} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi} \quad (77)$$

Ova formula određuje brzinu klizanja v na kraju zavojici putokluzine središnjeg kuta φ , s poprečnim nagibom ($\operatorname{tg} \beta > 0$), koja se nalazi u horizontalnoj ravlini ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0$), ako je na početku zavojice brzina klizanja $v_a > v_{am}$.

Na početku zavojice brzina klizanja je najveća (za $\varphi = 0$ je $v = v_a > v_{am}$), te biva sve manja prema kraju zavojice. Kad spadne na iznos $v_a = v_{am}$, središnji kut je narastao na iznos:

$$\varphi = \frac{1}{2\mu_2} \ln \left[1 + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] \quad (78)$$

To je ujedno i granica, do koje vrijedi formula (77). Preko te granice brzina klizanja se mijenja po for. (79).

j). *Zavojica putokluzine se nalazi u horizontalnoj ravlini* ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0$), *ima poprečni nagib* ($\operatorname{tg} \beta > 0$), a brzina na početku zavojice je $v_a = v_{am}$.

Za $\varepsilon = 0$ iz (75) neposredno izlazi:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2\mu_1 \varphi \quad (79)$$

k) *Zavojica pukokluzine se nalazi u horizontalnoj ravlini* ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0$), a *nema poprečnog nagiba* ($\operatorname{tg} \beta = 0$).

Za $\varepsilon = 0$ iz (76) neposredno izlazi:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(e^{2\mu_2 \varphi} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi} \quad (80)$$

10. PREGLED FORMULA ZA IZRACUNAVANJE BRZINE KLIZANJA S PRAGOVIMA — FORMELN-ÜBERSICHT FÜR BERECHNUNG DER GLEITGESCHWINDIGKEITSÄNDERUNG IN KURVEN DER SCHWELLENPROFILRIESE

Općenite oznake:

$g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ ubrzavanje pri slobodnom padu.

r (m) polumjer zavojice u horizontalnoj projekciji.

φ središnji kut zavojice u horiz. projekciji.

- β jednostrešni poprečni nagib u zavojici putoklazine.
 μ_1 koeficijent trenja na podlozi putoklazine.
 μ_2 kveficijent trenja na vertikalnoj stijeni vodilici putoklazine u zavojici.

v_{am} (m/sec) predvidljiva najmanja brzina klizanja na početku zavojice; određuje se uz predvidljive najveće vrijednosti koeficijenta trenja μ_1 i μ_2 .

v_a (m/sec) brzina na početku, v (m/sec) na kraju zavojice.

a) Zavojica putoklazine pada u smjeru klizanja pod kutom α prema horizontali.

$$k = \frac{rg}{\cos \alpha} (\text{m/sec})^2 \text{ konstanta zavojice (35).}$$

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \text{ ili } \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{am}^2}{k} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{v_{am}^2}{rg}. \quad (59, 59a)$$

$$\frac{c^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} \text{ općenita jednadžba stacionarne brzine u slučaju } \beta > 0 \text{ i } \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha. \quad (66)$$

$c = v_{nm}$ stacionarna brzina u slučaju $\beta > 0$ i $\mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{c^2}{k} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{\mu_2} \text{ stacionarna brzina u slučaju } \beta = 0 \text{ i } \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha. \quad (66a)$$

$$\frac{c^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2} \text{ stacionarna brzina u slučaju}$$

$$\beta > 0, \mu_1 > \operatorname{tg} \alpha, \text{ ako je } \frac{v_{am}^2}{k} > \frac{\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha}{\mu_2}. \quad (66b)$$

Brzina klizanja na kraju zavojice središnjeg kuta φ :

1. U slučaju $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{c^2}{k} - \left(\frac{c^2}{k} - \frac{v_a^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \text{ ako je } v_a < c. \quad (68a)$$

$$\frac{v^2}{k} = \frac{c^2}{k} + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{c^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \text{ ako je } v_a > c. \quad (68b)$$

2. U slučaju $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$; $\beta > 0$; $c = v_{am}$:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \text{ ako je } v_a > v_{am} = c, \quad (68c)$$

$v = v_{am} = c$, ako je $v_a = v_{am} = c$.

3. U slučaju $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $\beta = 0$, $c = 0$:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha} \quad (68d)$$

4. U slučaju $0 < \operatorname{tg} \alpha < \mu_1$, $\beta > 0$, $c > 0$ (prema 66b):

$$\frac{v^2}{k} = \frac{c^2}{k} + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{c^2}{k} \right) e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \text{ ako je } v_a > v_{am} \quad (68b)$$

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2(\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) \varphi \cos \alpha, \text{ ako je } v_a = v_{am}. \quad (69)$$

5. U slučaju $0 < \operatorname{tg} \alpha < \mu_1$, $\beta > 0$ i $c = 0$: (66e)

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} e^{-2\mu_2 \varphi \cos \alpha}, \text{ ako je } v_a > v_{am}, \quad (70)$$

a vrijedi do iznosa središnjeg kuta:

$$\varphi = \frac{1}{2\mu_2 \cos \alpha} \cdot \ln \left[\frac{v_a^2/k}{v_{am}^2/k} \right] \text{ ekvivalentno sa 71).}$$

Na potezu luka, koji pripada većem iznosu središnjeg kuta od ovog, pa u slučaju $v_a = v_{am}$ vrijedi formula (69), (vidi pod 4).

b) Zavojica putoklazine se nalazi u horizontalno ravnnini ($\alpha = 0$).

$$k = rg \text{ konstanta zavojice. (35)}$$

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{rg} = \operatorname{tg} \beta. \quad (34, 59, 59a)$$

Brzina klizanja na kraju zavojice središnjeg kuta φ :

6. U slučaju $\beta > 0$ i $v_a > v_{am}$:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) (e^{2\mu_1 \varphi} - 1) \right] e^{-\mu_1 \varphi}, \quad (77)$$

a vrijedi samo do iznosa središnjeg kuta:

$$\varphi = \frac{1}{2\mu_2} \ln \left[1 + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \right]. \quad (78)$$

Od tog mjesta dalje vrijedi formula (79).

7. U slučaju $\beta > 0$ i $v_a = v_{am}$:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2\mu_1 \varphi. \quad (79)$$

8. U slučaju $\beta = 0$:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{2\mu_1 \varphi} - 1) \right] e^{-2\mu_1 \varphi \cos \alpha} \quad (80)$$

c) Zavojsica putoklazine se uspinje u smjeru klizanja pod kutom ε ($= -\alpha$).

$$k = \frac{rg}{\cos \varepsilon} \text{ konstanta zavojice. (35)}$$

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \beta \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{am}^2}{k \cos \varepsilon} = \frac{v_{am}^2}{rg}. \quad (59, 59a)$$

Brzina klizanja na kraju zavojice središnjeg kuta, φ :

9. U slučaju $\beta > 0$ i $v_a > v_{am}$:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1}{\mu_2} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \left(e^{2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon}, \quad (73)$$

a vrijedi do iznosa središnjeg kuta:

$$\varphi = \frac{1}{2\mu_2 \cos \varepsilon} \ln \left[1 + \left(\frac{v_a^2}{k} - \frac{v_{am}^2}{k} \right) \frac{\mu_2}{\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1} \right]. \quad (74)$$

Preko te granice vrijedi formula (75).

Namjesto točnijih formula (73) i (74) mogu poslužiti i približne formule:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_a^2}{k} - 2(\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \varphi \cos \varepsilon, \quad (73a)$$

$$\varphi = \frac{v_a^2/k - v_{am}^2/k}{2(\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \cos \varepsilon} = \frac{v_a^2 - v_{am}^2}{2rg(\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1)}. \quad (74a)$$

10. U slučaju $\beta > 0$ i $v_a = v_{am}$:

$$\frac{v^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{k} - 2(\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \varphi \cos \varepsilon, \quad (75)$$

11. U slučaju $\beta = 0$; $v_{am} = 0$:

$$\frac{v^2}{k} = \left[\frac{v_a^2}{k} - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1}{\mu_2} \left(e^{2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon} - 1 \right) \right] e^{-2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon}. \quad (76)$$

11. PRIMJENA FORMULA ISKAZANIH U PRIJAŠNJOJ TOČKI — ANWENDUNG DER IN VORHERIGEM PUNKT ANGEFÜHRTEN FORMELN

Primjer 1: Zadan je središnji kut $\varphi = 90^\circ$, $\operatorname{arc} \varphi = 1,571$, zavojice putoklazine s pragovima, trasirane polumjerm $r = 200$ m, s uzdužnim padom

$$\alpha = 16^\circ 42', \quad \cos \alpha = 0,958, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,30.$$

Brzina na početku zavojice zadana je sa

$$v_a^2 : g = 30 \text{ m}, \quad (v_a = 17,2 \text{ m/sec}).$$

Ako koeficijent trenja iznosi $\mu_1 = 0,20$, $\mu_2 = 0,22$, a poprečni nagib $\operatorname{tg} \beta = 0,10$, koliko iznosi brzina klizanja na kraju zavojice?

Konstanta zavojice (35):

$$k = 200 \cdot 9,81 : 0,958 = 2048 \text{ (m/sec)}^2.$$

Najmanja brzina na početku zavojice određena je sa (59):

$$\frac{v_{am}^2}{k} = 0,958 \cdot 0,1 = 0,096.$$

Stacionarna brzina određena je sa (66):

$$\frac{c^2}{k} = 0,096 + \frac{0,30 - 0,20}{0,22} = 0,096 + 0,454 = 0,550.$$

Nadalje je:

$$\frac{v_a^2}{k} = \frac{v_a^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha}{r} = 30 \cdot \frac{0,958}{200} = 0,144; \quad v_a < c.$$

U obzir dolazi formula (68a).

$$2 \mu_2 \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,22 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 0,22 \cdot 3,01 = 0,662.$$

$$\log e^{0,662} = 0,662 \cdot 0,434294 = 0,287503, \quad e^{0,662} = 1,939.$$

$$(68a) \quad \frac{v^2}{k} = 0,550 - \frac{0,550 - 0,144}{1,939} = 0,550 - 0,209 = 0,341,$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,341} = \sqrt{698,3} = 26,4 \text{ m/sec.}$$

Primjer 2. Zavojica putoklazine s pragovima kao u primjeru 1:

$$r = 200 \text{ m}; \quad \varphi = 90^\circ, \quad \text{arc } \varphi = 1,571,$$

$$\text{tg } \alpha = 0,30, \quad \alpha = 16^\circ 42', \quad \cos \alpha = 0,958.$$

• Konstanta zavojice $k = 2048 \text{ (m/sec)}^2$.

Brzina na početku zavojice: $v_a^2 : k = 0,144$, ($v_a = 17,2 \text{ m/sec}$).

Koeficijenti trenja: $\mu_1 = 0,30$, $\mu_2 = 0,33$.

Poprečni nagib putoklazine $\text{tg } \beta = 0,10$.

Koliko iznosi brzina klizanja na kraju zavojice?

Najmanja brzina na početku zavojice (59):

$v_{am}^2 : k = 0,958 \cdot 0,1 = 0,096$. Kako je $\mu_1 = \text{tg } \alpha$, to stacionarna brzina iznosi: $c^2 : k = v_{am}^2 : k = 0,096$; $v_a > v_{am} = c$. U obzir dolazi form. (68c).

$$2 \mu_2 \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,33 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 0,33 \cdot 3,01 = 0,993.$$

$$\log e^{0,993} = 0,993 \cdot 0,434294 = 0,431253,$$

$$e^{0,993} = 2,699.$$

$$(68c) \quad \frac{v^2}{k} = 0,096 + \frac{0,144 - 0,096}{2,699} = 0,096 + 0,018 = 0,114,$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,114} = \sqrt{233,5} = 15,3 \text{ m/sec.}$$

Primjer 3. Zavojica putoklazine s pragovima, kao u primjeru 1:

$$r = 200 \text{ m}; \quad \varphi = 90^\circ; \quad \text{arc } \varphi = 1,571;$$

$$\text{tg } \alpha = 0,30, \quad \alpha = 16^\circ 42', \quad \cos \alpha = 0,958.$$

Poprečni nagib zavojice $\beta = 0$.

Konstanta zavojice: $k = 2048 \text{ (m/sec)}^2$.

Brzina na početku zavojice: $v_a^2 : k = 0,144$ ($v_a = 17,2 \text{ m/sec}$).

Koeficijenti trenja $\mu_1 = 0,30 = \text{tg } \alpha$, $\mu_2 = 0,33$.

Koliko iznosi brzina klizanja na kraju zavojice?

U obzir dolazi form. (68d):

$$e^{0,993} = 2,699 \text{ (usp. prijašnji primjer).}$$

$$(68d): \quad \frac{v^2}{k} = \frac{0,144}{2,699} = 0,053$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,052} = \sqrt{108,5} = 10,4 \text{ m/sec.}$$

Primjer 4. Zavojica putoklazine s pragovima kao u primjeru 1:

$$r = 200 \text{ m}, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \text{arc } \varphi = 1,571;$$

$$\text{tg } \alpha = 0,30, \quad \alpha = 16^\circ 42', \quad \cos \alpha = 0,958.$$

Poprečni nagib putoklazine $\text{tg } \beta = 0,10$.

Najmanja brzina na početku (59) $v_{am}^2 : k = 0,958 \cdot 0,1 = 0,096$.

Koeficijent trenja $\mu_1 = 0,33 > \text{tg } \alpha$, $\mu_2 = 0,36$.

Brzina na početku zavojice $v_a^2 : k = 0,144$ ($v_a = 17,2 \text{ m/sec}$).

Konstanta zavojice $k = 2048 \text{ (m/sec)}^2$.

Koliko iznosi brzina na kraju zavojice?

Stacionarna brzina (66b)

$$\frac{c^2}{k} = 0,096 - \frac{0,33 - 0,30}{0,36} = 0,013 > 0.$$

Kako je osim toga $v_a > c$, u obzir dolazi form. (68b).

$$2\mu_2 \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,36 \cdot 1,571 \cdot 0,958 = 0,36 \cdot 3,01 = 1,084,$$

$$\log e^{1,084} = 1,084 \cdot 0,434294 = 0,470774.$$

$$e^{1,084} = 2,956.$$

$$(68b): \quad \frac{v^2}{k} = 0,013 + \frac{0,144 - 0,013}{2,956} = 0,013 + 0,044 = 0,057.$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,057} = \sqrt{116,7} = 10,8 \text{ m/sec.}$$

Primjer 5. Zavojica putoklazine s pragovima, kao u primjeru 1:

$$r = 200 \text{ m}, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \text{arc } \varphi = 1,571,$$

$$\text{tg } \alpha = 0,30, \quad \alpha = 36^\circ 42', \quad \cos \alpha = 0,958.$$

Koeficijenti trenja $\mu_1 = 0,33 > \text{tg } \alpha$, $\mu_2 = 0,36$.

Brzina na početku zavojice $v_a^2 : k = 0,144$ ($v_a = 17,2 \text{ m/sec}$).

Najmanja brzina na početku zavojice (66c):

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{\mu_1 - \text{tg } \alpha}{\mu_1} = \frac{0,33 - 0,30}{0,36} = 0,083, \quad (v_{am} = 13 \text{ m/sec}); \quad c = 0.$$

Poprečan nagib putoklazine (59) $\text{tg } \beta = 0,083 : 0,958 = 0,087$.

Konstanta zavojice $k = 2048 \text{ (m/sec)}^2$.

Do iznosa kuta (71):

$$\varphi = \frac{1}{2 \cdot 0,36 \cdot 0,958} \ln \left(\frac{0,144}{0,083} \right) = \frac{\ln 1,735}{0,6898} = \frac{0,551}{0,6898} = 0,799$$

vrijedi form. (70):

$$2\mu_2 \varphi \cos \alpha = 2 \cdot 0,36 \cdot 0,799 \cdot 0,958 = 0,6898 \cdot 0,799 = 0,551.$$

$$\log e^{0,551} = 0,551 \cdot 0,434294 = 0,239296; e^{0,551} = 1,735.$$

$$(70) \quad \frac{v^2}{k} = 0,144 : 1,735 = 0,083 = \frac{v_{am}^2}{k}.$$

Na daljem potezu zavojice, sa središnjim kutom

$$\varphi = 1,571 - 0,799 = 0,772 \text{ vrijedi form. (69):}$$

$$\frac{v^2}{k} = 0,083 - 2(0,33 - 0,30) 0,772 \cdot 0,958 = 0,083 - 0,044 = 0,039.$$

$$v = \sqrt{2048 \cdot 0,039} = \sqrt{79,9} = 8,9 \text{ m/sec.}$$

Primjer 6 i 7. Zavojica putoklazine s pragovima kao u primjeru 1. $r = 200 \text{ m}$, $\varphi = 90^\circ$, $\text{arc} \varphi = 1,571$; nalazi se u horizontalnoj ravnini: $\alpha = 0$.

Brzina na početku zavojice zadana je sa $v_a^2 : g = 30 \text{ m}$ ($v_a = 17,2 \text{ m/sec}$). Ako koeficijenti trenja iznosi $\mu_1 = 0,20$, $\mu_2 = 0,22$, a poprečni nagib $\text{tg} \beta = 0,10$, koliko iznosi brzina na kraju zavojice?

Konstanta zavojice (35) $k = rg = 200 \cdot 9,81 = 1962 \text{ (m/sec)}^2$.

Brzina na početku: $v_a^2 : k = 30 : 200 = 0,150$.

Najmanja brzina na početku $v_{am}^2 : k = \text{tg} \beta = 0,100$.

Do iznosa središnjeg kuta (78):

$$\varphi = \frac{1}{2 \cdot 0,22} \cdot \ln \left[1 + (0,15 - 0,10) \frac{0,22}{0,20} \right] = \frac{\ln 1,055}{0,44} = \frac{0,0535}{0,44} = 0,122$$

vrijedi form. (77):

$$2\mu_2 \varphi = 2 \cdot 0,22 \cdot 0,122 = 0,054;$$

$$\log e^{0,054} = 0,054 \cdot 0,434294 = 0,02345; e^{0,054} = 1,055.$$

$$\mu_1 : \mu_2 = 0,20 : 0,22 = 0,909.$$

$$(77) \quad \frac{v^2}{k} = [0,15 - (0,909 - 0,100) \cdot 0,055] : 1,055 = 0,10 = \frac{v_{am}^2}{k}.$$

Na daljem potezu zavojice, sa središnjim kutom

$$\varphi = 1,571 - 0,122 = 1,449, \text{ vrijedi form. (79):}$$

$$\frac{v^2}{k} = 0,100 - 2 \cdot 0,2 \cdot 1,449 = 0,1 - 0,58 = -0,48:$$

Kako je posljednji rezultat negativan, znači, teško tijelo će stati u zavojici. Iz (79) za $v = 0$, dobivamo

$$\varphi = \frac{1}{2\mu_1} \cdot \frac{v_{am}^2}{k} = \frac{1}{2 \cdot 0,2} \cdot 0,1 = 0,250.$$

Tijelo, koje klizi, sustat će dakle u zavojici nakon prevaljenog ukupnog središnjeg kuta

$$\varphi = 0,122 + 0,250 = 0,372$$

ili nakon prevaljenog puta od početka zavojice:

$$s_n = r\varphi = 200 \cdot 0,372 = 74,4 \text{ m.}$$

Primjer 8. Zavojica putokliziné s pragovima kao u primjeru 1: $r = 200 \text{ m}$, $\varphi = 90^\circ$, $\text{arc } \varphi = 1,571$, nalazi se u horizontalnoj ravnini $\alpha = 0$. Poprečni nagib putokliziné neka je također $\beta = 0$.

Koeficijenti trenja iznose $\mu_1 = 0,20$ i $\mu_2 = 0,22$. Koliko može najviše iznositi brzina na početku zavojice, da teško tijelo, koje klizi, sustane u toj zavojici?

$$\text{Uz } 2\mu_2\varphi = 2 \cdot 0,22 \cdot 1,571 = 0,691,$$

$$\log e^{0,691} = 0,691 \cdot 0,434294 = 0,300097; e^{0,691} = 1,996,$$

iz formule (80) za $v = 0$, dobivamo

$$\frac{v_a^2}{k} = \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{2\mu_2\varphi} - 1) = \frac{0,20}{0,22} \cdot 0,996 = 0,905,$$

$$k = rg = 200 \cdot 9,81 = 1962 \text{ (m/sec)}^2,$$

$$v_a = \sqrt{1962 \cdot 0,905} = \sqrt{1776} = 42,1 \text{ m/sec.}$$

Primjer 9 i 10. Zavojica putokliziné se uspinje u smjeru klanja pod kutom $\varepsilon = 5^\circ 43'$, $\text{tg } \varepsilon = 0,100$, $\text{cos } \varepsilon = 0,995$. Poprečni nagib putokliziné iznosi $\text{tg } \beta = 0,100$.

Najmanja brzina na početku zavojice (59):

$$\frac{v_{am}^2}{k} = 0,995 \cdot 0,1 = 0,100.$$

Konstanta zavojice (35): $k = 200 \cdot 9,81 : 0,995 = 1972 \text{ (m/ssec)}^2$.

Brzina na početku zavojice: $v_a = 40 \text{ m/sec}$ ili

$$\frac{v_a^2}{k} = 40^2 : 1972 = 0,811.$$

Koeficijent trenja: $\mu_1 = 0,20$, $\mu_2 = 0,22$.

Za brzinu na kraju zavojice vrijedi formula (73), ali samo do iznosa središnjeg kuta (74):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2 \cdot 0,22 \cdot 0,995} \ln \left[1 + (0,811 - 0,1) \frac{0,22}{0,1 + 0,2} \right] = \\ &= \frac{\ln 1,521}{0,438} = \frac{0,419}{0,438} = 0,957. \end{aligned}$$

Na kraju zavojice tolikog središnjeg kuta brzina klizanja iznosi (73):

$$2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon = 2 \cdot 0,22 \cdot 0,957 \cdot 0,995 = 0,957 \cdot 0,4378 = 0,419$$

$$\log e^{0,419} = 0,419 \cdot 0,434294 = 0,18197; e^{0,419} = 1,520.$$

$$(73) \frac{v^2}{k} = \left[0,811 - \left(\frac{0,1 + 0,2}{0,22} - 0,1 \right) 0,52 \right] : 1,52 = 0,1 = \frac{v_{am}^2}{k}.$$

Nakon dužine luka $s = 200 \cdot 0,957 = 191,4$ m brzina klizanja spala je od $v_a = 40$ m/sec na $v_{am} = \sqrt{0,1 \cdot 1972} = 14$ m/sec. Da brzina klizanja spadne na ništicu, središnji kut zavojice $\varphi = 0,957$ trebalo bi povećati još za iznos (iz 75 za $v = 0$):

$$\varphi = \frac{v_{am}^2}{k} : 2(\operatorname{tg} \varepsilon + \mu_1) \cos \varepsilon = \frac{0,100}{2(0,1 + 0,2) 0,995} = 0,168.$$

Središnji kut zavojice iznosio bi onda $\varphi = 0,957 + 0,168 = 1,125$, a dužina zavojice $s_n = 1,125 \cdot 200 = 225$ m.

Približna formula (73a) vrijedila bi samo do iznosa središnjeg kuta:

$$(74a) \quad \varphi = \frac{0,811 - 0,100}{2(0,1 + 0,2) 0,995} = \frac{0,711}{0,597} = 1,191.$$

Brzina na kraju tog središnjeg kuta iznosila bi (73a):

$$\frac{v^2}{k} = 0,811 - 2(0,1 + 0,2) \cdot 1,191 \cdot 0,995 = 0,1 = \frac{v_{am}^2}{k}.$$

Po približnom računu iznosio bi dakle središnji kut zavojice, na kraju koje bi sustalo tijelo, koje klizi

$$\varphi = 1,191 + 0,168 = 1,359.$$

Prema prije točnije izračunatom iznosu ($\varphi = 1,125$) približne formule daju veći iznos središnjeg kuta ($\varphi = 1,359$) za cca 20%.

° Primjer 11. Zavojica putoklizine kao u prijašnjem primjeru $\varepsilon = 5^\circ 43'$, $\operatorname{tg} \varepsilon = 0,1$, $\cos \varepsilon = 0,995$, $r = 200$ m, $\operatorname{arc} \varphi = 1,125$ ($\varphi = 64^\circ 17'$), ali poprečan nagib neka je sad $\beta = 0$. Ako koeficijenti trenja iznose $\mu_1 = 0,2$ i $\mu_2 = 0,22$, a brzina na početku zavojice $v_a = 40$ m/sec, kolika je brzina na kraju zavojice?

Konstanta zavojice: $k = 1972$ (m/sec)².

$$v_a^2 : k = 0,811.$$

U obzir dolazi form. (76):

$$2\mu_2 \varphi \cos \varepsilon = 2 \cdot 0,22 \cdot 1,125 \cdot 0,995 = 1,125 \cdot 0,4378 = 0,493$$

$$\log e^{0,493} = 0,493 \cdot 0,434294 = 0,21411; e^{0,493} = 1,637.$$

$$(76) \frac{v^2}{k} = \left[0,811 - \frac{0,1 + 0,2}{0,22} 0,637 \right] : 1,637 = (0,811 - 0,866) : 1,637.$$

Negativni član u zagradi je veći od pozitivnog člana. Znači, tijelo, koje klizi, sustat će u zavojici prije njezina kraja i to na kraju središnjeg kuta (izlazi iz 76 za $v = 0$):

$$\varphi = \frac{1}{2 \mu_2 \cos \varepsilon} \ln \left[1 + \frac{v_a^2}{k} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1 + \operatorname{tg} \varepsilon} \right] \quad (76b)$$

$$\varphi = \frac{1}{2 \cdot 0,22 \cdot 0,995} \ln \left(1 + \frac{0,811 \cdot 0,22}{0,2 + 0,1} \right) = \frac{\ln 1,595}{0,438} = \frac{0,467}{0,438} = 1,066.$$

Zavojica bez poprečnog nagiba ($\beta = 0$) koči dakle snažnije od zavojice s poprečnim nagibom ($\beta > 0$, uspor. prijašnji primjer).

12. STACIONARNA BRZINA I KONSTANTA KLIZINE U ZAVOJICI — STATIONÄRE GESCHWINDIGKEIT UND KONSTANTE DER RIESKURVE

U zavojici žljebastog profila jedn. (47) definira stacionarnu brzinu.

Stavimo li $k = c^2$, iz te jednadžbe izlazi

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \sqrt{2}. \quad (81)$$

Znači, ako uzdužni nagib klizine žljebastog profila udovoljava jedn. (81), onda je konstanta zavojice takve klizine jednaka kvadratu stacionarne brzine.

U zavojici klizine s pragovima jedn. (66) definira stacionarnu brzinu.

Stavimo li $k = c^2 - v_{am}^2$ ($v_{am}^2 = rg \operatorname{tg} \beta$), iz te jednadžbe izlazi

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_1 + \mu_2. \quad (82)$$

Znači, ako nagib klizine s pragovima udovoljava jedn. (82), onda je konstanta zavojice takve blizine jednaka razlici kvadrata stacionarne i najmanje početne brzine.

LITERATURA

- Dr. ing. I. Glatz: Rieswege und Drathseilriesen. Wien 1920.
 Dr. L. Hanska: Theorie der Riesen. Wien 1914.
 Dr. L. Hauska: Riesenanlagen und Seilbahnen. Wien 1933.
 Flögl S.: O putoklizini u krivulji. Glasnik za šumske pokuse knj. 3. 1931.
 Flögl S.: O utjecaju zraka na otpor šumskih klizina. Glasnik za šumske pokuse knj. 4. 1935.
 Flögl S.: Kočna gradijanta šumskih klizina. Glasnik za šumske pokuse knj. 11. 1953.

ZUSAMMENFASSUNG

1. *Einleitung.* In der Abhandlung »Über den Riesweg in der Krümmung« (Glasnik za šumske pokuse, knj. 3., Zagreb 1931), in welcher auch andere damit zusammenhängende Fragen behandelt sind, habe ich genauere Formeln über Gleitgeschwindigkeitsänderungen in den Kurven der forstlichen Riesen aufgestellt. Bei der Ableitung dieser Formeln habe ich möglichst alle Einflüsse von Bedeutung berücksichtigt, und die Ausarbeitung streng nach den Regeln der Mechanik und Mathematik durchgeführt. Dadurch aber sind diese Formeln grösstenteils kompliziert und schwierig anzuwenden, praktisch also ungeeignet. Damit jedoch jene Arbeit nicht ohne praktische Bedeutung bleibe, habe ich in vorliegender Abhandlung, wo es notwendig schien, neue und einfachere Formeln, die aber mit jenen genaueren genügend genau übereinstimmende Resultate liefern, aufgestellt.

Übersichtlich sind die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Punkt 6 u. 10 angeführt.

Alle in Punkt 6 verzeichneten Formeln sind neu, und haben genauere und schwierigere Formeln (86), (90), (93), (96), (98), (100), (103) u. (106) der ersten Arbeit praktisch zu ersetzen. Aus den in Punkt 7 ausgearbeiteten Zahlenbeispielen ist die Anwendung und Übereinstimmung der Resultate der annähernden mit den Resultaten der genaueren Formeln ersichtlich.

Die in Punkt 10 angeführten Formeln sind grösstenteils schon in der ersten Arbeit enthalten. Hinzugefügt sind neue genauere Formeln (68d), (70), (71), (73), (74), (77) u. (78) und annähernde Formeln (73a) u. (74a). Diese genaueren Formeln sind bereits derart, dass man sie wohl auch praktisch anwenden kann. Die Anwendung ist aus den in Punkt 11 ausgearbeiteten Zahlenbeispielen ersichtlich.

2. *Bewegung auf einer zylindrischen Schraubenlinie.* Da die gekrümmte Längsachse der forstlichen Riesen überwiegend die Form einer zylindrischen Schraubenlinie aufweist, so wird in diesem Punkte die Bewegung auf solch einer Raumkurve näher, u. zw. vektoriell betrachtet. Liegt der Koordinatenursprung in der Zylinderachse, so bestimmt Gl. (3), bzw. Gl. (3a) den Radiusvektor, Gl. (4) dessen horizontale Projektion und Gl. (5) den Einheitsvektor dieser Projektion, u. zw. in einem beliebigen Punkte der Schraubenlinie (vergl. auch Fig. 1). Die fettgedruckten, oder mit Pfeilen versehenen Buchstaben in den Formeln bezeichnen die Vektoren. (6) und (8) sind die Gleichungen des Geschwindigkeitsvektors. Der Einheitsvektor R' (Gl. 7) orientiert die horizontale Tangente des Zylinders und steht senkrecht auf dem ebenfalls horizontalen Einheitsvektor R .

(Gl. 5). Der Einheitsvektor k orientiert die absolute Vertikale. Daher stellt das erste Glied rechts der Gl. (8) die horizontale, und das zweite die vertikale Komponente des Geschwindigkeitsvektors dar. Gl. (11) drückt die Beziehung zwischen dem Betrage des Geschwindigkeitsvektors und seiner Projektion aus. Der Geschwindigkeitseinheitsvektor (Gl. 12) orientiert zugleich die Tangente in demselben Punkte der Schraubenlinie. Gl. (13) u. (14) bestimmen den Beschleunigungsvektor, dessen zwei wesentliche Komponenten die horizontale Zentripetalbeschleunigung (Gl. 15) und die Tangentialbeschleunigung (Gl. 16) sind. Aus dieser Tatsache folgt, dass sich ein Massenpunkt nur dann in Form einer zylindrischen Schraubenlinie bewegt, wenn alle auf ihn einwirkenden Kräfte die durch Gl. (17) näher bestimmte Kraft S resultieren. Diese Kraft ist wesentlich durch zwei Komponenten gekennzeichnet: die eine ist die horizontale Zentripetalkraft (Gl. 18), die den Massenpunkt um die Zylinderachse sich zu drehen zwingt, und die zweite ist die beschleunigende oder verzögernde Tangentialkraft, die in der Richtung der Schraubenlinientangente wirkt. Die letztere kann auch gleich Null sein, die Zentripetalkraft aber nicht, wenn eine Bewegung in Form einer zylindrischen Schraubenlinie stattfinden soll.

3. Kräfte, die in Kurven der forstlichen Riesen auf einen schweren Körper einwirken, entstehen hauptsächlich infolge des Eigengewichtes des gleitenden Körpers und der zweckmässigen Herstellung der Gleitbahn. Durch Neigung der Riese in Gleitrichtung (α) wird die zur Bewältigung der Widerstände notwendige Triebkraft — dagegen durch Steigung ($\varepsilon = -\alpha$) die zur Vergrösserung der Widerstände erforderliche Bremskraft erzeugt. Die Tangentialkraft kann also in Gleitrichtung oder entgegengesetzt wirken, sie kann aber auch gleich Null sein. Die Zentripetalkraft wird bei Rinnenprofilriesen durch Querneigung der Rinnenwände, bei Schwellenprofilriesen durch Querneigung der Gleitsohle, auch durch die am äusseren Sohlenrande befestigten Wehrbäumewand, erzeugt.

Kräfte, die infolge Längs- und Querneigung der Riese auf den gleitenden Körper einwirken, sowie sein Eigengewicht $Q = mg$, betrachten wir in einem rechtwinkligen mit dem Körper selbst verbundenen Koordinatensystem x, y, z (Abbdg. 2). Die horizontale x -Achse ist mit dem Tracierungshalbmesser der Kurve gleichgerichtet. Die gleichfalls horizontale y -Achse liegt in der Zylindertangente und die z -Achse hat die Richtung der Schwere. Das Eigengewicht wird in drei Komponenten zerlegt: Q_1, Q_2 und Q_3 . Die Komponente Q_2 liegt in der yz -Ebene gegen die y -Achse unter dem Winkel α geneigt (Längsneigung); die Komponente Q_3 liegt in der xz -Ebene, gegen die x -Achse unter

dem Winkel β geneigt (Querneigung); die dritte Komponente Q_1 steht auf der $Q_2 Q_3$ -Ebene rechtwinklig und schliesst mit den Koordinatenachsen die Winkel ε_x , ε_y und ε_z ein. Die Koordinaten dieser Komponenten sind durch Gl. (22), die Koordinaten des Eigengewichtes Q durch Gl. (23) näher angegeben. Die Gleichung der Ebene, in der die drei Punkte: P , Q_2 und Q_3 liegen, habe ich mittels Determinanten, bzw. deren Wert Gl. (24) ausgedrückt, sodann die Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Koordinatenachsen durch Gl. (25) bestimmt. Setzen wir die Werte dieser Neigungswinkel in Gl. (23) ein, so erhalten wir Gl. (26), die die Komponentenbeträge des Eigengewichtes Q vollständig bestimmen.

Die durch Gl. (27) definierte und für die Berechnung der Gleitgeschwindigkeit wichtige Zahl v wird Neigungszahl genannt. In geraden Riesstrecken, wo Querneigung entbehrlich, ist die Neigungszahl $v = \operatorname{tg} a$ (folgt aus Gl. 27, für $\beta = 0$). In Rieskurven, wo Querneigung erforderlich, hängt die Neigungszahl nicht nur von der Längs- (a), sondern auch von der Querneigung (β) der Riessohle ab.

Als Standpunkt unserer *dynamischen* Beobachtungen wählen wir den gleitenden Körper selbst (P) und setzen daselbst den Ursprung des rechtwinkligen Bezugssystems (x, y, z Fig. 2). Auf den gleitenden Körper — von diesem Standpunkte aus — wirkt sodann nicht nur die durch Querneigung der Riese erreichte Zentripetalkraft N , sondern auch die in entgegengesetzter Richtung entstandene Trägheitskraft, die s. g. Fliehkraft N' . Diese wird in zwei Seitenkräfte zerlegt: Die eine N'_β schliesst den Winkel β (Querneigung) mit der x -Achse und die zweite N'_z liegt in der z -Achse. Diese letztere Kraft lässt sich — analog der Kraft Q — in drei weitere Seitenkräfte zerlegen: N_{z1} , N_{z2} und N_{z3} . Die Beträge der Seitenkomponenten der Fliehkraft N_1 , N_2 und N_3 , in den Richtungen Q_1 , Q_2 und Q_3 , sind dann durch Gl. (28) angegeben.

Ausser den erwähnten Kräften (vom erwähnten Standpunkte aus betrachtet) wirken auf den gleitenden Körper noch folgende Kräfte: die Sohlen- oder auch Wehrbäumereaktion, die tangentielle Trieb- oder Bremskraft, die Reibung und die tangentielle Trägheitskraft des gleitenden Körpers. Diese Kräfte — je nach der Konstruktion der Riese — werden in folgenden Punkten näher besprochen.

Die Berechnung der Gleitgeschwindigkeit erfolgt praktisch zweimal: auf Grund zweier verschiedener Beträge der Widerstandszahl μ_{\min} und μ_{\max} , die so zu wählen sind, dass sich der vermutlich tatsächliche Wert μ in dem Intervalle $\mu_{\min} < \mu <$

$< \mu_{\max}$ befindet. Die Breite des Intervalls wird nach der Riesart und den in Betracht kommenden Sortimenten gewählt.

4. Kräfte, die in Kurven der Rinnenprofilriese auf einen schweren Körper einwirken. Den aktiven Eigengewichtskomponenten Q_1 , Q_2 und Q_3 des gleitenden Körpers entsprechen folgende Reaktionen: der Sohlenwiderstand W , die Reibung μW , die tangentielle Trägheitskraft T und die Fliehkraft N mit den Seitenkräften N_1 , N_2 und N_3 . Die W -Reaktion wirkt senkrecht auf die $Q_1 Q_2$ — Ebene, also in Richtung der Seitenkraft Q_1 . Alle auf den gleitenden Körper einwirkenden Kräfte ergeben demnach in den Richtungen Q_1 , Q_2 und Q_3 Seitenkräfte, die den Gleichgewichtsbedingungen (29) genügen müssen. Aus der dritten Bedingung folgt der Betrag der Fliehkraft (Gl. 30), aus der ersten (mit Rücksicht auf Gl. 26, 28 und 30) der Betrag der Reaktion W (Gl. 31) und aus der zweiten der Betrag der Tangentialkraft T (Gl. 32).

Gl. (33) und (33a) (die aus Gl. (18) bzw. (30) folgen) ergeben die Gleichung (34), die die der Geschwindigkeit v entsprechende Querneigung der Rinnenwand bestimmt. Gl. (35) definiert die Konstante der Rieskurve k . Auf diese Weise sind alle auf den gleitenden Körper einwirkenden Kräfte als Funktionen des Körpereingewichtes, der Längs- und der Querneigung der Riese und der Widerstandszahl μ ausgedrückt.

Abbdg. 5 stellt das Rinnenprofil in der Normalebene der krummen Rieslängsachse dar. Das Körpereigengewicht denken wir uns in die Seitenkräfte $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$ zerlegt. Die erste Seitenkraft wirkt in der Normalebene und die zweite in der Tangente der Rieslängsachse. Ausser der Seitenkraft $Q \cos \alpha$ im skizzierten Profile auf den Körper wirken noch die Fliehkraft und die Reaktion der Riessohle. Das Gleichgewicht ist möglich, wenn sich der Sohlenwiderstand W und der Sohlendruck W' nur durch die entgegengesetzten Vorzeichen voneinander unterscheiden. Der gleitende Körper nimmt daher die Stellung in der Rinne, bei der die Tangente des Rinnenprofils mit der Horizontale den durch Gl. (36) definierten Winkel γ einschliesst (Fig. 5). Aus dieser Gleichung ist auch ersichtlich, dass der Winkel γ gleich der Projektion des Winkels β in der Normalebene ist, und aus Gl. (36a), dass die Konstante der gekrümmten Riese k die Dimensionen des Geschwindigkeitsquadrates aufweist.

In Gl. (37) kommt die Abhängigkeit der Neigungszahl v vom Winkel γ zum Ausdruck und die Tatsache, dass diese Zahl stets kleiner als tga ist, falls $\beta \neq 0$. Im allgemeinen kann die Neigungszahl positiv (falls α positiv), negativ (falls α negativ) und gleich Null sein (wenn $\alpha = 0$).

Im Falle $0 < \mu < \nu$ liegt die Rieskurve im Gefälle, die Tangentialkraft ist positiv, und der schwere Körper gleitet mit Beschleunigung gegen das Kurvenende.

Im Falle $0 < \mu = \nu$ liegt zwar die Rieskurve im Gefälle, aber die Tangentialkraft ist gleich Null und der schwere Körper gleitet gleichförmig bis zum Kurvenende.

Im Falle $0 < \nu < \mu$ liegt die Rieskurve noch im Gefälle, die Tangentialkraft ist aber negativ und der schwere Körper gleitet mit Verzögerung gegen das Kurvenende.

Im Falle $\nu = 0$, u. zw. nur, wenn $a = 0$, ist die Tangentialkraft negativ (Gl. 38). Der schwere Körper gleitet mit Verzögerung.

Endlich falls $a < 0$, ist auch $\nu < 0$. Die Rieskurve liegt im Gegenfalle, die Tangentialkraft ist negativ, ihre Gleichung nimmt die Form der Gl. (38a) an. Der schwere Körper, wenn überhaupt, gleitet mit Verzögerung.

5. *Gleitgeschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in Kurven der Rinnenprofilriese.* Im Falle $0 < \mu < \nu$ entsteht in Gleitrichtung die durch Gl. (39) näher bestimmte Beschleunigung a_t . Gl. (39a) gibt ihre horizontale Projektion an. Weitere Gleichungen (40), bzw. (41) drücken die Beziehung zwischen dieser Projektion, der Geschwindigkeit und dem zurückgelegten Wege in horizontaler Projektion aus. Die genaue Auflösung der Differentialgleichung (41) enthält die einleitend angeführte Arbeit des Verfassers. Hier wird diese Differentialgleichung, unter Voraussetzung (42) nur annähernd in Form der Gl. (43) oder (43a) aufgelöst. Die beiden Gleichungen ergeben nämlich dasselbe: die Gleitgeschwindigkeit am Ende des $s_h = r\varphi$ langen Bogens (in horizontaler Projektion) eines schweren Körpers, der am Bogenanfang die Geschwindigkeit v_a hatte. Die unbekanntene Neigungszahl ν in diesen Gleichungen wird auf Grund folgender Erwägung schätzungsweise annähernd bestimmt.

Dass sich die Neigungszahl mit der Geschwindigkeit ändert, ist aus Gl. (44) ersichtlich. Ihr Betrag am Bogenanfang ist zwar durch Gl. (45) bestimmt (wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_a bekannt ist), am Bogenende ist aber die Neigungszahl unbekannt. Wäre sie auch am Bogenende bekannt, so könnte man ν als arithmetisches Mittel beider Zahlen (am Bogenanfang und Bogenende) in Gl. (43) oder (43a) einsetzen und die Endgeschwindigkeit aus einer der beiden Gleichungen berechnen.

Aus den Formeln (44) u. (36) folgen Gl. (46) und (46a). Die erste drückt die Beziehung zwischen der Gleitgeschwindigkeit und dem Winkel γ im allgemeinen, die zweite am Bogenanfang speziell aus.

Die Beschleunigung a_t ist gleich Null, wenn $\mu = v$ ist (vergl. Gl. 39). Tritt dieser Fall schon am Bogenanfang ein, so gleitet der schwere Körper gleichmässig den Bogen entlang mit der Geschwindigkeit, die er am Bogenanfang hatte. Im diesen Falle geht Gl. (46) in Gl. (47) über. Die letztere Gleichung bestimmt die s. g. *stationäre Gleitgeschwindigkeit*. Diese Geschwindigkeit besteht nur im Falle $\mu < tg \alpha$, und hat verschiedene Beträge für verschiedene Sortimente in derselben Rieskurve. Sie besteht also in allen Fällen $0 < \mu < v$, weil stets $\mu < tg \alpha$, wenn $\mu < v$.

Aus Gl. (46a) und (47) folgen weiter die Beziehungen (48), aus denen ersichtlich, dass die Gleitgeschwindigkeit in allen Fällen $0 < \mu < v$ gegen das Bogenende wächst, u. zw. höchstens bis zum Betrage der stationären Geschwindigkeit c . Damit $c > 0$ bleibe den Bogen entlang, kann also die Neigungszahl am Bogenende mindestens $v = \mu$ sein. Deshalb schätzen wir im Falle $0 < \mu < v_n$ die Neigungszahl nach Form. (49), und berechnen die Gleitgeschwindigkeit am Bogenende nach der annähernden Formel (43) oder (43a).

Im Falle $0 < \mu = v_n$ (also $\mu < tg \alpha$) ist die Beschleunigung gleich Null (vergl. Gl. 39), die stationäre Geschwindigkeit aber grösser als Null. Der schwere Körper gleitet gleichmässig den Bogen entlang mit der Anfangsgeschwindigkeit ($c = v_n$).

Im Falle $0 < v_n < \mu$ kann $\mu = tg \alpha$, oder $\mu > tg \alpha$ sein. Die Tangentialbeschleunigung ist negativ, d. h. der Körper gleitet mit Verzögerung und die Geschwindigkeit kann bis zur Null herabsinken. Ist aber $v = 0$, so ist $tg \gamma_0 = 0$, und die Neigungszahl $v_0 = tg \alpha$ (vergl. Gl. 36 u. 37). Im Falle $0 < v_n < \mu$, rechnen wir also mit dem Betrage der Neigungszahl der Form. (50) gemäss, und die Gleitgeschwindigkeit am Bogenende berechnen wir aus Gl. (51) oder (51a). Weicht die so berechnete Endgeschwindigkeit von Null stark ab, so muss die Rechnung wiederholt werden. (Vgl. Punkt 7, Beisp. 3 u. 4).

Genauere Formeln für die Berechnung der Endgeschwindigkeit im Falle $v_n > 0$ enthält die einleitend angeführte Abhandlung des Verfassers:

wenn $\mu < tg \alpha$, Seite 46, Nummer (86)

wenn $\mu = tg \alpha$, Seite 49, Nummer (93) u. (96)

wenn $\mu > tg \alpha$, Seite 48, Nummer (89).

Ein weiterer Fall der Neigungszahl ist $v_n = 0$ (d. h. $\alpha = 0$). Die Gleitbahn liegt in der Horizontalebene. Da im diesem Falle $(v - \mu)tg \alpha : v = -\mu : \cos \gamma$ ist, so gehen die Geschwindigkeitsgleichungen (43) u. (43a) in Gl. (52), bzw. (52a) über. In diesem

Fälle gelten auch die in Gl. (53) zum Ausdruck gebrachten Beziehungen. Aus Gl. (52) oder (52a) ist ferner ersichtlich, dass die Gleitgeschwindigkeit gegen das Bogenende bis auf Null herabsinken kann. Ist sie aber gleich Null, so wird $\cos \gamma = \cos 0 = 1$. Bei Berechnung der Endgeschwindigkeit im Falle $v_a = 0$ setzen wir daher $\cos \gamma$ mit dem Werte der Gl. (54) in die Gl. (52) oder (52a) ein. Eine nochmalige Berechnung wird nur im Falle einer grösseren Abweichung der Endgeschwindigkeit von Null erforderlich sein (Vergl. Punkt 7, Beisp. 5).

Die genauere Formel für die Berechnung der Endgeschwindigkeit im Falle $\alpha = 0$, siehe in der einleitend angeführter Arbeit des Verfassers (Seite 50, Nummer 98). Übrigens, kann die schon einfachere Form dieser genaueren Formel die annähernden Formeln (52) u. (52a) entbehrlich machen.

Schliesslich im Falle $v < 0$ steigt die Bahn in Gleitrichtung unter dem Winkel $\varepsilon (= -\alpha)$. Der schwere Körper gleitet mit Verzögerung, kann auch schon vor dem Bogenende zur Ruhe gelangen. Deshalb wird in diesem Falle die Neigungszahl mit dem Werte der Gl. (55) in die Gl. (56) oder (56a) eingesetzt und die Endgeschwindigkeit aus einer von diesen Gleichungen berechnet (vergl. Punkt 7, Beispiel 6).

Genauere Formeln zur Berechnung der Endgeschwindigkeit im Falle $\operatorname{tg} \alpha < 0$ enthält die schon mehrmals angeführte Arbeit u. zw.

- im Falle $[\operatorname{tg} \alpha] < \mu$, auf Seite 51 Nummer (100)
- im Falle $[\operatorname{tg} \alpha] = \mu$, auf Seite 52 Nummer (103)
- im Falle $[\operatorname{tg} \alpha] > \mu$, auf Seite 52 Nummer (106).

6. Formelnübersicht für die annähernde Berechnung der Gleitgeschwindigkeit in Kurven der Rinnenprofilriese.

Allgemeine Bezeichnungen:

- $g = 9,81$ m/sec Fallbeschleunigung;
- $r =$ Kreishalbmesser (Tracierungshalbmesser, d. h. horizontale Projektion des Radiusvektors der Rieskurve);
- $\varphi =$ Zentriwinkel des Kreisbogens (d. h. Zentriwinkel der horizontalen Projektion der Rieskurve);
- $r\varphi =$ Kreisbogenlänge (d. h. Bogenlänge der horizontalen Projektion der Rieskurve);
- $\mu =$ Widerstandskoeffizient (Reibungskoeffizient);
- $v_a =$ Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang und
- $v =$ am Bogenende.

Bezeichnungen und Formeln in speziellen Fällen.

a) Rieskurve mit Neigung ($tg \alpha$) in Gleitrichtung.

k = Konstante der Rieskurve (Gl. 35);

$tg \beta$ = die der Geschwindigkeit v entsprechende Neigung der Rinnenwand im vertikalen Riesquerschnitt (Gl. 34);

$tg \gamma$ = Neigung der Rinnenprofilltangente in der Normalebene der Rieskurve (Gl. 36). Namentlich bezieht sich $tg \gamma_a$ auf den Bogenanfang und $tg \gamma_b$ auf das Bogenende;

$tg \gamma$ = ist auch die Projektion von $tg \beta$ in der Normalebene der Rieskurve (Gl. 36), schliesslich ist auch die Verhältniszahl zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeit und der Konstante der Rieskurve (Gl. 36, 46, 47);

$tg \gamma_c$ = bestimmt die stationäre Gleitgeschwindigkeit c in der Rieskurve (Gl. 47);

v = die Neigungszahl der Riese (Gl. 27, 37). Speziell ist

v_a = die Neigungszahl am Bogenanfang, und v_b diejenige am Bogenende;

Gl. (43a) bestimmt die Gleitgeschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ entsprechenden Bogens, falls der Widerstandskoeffizient μ und die Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang v_a bekannt ist.

Die Neigungszahl v in dieser Gleichung wird nach Gl. (57) schätzungsweise bestimmt, und bei der ersten annähernden Berechnung mit

$v_v = \mu$, falls $0 < \mu < v_a$ (vergl. auch Gl. 49)

$v_v = v_a = \mu$, falls $0 < \mu = v_a$

$v_v = tg \alpha$, falls $0 < v_a < \mu$ (vergl. auch Gl. 50)

angenommen. Im letzteren Falle geht Gl. (43a) in Gl. (51a) über.

b) Die Rieskurve liegt in der Horizontalebene ($a = 0$).

$k = rg$ (m/sec)² Konstante der Rieskurve;

$tg \beta = v^2 : rg = v^2 : k$ die der Geschwindigkeit v entsprechende Neigung der Rinnenwand im vertikalen Riesquerschnitte (Gl. 34);

$tg \gamma = tg \beta$ Neigung der Rinnenprofilltangente in der Normalebene der Rieskurve (Gl. 36). Der vertikale Riesquerschnitt ist in diesem Falle identisch mit dem Riesprofile in der Normalebene der Rieskurve;

$v = 0$ Neigungszahl der Riese;

Die Gleitgeschwindigkeit wird gebremst den Bogen entlang.

Gl. (52a) bestimmt die Gleitgeschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ entsprechenden Bogens, falls Widerstands-

koeffizient μ und Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang v_0 bekannt sind. Bei erster Berechnung wird $\cos \gamma$ dem Werte der Gl. (54) gleichgesetzt.

c) Rieskurve mit Steigung ($\varepsilon = -\alpha$) in Gleitrichtung.

$k = \frac{rg}{\cos \varepsilon}$ Konstante der Rieskurve (Gl. 35);

$tg \beta =$ die der Geschwindigkeit v entsprechende Neigung der Rinnenwand im vertikalen Riesquerschnitt (Gl. 34);

$tg \gamma = tg \beta \cos \varepsilon = \frac{v^2}{k}$ Neigung der Rinnenprofilltangente in der Normalebene der Rieskurve (Gl. 36).

$v = tg \varepsilon \cos \gamma$ Neigungszahl der Riese (Gl. 37).

Gl. (56a) bestimmt die Gleitgeschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ entsprechenden Bogens, falls Widerstandskoeffizient μ und Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang (v_0) bekannt sind. Bei ersterer Berechnung wird γ nach Gl. (55) geschätzt.

7. Anwendung der im vorigen Punkte aufgestellten Formeln. Die Genauigkeit der nach diesen annähernden Formeln erhaltenen Resultate wird durch Vergleichung mit den nach genaueren Formeln berechneten Resultaten überprüft. (Genauere Formeln enthält die einleitend angeführte Arbeit).

Beispiel 1. Auf Grund folgender Angaben: $\varphi = 90^\circ$, $\text{arc } \gamma = 1,571$, $r = 200$ m, $\alpha = 16^\circ 42'$, $v_0 = 17,2$ m/sec und $\mu = 0,20$ wurde vorest $\gamma_a = 8^\circ 11'$, $v_a = 0,297$, u. $k = 2048$ (m/sec)² aus den Gleichungen 35, 36 u. 45 berechnet, sodann — da $0 < \mu < v_0$ ist — die Neigungszahl $v = 0,2485$ nach Gl. (49) geschätzt. Mit diesem Werte wurde sodann $\gamma_v = 17^\circ 45'$ aus Gl. (43a), und $v_v = 0,286$ aus Gl. (37) berechnet. Da sich die letztere Zahl von der vorausgesetzten Zahl $v_v = \mu = 0,2$ relativ bedeutend unterscheidet, so wurde die Rechnung mit dem eben erhaltenen Werte $v_v = 0,286$ wiederholt. Zum zweitenmal wurde $v = 1/2 (0,297 + 0,286) = 0,292$ geschätzt, dann $\gamma_v = 23^\circ 10'$ aus Gl. (43a) und $v_v = 0,276$ aus Gl. (37) berechnet. Da sich nun die geschätzte (0,286) und nochmals berechnete Neigungszahl (0,292) wenig voneinander unterscheiden, so wurde schliesslich die Endgeschwindigkeit mit $v = 29,6$ m/sec aus Gl. (36) bestimmt. Die stationäre Gleitgeschwindigkeit dieser Rieskurve (mit $\mu = 0,2$) beträgt $c = 47,9$ m/sec (aus Gl. 47 u. 36).

Nach Form. (81) der einleitend angeführten Arbeit und nach Gl. (36) bestehen zwischen τ und γ die Beziehungen (58) und (58a). Mittels dieser Beziehungen wurden die oben erhaltenen Ergebnisse der annähernden Formeln nach genaueren For-

meln (81) und (86) überprüft. Der genauere Wert der Endgeschwindigkeit ist $v = 29,3$ m/sec, der sich vom annähernden Werte $v = 29,6$ m/sec praktisch kaum unterscheidet. Die darauf folgenden Beispiele bestätigen praktisch die genügend genaue Übereinstimmung der annähernden mit den genauer berechneten Ergebnissen auch in den übrigen behandelten Fällen.

8. *Kräfte, die in Kurven der Schwellenprofilriese auf einen schweren Körper einwirken.* Wie bei Rinnenprofil so auch bei Schwellenprofil ist die Neigungszahl v durch Gl. 27 angegeben, falls Längsneigung (α) und Querneigung der Sohle ($\beta > 0$) vorhanden sind. Die Querneigung hängt von der voraussichtlich kleinsten Anfangsgeschwindigkeit (Gl. 59) und diese vom vermutlichen Kleinstwerte der Reibungszahl μ_1 ab. Zwischen der Querneigung der Riessohle und der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit besteht also die durch Gl. 59a festgestellte Beziehung.

In der Regel ist $\operatorname{tg} \beta$ ein kleiner, und $(\cos \alpha \operatorname{tg} \beta)^2$ ein noch kleinerer echter Bruch, den man ausser acht lassen kann. Infolgedessen nehmen die Formeln der Neigungszahl und der Tangentialkraft in Kurven der Schwellenriese die Form der Gl. (60) an, in welcher μ_1 die Widerstandszahl an der Riessohle bedeutet.

Wird die Geschwindigkeit v_{am} überschritten, so streift das gleitende Holz infolge vergrößerter Fliehkraft auch die am äusseren Riessohlenrande befestigte Wehrbäumewand u. zw. mit dem vorderen zu diesem Zwecke mit Spranz versehenen Ende. Dadurch entsteht noch ein zuzüglicher durch Gl. 61 angegebener Bewegungswiderstand. In letzterer Formel bedeutet W_2 die Reaktion und μ_2 die Widerstandszahl an der Wehrbäumewand. Durch diesen Widerstand verkleinert sich die Tangentialkraft zu dem durch Gl. (62), bzw. (64) angegebenen Betrage. Die Formel (60) bestimmt die Tangentialkraft im Falle $W_2 = 0$, d. h. wenn das Riesholz ohne an die Wehrbäumewand zu streifen, in der Rieskurve gleitet. Dagegen gibt Gl. (65) die Tangentialkraft an, falls $\beta = 0$, d. h. falls die Riessohle keine Querneigung hat. Gleichmässig gleitet das Riesholz, wenn die Tangentialkraft in jedem Kurvenpunkte gleich Null ist. In solchen Fällen ist die Anfangsgeschwindigkeit (v_u) zugleich die stationäre Gleitgeschwindigkeit (Gl. 66). Ist die Bedingung $\operatorname{tg} \beta > 0$ und $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha$ erfüllt, so ist v_{am} die stationäre Gleitgeschwindigkeit, und das Riesholz streift nicht die Wehrbäumewand, denn es ist $W_2 = 0$. Hat die Riessohle keine Querneigung, so besteht stationäre Geschwindigkeit nur im Falle $0 < \mu_1 \leq \operatorname{tg} \alpha$, und ihr Betrag ist dann durch Gl. (66a) bestimmt. Stationäre Geschwindigkeit besteht auch in den Fällen $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$, wenn auch die Bedingung $v_{am}^2 : k > (\mu_1 - \operatorname{tg} \alpha) : \mu_2$ erfüllt ist; ihr Betrag ist durch Gl. (66b) angegeben. Die stationäre Geschwindigkeit in

Fällen $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$ kann nicht gleich Null sein; dagegen ist sie gleich Null in Fällen $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$, wenn auch die Bedingung (66c) erfüllt ist. In Fällen, in welchen $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha > 0$ ist, wenn auch die Bedingung (66d) erfüllt ist, besteht keine stationäre Geschwindigkeit, denn nach Gl. (66) ist c in diesen Fällen imaginär.

Die Widerstandszahl μ_1 an der Riessohle ist bekannt, da sie in geraden und krummen Strecken derselben Riese für dasselbe Riesholz dieselbe ist. Von dieser Zahl unterscheidet sich die Widerstandszahl μ_2 an den Wehrbäumewänden, denn die gegenseitige Lage der Fasern des Riesholzes und der Schwellen, ferner die Lage der angeschnittenen Spranzfasern und Fasern der Wehrbäume ist unterschiedlich. Zuverlässige Angaben über die Zahlen μ_2 können nicht gemacht werden. Wahrscheinlich in derselben Riese und für dasselbe Riesholz ist μ_2 etwas grösser als μ_1 . Oft wird man sie gleichsetzen können.

Schliesslich, nach Aufstellung der Gleichung und Erklärung der stationären Geschwindigkeit, kann die Tangentialkraft in Kurven der Schwellenprofilriese durch Gl. (67) — u. zw. kürzer und übersichtlicher als durch Gl. (64) — angegeben werden.

9. Geschwindigkeitsänderung eines schweren Körpers in Kurven der Schwellenprofilriese.

a) Rieskurve mit Neigung ($\operatorname{tg} \alpha$) in Gleitrichtung; die Widerstandszahl μ_1 ist kleiner als die Neigung ($0 < \mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$).

Aus der Gleichung (67) folgt die Gleichung der Beschleunigung (a_t) und ihrer horizontalen Projektion (a_{th}). Aus der bekannten Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten wir sodann eine Differentialgleichung, deren Auflösung Gl. (68) enthält. Diese Gleichung gibt die Gleitgeschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ zugehörigen Kreisbogens an. Im allgemeinen kann die Anfangsgeschwindigkeit v_a kleiner, grösser oder auch gleich der stationären Geschwindigkeit c sein.

Ist $v_a < c$, so dient zur Berechnung der Endgeschwindigkeit besser als Gl. (68), die Gl. (68a). Die kleinste Geschwindigkeit befindet sich am Bogenanfang; sie nimmt den Bogen entlang zu, bleibt aber stets kleiner als die stationäre Geschwindigkeit, denn bis zum Betrage der stationären Geschwindigkeit könnte sie nur in einem unendlich langen Bogen anwachsen.

Ist $v_a = c$, so durchgleitet der schwere Körper die Rieskurve gleichmässig.

Ist $v_a > c$, so ist zur Anwendung geeigneter Gl. (68b) als Gl. (68). Die grösste Geschwindigkeit befindet sich am Bogenanfang; sie nimmt den Bogen entlang ab, bleibt aber stets

grösser als die stationäre Geschwindigkeit; denn auf den Betrag der letzteren könnte sie nur in einem unendlich langen Bogen herabsinken.

Gl. (68) stellt die genaue Auflösung der vorausgeschickten Differentialgleichung dar (s. die einleitend angeführte Abhandlung). Da diese und weitere Gleichungen (68a) u. (68b) bereits einfachere Berechnungen erfordern, so unterliess ich die Aufstellung einfacherer annähernder Formeln.

b) Rieskurve mit Neigung ($tg\ a$) in Gleitrichtung; die Widerstandszahl μ_1 ist gleich dem Gefälle ($0 < \mu_1 = tg\ a$). Ist die Riessohle mit einer Querneigung versehen, so ist $v_{am} > 0$. Nach Gl. (66) ist die stationäre Geschwindigkeit $c = v_{am} > 0$ und der schwere Körper gleitet in der Kurve im Falle $v_a > c = v_{am}$ oder $v_a = c = v_{am}$.

Ist $v_a > c = v_{am}$ so dient zur Berechnung der Endgeschwindigkeit die aus Gl. (68b) abgeleitete Gl. (68c). Die Gleitgeschwindigkeit nimmt vom Grösstwert am Bogenfang, gegen das Bogenende ab, bleibt aber stets grösser als die stationäre Geschwindigkeit.

Ist $v_a = v_{am}$, so gleitet der schwere Körper mit dieser Geschwindigkeit gleichmässig den Bogen entlang.

c) Rieskurve mit Neigung ($tg\ a$) in Gleitrichtung. Die Widerstandszahl μ_1 ist gleich der Neigung ($0 < \mu_1 = tg\ a$), die Riessohle hat aber keine Querneigung ($\beta = 0$). In diesem Falle ist $v_{am} = 0$ und $c = 0$. Man berechnet die Endgeschwindigkeit nach Gl. (68d), die aus Gl. (68b) oder (68c) hervorgeht.

d) Rieskurve mit Neigung ($tg\ a$) in Gleitrichtung; die Widerstandszahl μ_1 ist grösser als die Neigung ($\mu_1 > tg\ a > 0$) und die Riessohle ist mit Querneigung versehen. Die stationäre Geschwindigkeit (vergl. Gl. 66) kann grösser als Null sein, wenn die Bedingung (66b) erfüllt ist. Dabei sind die Fälle $v_a > v_{am}$ und $v_a = v_{am}$ zu unterscheiden.

Ist $v_a > v_{am}$, so ist $W_2 > 0$ (vergl. Gl. 63) und für die Berechnung der Endgeschwindigkeit kommt Gl. (68b) in Betracht (denn es ist $v_a > v_{am} > c$).

Ist $v_a = v_{am}$, so ist $W_2 = 0$ und Gl. (68) kommt überhaupt nicht in Betracht. In diesem Falle ist die Tangentialkraft (T_1) negativ, also gleitet der schwere Körper mit Verzögerung (a_t). Aus der Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verzögerung folgt dann die Differentialgleichung, deren Auflösung die Gl. (69) ist. Nach dieser Gleichung wird die Endgeschwindigkeit berechnet.

e) Rieskurve mit Neigung ($tg\ a$) in Gleitrichtung; die Widerstandszahl μ_1 ist grösser als das Gefälle ($\mu_1 > tg\ a > 0$) und die Riessohle ist mit Querneigung versehen. Die stationäre Geschwindigkeit kann gleich Null sein, falls die Bedingung (66c)

erfüllt ist. Dabei kann die Anfangsgeschwindigkeit $v_a > v_{am}$, oder $v_a = v_{am}$ sein.

Im Falle $v_a > v_{am}$ ist auch $W_2 > 0$ (vergl. Gl. 63), und die Tangentialkraft hat den aufgeschriebenen negativen Wert. Unter Einwirkung solch einer Kraft ändert sich die Gleitgeschwindigkeit nach Gl. (70). Sie nimmt gegen das Bogenende ab. Da aber die Geschwindigkeit am Bogenfang $v = v_a > v_{am}$ war, so kann sie mit zunehmenden Zentriwinkel φ auch auf $v = v_{am}$ herabsinken. Das geschieht im Kurvenpunkte, in welchem der Zentriwinkel φ auf den Betrag der Gl. (71) angewachsen ist. Nur bis zu diesem Kurvenpunkte behält Gl. (70) ihre Geltung; bei weiterem Gleiten ändert sich die Geschwindigkeit nach Gl. (69).

Im Falle $v_a = v_{am}$ ändert sich ebenso die Gleitgeschwindigkeit aus denselben Gründen nach Gl. (69).

f) Rieskurve mit Steigung ($\varepsilon = -a$) in Gleitrichtung; die Riessohle ist mit Querneigung versehen und es ist $v_a > v_{am}$. Gl. (64) der Tangentialkraft geht in Gl. (72) über. Diese Kraft bewirkt die Verzögerung α_r . Mittels der bekannten Beziehung zwischen Verzögerung und Geschwindigkeit gelangen wir zur Gleichung der Endgeschwindigkeit (73). Der Grösstwert der Geschwindigkeit befindet sich am Bogenanfang; sie nimmt gegen das Bogenende ab. Bei dem Werte $v = v_{am}$ ist der Zentriwinkel φ auf den Betrag der Gl. (74) angewachsen; darum stellt Gl. (74) auch die Geltungsgrenze der Gl. (73) dar. Über diese Grenze hinaus ändert sich die Geschwindigkeit nach Gl. (75). Die annähernden Gl. (73a) und (74a) können bisweilen die genaueren Gl. (73) bzw. (74) ersetzen.

g) Rieskurve mit Steigung ($\varepsilon = -a$) in Gleitrichtung; die Riessohle ist mit Querneigung versehen, und es ist $v_a = v_{am}$. Die Tangentialkraft ist durch Gl. T und die Verzögerung durch Gl. α_r , bzw. α_{th} bestimmt. Aus der Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verzögerung folgt die Differentialgleichung $v dv$, deren Auflösung Gl. (75) enthält. Diese Gleichung bestimmt die Endgeschwindigkeit unter den vorausgesetzten Bedingungen.

h) Rieskurve mit Steigung ($\varepsilon = -a$) in Gleitrichtung; die Riessohle ist aber mit keiner Querneigung versehen. Es ist also $v_{am} = 0$, und nur dadurch unterscheidet sich dieser Fall von dem unter (f) behandeltem Falle. Aus Gl. (73), für $v_{am} = 0$, folgt Gl. (76), die die gesuchte Endgeschwindigkeit bestimmt.

i) Die Rieskurve liegt in der Horizontalebene ($\varepsilon = -a = 0$), die Riessohle ist mit Querneigung versehen und es ist $v_a > v_{am}$. Mit $\varepsilon = 0$ aus der Gl. (73) folgt unmittelbar die Gl. (77), welche die Endgeschwindigkeit bestimmt. Grösstwert der Geschwindigkeit tritt am Bogenanfang ein; die Geschwindigkeit nimmt gegen das Bogenende ab, und im Kurvenpunkte, in welchem sie

auf den Betrag $v = v_{am}$ herabgesunken ist, ist der Zentriwinkel φ auf den Betrag der Gl. (78) angestiegen. Die letztere Gleichung bestimmt also auch die Gültigkeitsgrenze der Gl. (77). Über diese Grenze hinaus ändert sich die Geschwindigkeit nach Gl. (79).

j) Die Rieskurve liegt in der Horizontalebene, die Riessohle ist mit Querneigung versehen, und es ist $v_a = v_{am}$. Für die Berechnung der Endgeschwindigkeit massgebend ist die aus Gl. (75) für $\varepsilon = 0$ unmittelbar folgende Gl. (79).

k) Die Rieskurve liegt in der Horizontalebene, die Riessohle hat aber keine Querneigung. Aus der Gl. (76), für $\varepsilon = 0$, folgt unmittelbar die Gl. (80), welche die Endgeschwindigkeit bestimmt.

10. Formelnübersicht zur Berechnung der Gleitgeschwindigkeit in Kurven der Schwellenprofilriese.

Allgemeine Bezeichnungen

g (m/sec²) = Fallbeschleunigung.

r (m) = Kreisradius (Tracierungshalbmesser).

φ = Zentriwinkel des Kreisbogens (d. h. Zentriwinkel der horizontalen Projektion der Rieskurve).

β = Querneigung der Riesbahnsohle.

μ_1 = Reibungszahl an der Riessohle.

μ_2 = Reibungszahl an der Wehrbäumewand.

v_{am} (m/sec) = voraussichtlicher Kleinstwert der Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang; wird mittels Grösstwert der Reibungszahl bestimmt.

v_a (m/sec) = Gleitgeschwindigkeit am Bogenanfang (Anfangsgeschwindigkeit) und

v (m/sec) = am Bogenende (Endgeschwindigkeit).

a) Rieskurve mit Neigung ($tg \alpha$) in Gleitrichtung, die Widerstandszahl μ_1 ist kleiner als die Neigung ($tg \alpha > \mu_1 > 0$).

Gl. (35) bestimmt die Konstante der Rieskurve (k).

Gl. (59) und (59a) bestimmen die Beziehung zwischen Querneigung und Kleinstwert der Anfangsgeschwindigkeit.

Gl. (66) bestimmt die stationäre Geschwindigkeit in der Rieskurve allgemein.

$c = v_{am}$ die stationäre Geschwindigkeit im Falle

$\beta > 0, \mu_1 = tg \alpha$.

Gl. (66a) bestimmt die stationäre Geschwindigkeit im Falle

$\beta = 0, \mu_1 < tg \alpha$.

Gl. (66b) mit Nebenbedingung bestimmt die stationäre Geschwindigkeit im Falle $\beta > 0, \mu_1 > tg \alpha$.

Die Geschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ zukommenden Bogens wird berechnet nach:

1. Gl. (68a) wenn $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} a$, $v_a < c$
Gl. (68b) wenn $0 < \mu_1 < \operatorname{tg} a$, $v_a > c$
2. Gl. (68c) wenn $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} a$, $\beta > 0$, $v_a > v_{am} = c$;
ist aber $v_a = v_{am} = c$, so ist auch $v = v_{am} = c$.
3. Gl. (68d) wenn $0 < \mu_1 = \operatorname{tg} a$, $\beta = 0$, $c = 0$.
4. Gl. (68b) wenn $0 < \operatorname{tg} a < \mu_1$, $\beta > 0$, $c > 0$, $v_a > v_{am}$.
5. Gl. (69) wenn $0 < \operatorname{tg} a < \mu_1$, $\beta > 0$, $c > 0$, $v_a = v_{am}$.
6. Gl. (70) wenn $0 < \operatorname{tg} a < \mu_1$, $\beta > 0$, $c = 0$, $v_a > v_{am}$.

Die Gültigkeit der Gl. (70) reicht aber nur bis zum durch Gl. (71) angegebenen Werte des Zentriwinkels φ ; über diese Grenze hinaus, und im Falle $v_a = v_{am}$ wird die Endgeschwindigkeit nach Gl. (69) berechnet.

b) Die Rieskurve liegt in der Horizontalebene ($\alpha = \varepsilon = 0$).

$k = rg$ Konstante der Rieskurve (Gl. 35).

$$\frac{v_{am}^2}{k} = \frac{v_{am}^2}{rg} = \operatorname{tg} \beta \text{ Querneigung der Riesbahnsohle (34, 59, 59a).}$$

Die Geschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ zukommenden Bogens wird berechnet nach:

6. Gl. (77), falls $\beta > 0$ und $v_a > v_{am}$, aber nur bis zum durch Gl. (78) angegebenen Werte des Zentriwinkels φ .
Über diese Grenze hinaus nach Gl. (79).
7. Gl. (79) falls $\beta > 0$ und $v_a = v_{am}$.
8. Gl. (80) falls $\beta = 0$.

c) Rieskurve mit Steigung ($\varepsilon = -\alpha$) in Gleitrichtung.

$$k = \frac{rg}{\cos \varepsilon} \text{ Konstante der Rieskurve (Gl. 35)}$$

$$\frac{v_{am}^2}{rg} = \operatorname{tg} \beta \text{ Querneigung der Riesbahnsohle (34, 59, 59a).}$$

Die Geschwindigkeit am Ende des dem Zentriwinkel φ zukommenden Bogens wird berechnet nach:

9. Gl. (73) wenn $\beta > 0$ und $v_a > v_{am}$, aber nur bis zum durch Gl. (74) angegebenen Werte des Zentriwinkels φ .
Über diese Grenze hinaus nach Gl. (75).

Die genaueren Gl. (73) und (74) können bisweilen durch die annähernden Gl. (73a) und (74a) ersetzt werden.

10. Gl. (75) wenn $\beta > 0$ und $v_a = v_{am}$.
11. Gl. (76) wenn $\beta = 0$ und $v_{am} = 0$.

11. *Anwendung der im vorigen Punkte angeführten Formeln.* In den Beispielen 1 bis 8 u. 11 wurden genauere, und in den Beispielen 9 u. 10 genauere und annähernde Formeln angewendet.

12. *Stationäre Geschwindigkeit und Konstante der Rieskurve.*

In Kurven der Rinnenprofilriese ist die stationäre Gleitgeschwindigkeit durch Gl. (47) definiert. Setzen wir $k = c^2$, so folgt aus dieser Gleichung die Gl. (81), welche besagt, dass die Konstante der Rieskurve dem Quadrate der stationären Geschwindigkeit gleich ist, falls die Längsneigung der Riese der Gl. (81) genügt.

In Kurven der Schwellenprofilriese ist die stationäre Geschwindigkeit durch Gl. (66) definiert. Setzen wir $k = c^2 - v_{am}^2$ ($v_{am}^2 = rg \operatorname{tg} \beta$), so folgt aus dieser Gleichung die Gl. (82), welche besagt, dass die Konstante der Rieskurve der Quadratendifferenz der stationären und der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit gleich ist, falls die Längsneigung der Riese der Gl. (82) genügt.